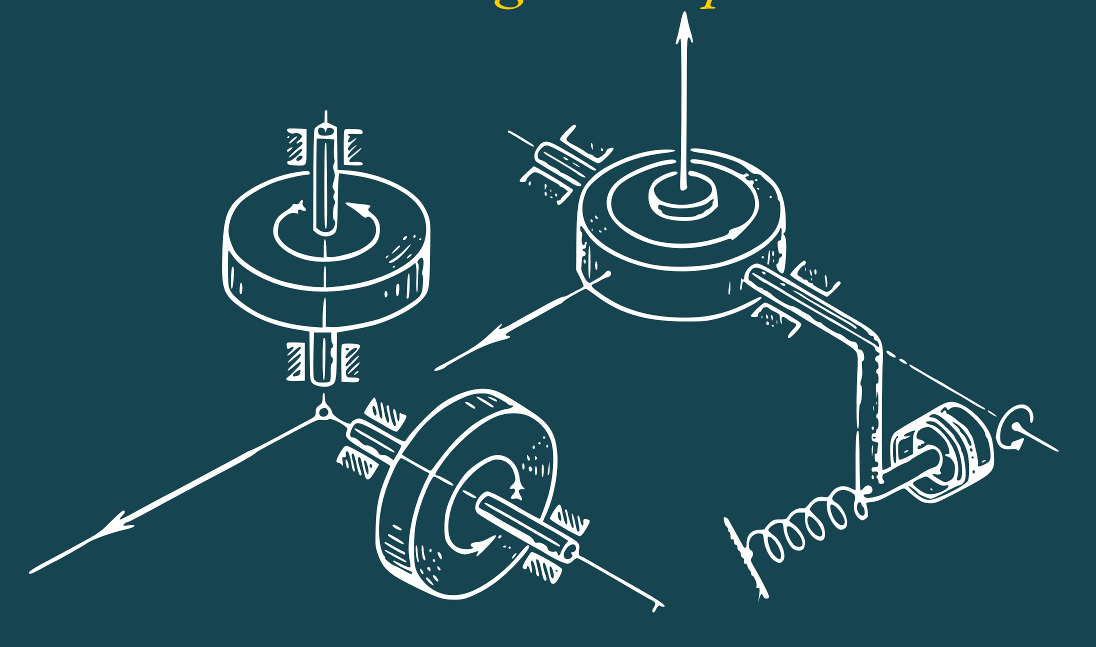
A. Ishlinsky

Orientation, Gyroscopes et Navigation par Inertie

Tome 2

Systèmes Gyroscopiques de Navigation par Inertie



Éditions Mir Moscou

А. Ю. ИШЛИНСКИЙ

ОРИЕНТАЦИЯ, ГИРОСКОПЫ И ИНЕРЦИАЛЬНАЯ НАВИГАЦИЯ

Книга II

ГИРОСКОПИЧЕСКИЕ ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

A. ISHLINSKY

ORIENTATION, GYROSCOPES ET NAVIGATION PAR INERTIE

Tome II

SYSTÈMES GYROSCOPIQUES DE NAVIGATION PAR INERTIE

ÉDITIONS MIR · MOSCOU

Traduit du russe
par V. KOLIMÉEV

На французском языке

INTRODUCTION

Le premier tome de cette monographie a été consacré essentiellement à l'étude des questions spéciales de la géométrie et de la cinématique, liées à la détermination de l'orientation des mobiles, ainsi que des gyroscopes installés à bord de ces mobiles. C'est seulement dans le dernier chapitre qu'ont été étudiées les relations différentielles de la théorie de précession des gyroscopes, conformément auxquelles les plates-formes stabilisées par des gyroscopes (en particulier, par des gyroscopes à correction dite forte) peuvent, dans certains cas, changer d'orientation.

Dans le deuxième tome, la place la plus importante est accordée aux questions de la dynamique. Nous y exposons la théorie des gyroscopes et des accéléromètres qui sont les éléments essentiels des systèmes de navigation par inertie et établissons les équations de fonctionnement de certains systèmes concrets. C'est seulement à la fin de ce livre que nous reprenons les questions de la géométrie et de la cinématique mais, cette fois, en liaison avec certaines questions théoriques concernant les systèmes de navigation par inertie.

Aucune branche de la mécanique n'exige peut-être de recourir si souvent à la mécanique du mouvement relatif que la théorie des gyroscopes et donc la dynamique des systèmes de navigation par inertie. C'est pourquoi le premier chapitre du deuxième tome est consacré à une interprétation rigoureuse des forces d'inertie et à l'établissement des équations du mouvement relatif en plein accord avec les propositions fondamentales de la mécanique classique. Sur les exemples donnés dans ce chapitre, nous étudions le mouvement et l'équilibre d'un pendule composé par rapport à la Terre en mouvement de rotation. Ces études présentent un intérêt pratique et théorique de par elles-mêmes. Signalons, par exemple, l'étude des conditions dites de « non-perturbabilité » dans lesquelles l'axe de symétrie dynamique d'un pendule composé est constamment orienté vers le centre de la Terre (considérée comme sphère à répartition radiale de la densité), quel que soit le mouvement du point de suspension du pendule à une altitude constante au-dessus de sa surface. Le pendule de Schüler bien connu en est un cas particulier. Le point de suspension de ce pendule peut être animé d'un mouvement abso-

lument quelconque sur l'arc de grand cercle terrestre qui ne participe pas à la rotation de la Terre, alors que son centre de gravité reste situé dans le plan de ce cercle. Le pendule de Schüler a joué un rôle euristique bien important dans le développement des systèmes gyroscopiques de navigation par inertie.

Dans le deuxième chapitre, en partant des équations d'Euler modifiées du mouvement d'un corps solide à symétrie axiale autour d'un point fixe, nous exposons la théorie de précession des gyroscopes et analysons certaines applications de cette théorie au gyroscope suspendu à la cardan et à d'autres dispositifs gyroscopiques utilisés dans la navigation par inertie. Sur la base des équations du mouvement de précession du gyroscope suspendu à la cardan, obtenues dans ce chapitre, nous analysons le problème de « l'inclinaison de la toupie » qui permet de mieux comprendre les particularités des phénomènes gyroscopiques. Nous passons ensuite à l'étude, fondée sur les lois de la mécanique du mouvement relatif et ayant une importance fondamentale pour la théorie de la navigation par inertie, du mouvement d'un pendule gyroscopique dont le point de suspension, de même que celui d'un pendule composé examiné au premier chapitre, se déplace, de façon arbitraire, à une distance constante du centre du globe terrestre. Ce cas se caractérise par ses propres conditions de « non-perturbabilité ». Nous mettons en évidence la possibilité de mesurer la vitesse dite « absolue » du mouvement du point de suspension par rapport à un système de coordonnées ayant son origine au centre de la Terre et ne participant pas à sa rotation. Un tel pendule gyroscopique « non perturbable » a fait l'objet des études entreprises par le remarquable mécanicien soviétique B. V. Boulgakov et il serait plus équitable de l'appeler pendule gyroscopique de Schüler-Boulgakov (M. Schüler n'a étudié qu'un cas particulier du mouvement du pendule gyroscopique, où le point de suspension se déplace suivant le grand cercle de la Terre, dans l'hypothèse que celle-ci ne tourne pas).

Au cours du même chapitre, nous décrivons, sur l'exemple de schéma concret d'un stabilisateur gyroscopique à trois axes, les méthodes à appliquer pour obtenir les équations du mouvement de précession des systèmes gyroscopiques complexes. Nous y établissons également les équations du mouvement de l'élément sensible du compas gyroscopique de Geckeler. Le chapitre se termine par l'étude, toujours dans le cadre de la théorie de précession des gyroscopes, d'une des causes d'erreurs de l'intégrateur gyroscopique de l'accélération apparente du mobile. Signalons que le phénomène, connu sous le nom d'accumulation de l'angle solide, peut, lui aussi, constituer une cause d'erreurs dans les indications de l'intégrateur gyroscopique. Ce phénomène est exactement de la même nature que dans le stabilisateur gyroscopique à un axe, examiné au début du dernier chapitre du premier tome.

Le troisième chapitre du deuxième tome de la monographie est consacré à l'étude du comportement d'un gyroscope libre (équilibré ou astatique) suspendu à la cardan et des stabilisateurs gyroscopiques les plus simples. Cette étude est basée sur l'analyse des équations du mouvement dites de nutation (équations complètes ou exactes). A la différence des équations de la théorie de précession, les équations de nutation tiennent compte des moments d'inertie et, par conséquent, des moments cinétiques des anneaux de la suspension et des corps qui leur sont liés, ainsi que du moment d'inertie équatorial du rotor. La première étude du mouvement d'un gyroscope suspendu à la cardan, avec l'utilisation des équations de nutation, a été entreprise par E. Nicolaï, puis par N. Tchétaev et ensuite, après une interruption assez longue, par K. Magnus et presque simultanément avec lui par B. Plymale et R. Goodstein et autres chercheurs. Il est apparu que lorsqu'un gyroscope équilibré, installé sur un support fixe, est animé d'un mouvement à nutation, il « dérive » systématiquement autour de l'axe de l'anneau extérieur, même dans le cas où le frottement est nul dans tous les axes de sa suspension à la cardan. Dans le troisième chapitre, nous obtenons, par une nouvelle méthode, la formule dite de Magnus pour la vitesse moyenne d'une telle dérive et évaluons le degré de sa précision. Nous analysons aussi, sous l'aspect qualitatif, la variation des coordonnées généralisées d'un tel gyroscope.

Enfin, dans le troisième chapitre, nous traitons du comportement des stabilisateurs gyroscopiques à un et à deux axes. Le problème principal consiste ici à établir les conditions de stabilité de leur mouvement, compte tenu des phénomènes transitoires qui interviennent dans les circuits électriques des moteurs de stabilisation. Pour la première fois, ce problème a été résolu dans le cas le plus simple par V. Kouznetsov ; les cas plus compliqués ont été considérés par Ya. Reutenberg. A la fin du chapitre, nous décrivons l'analogie qui existe entre un stabilisateur gyroscopique et un système de plusieurs masses réunies entre elles par des éléments élastiques (ressorts). Dans certains cas, une telle analogie permet de déterminer de façon relativement simple le caractère des oscillations partielles du stabilisateur et leur stabilité.

Le quatrième chapitre commence par l'exposé de la théorie de l'accéléromètre le plus simple qui constitue un des éléments essentiels de la plupart des systèmes de navigation par inertie. Cette étude concerne également le contenu du premier chapitre parce qu'elle fournit un exemple d'application des propositions et des théorèmes de la mécanique du mouvement relatif. S'y rapporte également la description du principe de fonctionnement d'un intégrateur gyroscopique donnée à la fin du deuxième chapitre à l'occasion de la théorie de précession des gyroscopes.

Le contenu principal du quatrième chapitre est consacré à la description des principes selon lesquels sont construits les schémas

des systèmes les plus simples de navigation par inertie (notamment, le schéma dit de Boykow), lorsque le mobile se déplace sur l'arc de grand cercle de la Terre non tournante. L'étude des systèmes inertiels plus complexes prévus pour des mobiles se déplaçant de façon quelconque à une distance constante du centre de la Terre est réservée pour le cinquième chapitre. Nous indiquons pour certains systèmes les équations qui décrivent leur comportement dans le cas où les conditions initiales nécessaires ne sont pas exactement satisfaites.

Remarquons que les premières recherches dans le domaine de la théorie mathématique de la navigation par inertie sont dues à B. Boulgakov. C'est lui qui a établi les équations du comportement d'un système original proposé par les ingénieurs soviétiques L. Koffmann et E. Levental. Ce système inertiel résolvait de façon approchée le problème de la détermination des coordonnées géographiques d'un objet en mouvement sur la sphère terrestre. Certaines études ultérieures, faites dans la théorie de la navigation par inertie ne se sont pas avérées irréprochables. Le travail de Ch. Fox, examiné au cinquième chapitre, en fournit un exemple. C'est seulement au milieu des années 50 qu'ont été obtenues les équations différentielles du fonctionnement d'un système de navigation par inertie, exempt d'erreurs de principe. On peut trouver ces équations, par exemple, dans l'article de A. Ishlinsky « Sur les équations du problème de la localisation d'un mobile à l'aide de gyroscopes et d'accéléromètres (Ишлинский А. Ю. « Об уравнениях задачи определения местоположения движущегося объекта посредством гироскопов и измерителей ускорений », ПММ, 1957, т. 21, вып. 6 (en russe)).

Dans la présente monographie, nous laissons de côté les questions de la théorie de la navigation par inertie à altitude variable au-dessus de la surface de la Terre ou, ce qui revient au même, en cas d'un mouvement quelconque du mobile dans l'espace, parce que de tels systèmes inertiels ne sont stables que lorsque l'altitude du mobile est mesurée à l'extérieur. Les équations d'un de tels systèmes sont données dans l'article de l'auteur cité ci-dessus. L'analyse de ces questions est exposée dans l'article de V. Andréev, I. Blumine, E. Devianine, D. Klimov, faisant partie du recueil « Développement de la mécanique des systèmes gyroscopiques et inertiels » (« Развитие механики гироскопических и инерциальных систем », М., « Наука », 1973 (en russe)). Voir aussi l'avant-propos de la présente monographie et les remarques sur les chapitres IV et V (p. 320).

Le cinquième chapitre commence par l'établissement des équations différentielles, mentionnées plus haut, du problème fondamental de la navigation par inertie qui consiste à déterminer les coordonnées géographiques et le cap du mobile sans avoir à tenir compte d'information provenant de l'extérieur, uniquement à partir des valeurs courantes connues des projections de la vitesse angulaire

d'un certain système de coordonnées sur les axes de ce dernier. Ce système de coordonnées est généralement lié à une plate-forme stabilisée spéciale dont le centre se déplace avec le mobile sur la surface terrestre.

Les projections de la vitesse angulaire sus-mentionnées sont élaborées à partir des indications continues des appareils gyroscopiques et des accéléromètres installés sur la plate-forme stabilisée. Pourtant, il existe aussi des navigateurs inertiels sans plate-forme stabilisée, dans lesquels les appareils gyroscopiques et les accéléromètres sont reliés directement à la structure du véhicule. Il est intéressant de noter qu'en principe on peut imaginer un système dans lequel tous les gyroscopes sont remplacés par un nombre suffisant d'accéléromètres de haute précision convenablement espacés.

Le sixième chapitre traite du passage des coordonnées géographiques aux paramètres de Rodrigues-Hamilton, lequel présente un certain intérêt lors de l'intégration des équations différentielles du problème fondamental de la navigation par inertie. Dans ce cas, le pôle géographique de la Terre cesse d'être un point singulier du système d'équations différentielles du problème et les équations elles-mêmes deviennent linéaires. Pourtant, leur nombre augmente d'une unité. En même temps, le système de nouvelles équations admet une intégrale première sous la forme algébrique simple, qui peut servir, par exemple, à contrôler la précision de la solution numérique du problème obtenue sur les calculateurs électroniques.

Les paramètres de Rodrigues-Hamilton, ainsi que leurs combinaisons à valeurs complexes, c'est-à-dire les paramètres de Cayley-Klein, sont directement utilisés dans la théorie des rotations finies du corps solide autour d'un point fixe, théorie qui est liée de façon naturelle à la projection stéréographique d'une sphère sur un plan et puis à la fonction homographique d'une variable complexe. Toutes ces questions sont étudiées dans le sixième chapitre et dans l'annexe du présent livre. A la fin du sixième chapitre, nous examinons les applications de la projection stéréographique à la navigation, celle-ci s'avérant particulièrement commode à des latitudes élevées où elle diffère peu de la projection de la sphère terrestre sur le plan tangent en son pôle géographique. L'introduction d'un cap dit de Greenwich au lieu du cap ordinaire permet de tourner ici la difficulté que l'on rencontre dans la détermination de l'orientation du mobile lors de son passage par le pôle.

Une grande importance est attachée à l'étude de la stabilité de la solution des équations différentielles du problème fondamental de la navigation par inertie, lorsque les conditions initiales sont sujettes à de faibles variations. Au début du cinquième chapitre, ce problème est résolu par une voie purement géométrique, à l'aide d'un théorème de A. Lourier sur la composition des rotations, et au sixième chapitre, à l'aide de l'algèbre des quaternions. Nous mon-

trons, tant géométriquement qu'analytiquement, comment, connaissant une solution particulière quelconque du système d'équations différentielles mentionnées ci-dessus, on peut obtenir sa solution générale contenant un nombre nécessaire de constantes arbitraires.

Dans l'annexe déjà citée, nous donnons une démonstration analytique directe de l'existence d'une correspondance biunivoque entre les rotations d'un corps solide et les fonctions homographiques d'une variable complexe. Nous mettons en évidence, au passage, le lien entre les paramètres de ces fonctions et les paramètres de Cayley-Klein.

La théorie de la navigation par inertie constitue une partie importante de la mécanique appliquée moderne. Elle connaît actuellement un développement considérable. La mise au point de nouveaux éléments sensibles et de nouveaux moyens de calcul conduit à de nouveaux schémas des systèmes de navigation par inertie et donc à de nouvelles relations mathématiques qui ne sont pas considérées dans cette monographie. De plus, on peut indiquer toute une série de questions importantes concernant directement la théorie et la pratique de la navigation par inertie, qui ne sont pas même abordées dans le présent ouvrage. Telles sont, par exemple, les questions ayant trait à la précision dynamique des systèmes d'asservissement, à l'influence des parasites aléatoires sur les éléments sensibles, au choix des paramètres optimaux des systèmes de navigation, à la classification de ces systèmes, à la dérive des gyroscopes et aux erreurs des accéléromètres par suite de l'imperfection de leur fabrication, et de nombreuses autres. Néanmoins, nous espérons que tout ce qui est exposé, analysé et étudié au cours de la présente monographie, à savoir les méthodes de résolution des problèmes relatifs à la détermination de l'orientation des mobiles commandés par des gyroscopes, les renseignements généraux sur la mécanique des éléments sensibles, gyroscopes et accéléromètres, les particularités de principe que présente la résolution des problèmes de la navigation par inertie sur la sphère terrestre, tout cela sera utile pour l'étude ultérieure de ce problème.

CHAPITRE PREMIER

PRÉCIS DE MÉCANIQUE DU MOUVEMENT RELATIF

§ 1. Mouvement relatif et forces d'inertie

Les gyroscopes sont toujours montés sur des supports mobiles, que ce soit le bord d'un navire, d'un avion, d'une fusée ou tout simplement une plate-forme située sur la Terre ou sur une autre planète. Il est clair que pour construire la théorie des gyroscopes et la théorie des autres éléments sensibles utilisés dans les systèmes de navigation par inertie il est essentiel d'avoir une idée précise des propositions fondamentales de la mécanique classique ainsi que de la différence entre les forces physiques (naturelles) et les forces d'inertie.

L'interprétation donnée ci-dessous des questions de la mécanique du mouvement relatif est apparemment partagée par de nombreuses personnes et n'est pas en contradiction quelque peu substantielle avec les traités et manuels connus de mécanique rationnelle. Néanmoins, il nous semble utile d'attirer l'attention, une fois de plus, sur le fait que les problèmes concrets relatifs à la théorie des gyroscopes et des systèmes de navigation par inertie doivent se résoudre en plein accord avec les lois générales de la mécanique classique.

Toute l'analyse faite dans cet ouvrage repose, à la base, sur les idées principales suivantes:

a) Les lois de la mécanique classique sont postulées pour le mouvement des corps par rapport à un certain système de référence « *absolu* » pour lequel peut être pris tout trièdre formé par les axes d'un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires ayant son origine au centre d'inertie de notre système solaire (c'est-à-dire de l'ensemble des corps célestes comprenant le Soleil, toutes les planètes et tous les satellites); les axes du système « absolu » ne changent pas leur orientation par rapport aux étoiles éloignées que l'on convient d'appeler étoiles fixes. On sait que dans un tel système de coordonnées les lois de la mécanique de Galilée-Newton sont rigoureusement exactes [1]).

---

[1]) On convient d'appeler *système galiléen* ou *système inertiel* tout référentiel (système de coordonnées) qui est animé d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme par rapport au système « absolu ». Il n'est pas difficile de démontrer que le mouvement des corps par rapport à tout système inertiel

b) On considère comme forces réellement existantes les seules forces qui provoquent des accélérations des points et corps matériels par rapport au système de coordonnées « absolu »[1]. Ces forces seront appelées par la suite *forces naturelles* ou *forces physiques*[2]. Elles expriment la mesure de l'interaction mécanique des corps et peuvent être de nature physique différente : forces de gravitation, forces électriques, forces magnétiques, forces d'élasticité et de plasticité, forces de résistance d'un milieu et certaines autres, par exemple force de pression de la lumière.

Une étude détaillée permet bien souvent de mettre en évidence la communauté des forces qui semblent à première vue tout à fait différentes. C'est ainsi en particulier que les forces élastiques peuvent être interprétées comme une manifestation résultante des forces électriques d'interaction des molécules ou des atomes d'un corps donné.

c) Une force physique se mesure en fin de compte par l'accélération qu'elle communique à un étalon de masse dans le système de coordonnées « absolu ». Pourtant, dans des cas concrets, elle est le plus souvent déterminée par l'intermédiaire des paramètres de position et de mouvement des corps les uns par rapport aux autres. Le problème qui consiste à établir comment la force dépend de ces paramètres est le problème de la synthèse de la loi des forces. Un exemple classique de telle synthèse est la découverte par Newton de la loi de la gravitation universelle et la découverte par Ampère de la loi de l'interaction entre un conducteur parcouru par un courant électrique et un aimant produisant un champ magnétique uniforme.

d) Il faut distinguer entre les *forces d'inertie* (v. plus loin) dites *de d'Alembert* et les forces d'inertie introduites lors de l'étude du mouvement des points matériels et des corps par rapport à des systèmes de coordonnées mobiles. Ces dernières forces seront appelées par la suite *forces d'inertie d'Euler*[3]. Les forces d'inertie de d'Alembert, de même que les forces d'inertie d'Euler ne sont pas des forces

---

obéit aux mêmes, d'après la forme, lois de Galilée-Newton. En ce sens, tous les systèmes inertiels sont équivalents (principe de relativité de Galilée; voir aussi p. 29 du présent paragraphe).

[1]) Ou, ce qui revient au même, par rapport à un système inertiel quelconque (voir la note précédente).

[2]) La définition des forces naturelles ou physiques donnée ici est en fait équivalente au principe de l'inertie ou à la première loi de Newton.

[3]) C'est un terme nouveau. Pour la première fois, Leonhard Euler utilisa les systèmes de coordonnées mobiles pour la résolution des problèmes complexes de mécanique, par exemple en théorie du mouvement d'un solide à un point fixe. (*Euler L.* « Theoria motus corporum solidorum seil rigidorum ». Rostock, Greifswald, 1765). Avant Euler, Huygens avait utilisé les systèmes de coordonnées mobiles (animés d'un mouvement de translation avec une vitesse de l'origine constante en grandeur et en direction, c'est-à-dire les systèmes nertiels) pour étudier le choc des billes.

physiques et en ce sens elles ne sont pas réelles. L'introduction de telles forces est une convention tout à fait arbitraire qui, dans certains cas, s'avère utile car elle permet d'expliquer certains phénomènes et de résoudre certains problèmes de mécanique.

e) Les forces d'inertie de d'Alembert sont introduites lors de l'étude d'un mouvement « absolu » des points matériels mutuellement liés. Elles représentent des forces imaginaires dont chacune est égale au produit de la masse du point par son accélération mais est dirigée dans le sens opposé à l'accélération. Les forces physiques agissant sur un ensemble mécanique [1]) constituent conjointement avec les forces d'inertie de d'Alembert un système de forces statiquement équilibré; ce dernier obéit aux lois de la statique. L'examen de tels systèmes de forces équilibrés se révèle utile par exemple lors de la détermination de réactions inconnues des liaisons imposées à un ensemble mécanique donné. Le mouvement de ce dernier est considéré comme s'il était donné. Des forces pareilles aux forces d'inertie de d'Alembert peuvent s'introduire également (à condition de remplacer l'accélération « absolue » par l'accélération relative) dans l'étude de la mécanique du mouvement relatif. Associées aux forces d'inertie d'Euler et aux forces physiques, de telles forces constituent, elles aussi, un système de forces équilibré.

f) Les forces d'inertie d'Euler sont différentes pour un même ensemble mécanique si le mouvement de cet ensemble est étudié par rapport à des systèmes de coordonnées mobiles différents. Un choix judicieux du système de coordonnées par rapport auquel est étudié le mouvement d'un ensemble mécanique donné permet, en règle générale, de simplifier considérablement la résolution des problèmes de mécanique. Dans tous les cas, le système de coordonnées mobile et son mouvement par rapport au système « absolu » doivent être expressément déterminés dès le début de l'étude.

g) A chaque mouvement relatif d'un ensemble de points matériels, c'est-à-dire au mouvement par rapport à un système de coordonnées mobile choisi, on peut faire correspondre le mouvement d'un ensemble mécanique identique par rapport au système de coordonnées « absolu ». Ceci étant, les valeurs courantes des coordonnées « absolues » des points de cet ensemble mécanique auxiliaire doivent être à tout instant égales aux valeurs courantes correspondantes des coordonnées relatives des points matériels de l'ensemble initial ou principal.

---

[1]) Le mot « système » se rencontre fréquemment en combinaison avec les mots « de coordonnées ». C'est pourquoi, pour éviter toute confusion, le terme « système mécanique » sera remplacé dans la suite de cet ouvrage le plus souvent par le terme « ensemble mécanique ». Ainsi, au lieu d'une proposition de type « le mouvement d'un système mécanique par rapport à un système de coordonnées mobile » nous écrirons de préférence « le mouvement d'un ensemble mécanique par rapport à un système de coordonnées mobile », etc.

Pour réaliser le mouvement « absolu » mentionné d'un tel ensemble mécanique auxiliaire, il faut reproduire non seulement les forces physiques (extérieures et intérieures) qui agissaient sur l'ensemble mécanique principal mais ajouter de nouvelles forces physiques.

Ces nouvelles forces physiques correspondent exactement aux forces d'inertie d'Euler qui interviennent dans le mouvement relatif donné de l'ensemble mécanique initial. C'est en ce sens qu'il faut accepter l'interprétation souvent donnée des forces d'inertie introduites lors de l'étude du mouvement par rapport à un système de coordonnées mobile, c'est-à-dire des forces d'inertie d'Euler. Suivant cette interprétation, les forces d'inertie sont définies comme des forces réelles agissant sur l'ensemble mécanique dans l'hypothèse où le système de coordonnées mobile est supposé fixe.

Dans ce qui suit, nous allons analyser de façon plus détaillée les lois de la mécanique classique et les propositions qui viennent d'être énumérées, et examiner quelques exemples permettant de mieux comprendre l'essentiel de la mécanique du mouvement relatif et des circonstances qui lui sont liées.

La mécanique classique, ou la mécanique de Galilée-Newton, est fondée sur quelques postulats relatifs à certaines caractéristiques quantitatives des corps en mouvement et à leurs interactions.

L'objet principal de la mécanique classique au sens étroit de ce terme, c'est-à-dire de la mécanique rationnelle, est l'étude des questions de l'équilibre et du mouvement des points matériels et des solides parfaits.

Le point matériel est le modèle le plus simple d'un corps macroscopique dont les dimensions sont si petites [1]) qu'elles peuvent être négligées dans l'étude de son mouvement. La notion de point matériel a une grande importance pour l'étude du mouvement du centre d'inertie des corps quelconques et des ensembles mécaniques. Le solide parfait est un modèle qui permet d'étudier le mouvement du centre d'inertie et la rotation des corps réels mais qui laisse absolument de côté les petites déformations des parties solides des corps et parfois aussi les déplacements considérables des parties gazeuses et liquides, par exemple de l'atmosphère des planètes.

L'étude du mouvement et de l'équilibre [2]) des corps, compte tenu de leurs déformations, se fait à l'aide de modèles plus complexes

---

[1]) Par rapport à une certaine longueur qui caractérise le phénomène étudié dans son ensemble. C'est ainsi qu'en étudiant l'influence de l'attraction mutuelle des planètes sur leur mouvement autour du Soleil on peut considérer les planètes comme points matériels. Les dimensions des planètes sont négligeables devant les distances qui les séparent et n'influent pratiquement pas sur le mouvement de leurs centres de masse.

[2]) Ici et partout plus loin on a en vue un mouvement mécanique et un équilibre mécanique à la différence, par exemple, de l'équilibre chimique d'un mélange de corps.

que l'on appelle en particulier fluide parfait, corps élastique, gaz parfait, liquide visqueux, milieu plastique, corps complexe, etc. Chacun de tels modèles reflète l'une des propriétés mécaniques du corps dont la prise en compte est essentielle pour l'étude d'un processus ou d'un phénomène donné. L'étude du mouvement des corps déformables, des liquides, des gaz et des plasmas fait l'objet de la mécanique dite des milieux continus. En mécanique des milieux continus, en plus des lois de Galilée-Newton, on doit utiliser des équations qui régissent la déformation des corps concrets (la nullité des contraintes tangentielles dans un fluide parfait, la loi de Hooke dans un corps élastique, etc.). Dans certains cas, il s'avère nécessaire d'avoir recours à des équations qui lient les paramètres mécaniques (pression, viscosité, modules d'élasticité, fonctions de posteffet, etc.) des éléments du corps à leurs paramètres chimiques et physiques (température, dégagement d'énergie, changement de structure, etc.).

Dans tous les cas pratiquement nécessaires, à de rares exceptions près, la mécanique de Galilée-Newton décrit avec une précision plus que suffisante le mouvement des corps réels dans la nature et dans les mécanismes. Ses lois permettent d'expliquer les causes et les effets de ces mouvements et, ce qui est surtout important pour les applications techniques, de calculer à l'avance le mouvement des corps s'effectuant dans différentes conditions. Il suffit d'indiquer la prédétermination de la position des planètes par rapport aux étoiles fixes, le calcul du mouvement des fusées et des véhicules spatiaux et bien entendu de la totalité des machines, des appareils et des constructions.

Les exceptions mentionnées concernent, comme nous le savons, l'étude des mouvements de petites particules (par exemple, des protons) dont les vitesses sont comparables à la vitesse de la lumière, ainsi que des mouvements au voisinage de grandes masses (par exemple, l'écart annuel supplémentaire du périhélie de Mercure). Pour la description de tels mouvements il convient d'avoir recours à la mécanique de la relativité restreinte ou à la mécanique de la relativité générale d'Einstein.

Les lois de la mécanique de la relativité restreinte se réduisent, avec une grande précision, aux lois de la mécanique classique si les vitesses des corps sont petites devant la vitesse de la lumière, par exemple sont de l'ordre de la vitesse cosmique. Il en est de même pour les lois de la mécanique de la relativité générale si, de plus, les mouvements ne sont considérés que loin de grandes masses [1]).

[1]) Dans certains cas, la nature quantique de la substance peut, elle aussi, provoquer des mouvements au sein des corps, qui ne s'accordent pas avec la mécanique classique. C'est ainsi que les microtourbillons dans l'hélium superfluide sont quantifiés, ce qui ne découle nullement des lois de l'hydrodynamique « classique ».

En mécanique classique, les concepts d'espace et de temps sont pris comme des entités absolues. Il en est de même des concepts de masse et de force. Ces notions premières ne se définissent pas, c'est-à-dire ne sont pas introduites à partir d'autres notions, mais on suppose que les valeurs des distances, les intervalles de temps, les valeurs des masses des corps distincts et les vecteurs des forces, qui sont liés à ces notions, peuvent être mesurés avec une grande précision par des méthodes physiques appropriées. On peut également fixer l'instant où un point mobile se trouve en un lieu donné de l'espace.

L'espace et le temps sont considérés en mécanique classique comme des catégories indépendantes l'une de l'autre. On admet donc que le temps s'écoule également en tous les points de l'espace et sur tous les corps en mouvement et qu'en principe on peut construire une horloge « idéale » dont la marche ne sera pas affectée par des circonstances de nature mécanique. Les indications d'une paire de telles horloges seront les mêmes indépendamment de leurs mouvements particuliers, par exemple de leur séjour prolongé, ensemble ou séparément, au voisinage ou loin des masses de l'Univers quelque grandes qu'elles soient. L'espace physique adopté en mécanique de Galilée-Newton est un espace euclidien ; on postule que dans cet espace sont valables tous les théorèmes et axiomes de la géométrie euclidienne.

Les propriétés de l'espace et du temps exposées ci-dessus distinguent radicalement la mécanique classique de Galilée-Newton de la mécanique de la relativité restreinte d'Einstein dans laquelle ces catégories sont interdépendantes et n'ont pas un caractère absolu. De plus, en mécanique de la relativité générale, l'espace doit être considéré comme non euclidien.

Le principe fondamental de la dynamique [1])

$$\frac{d}{dt}(m\bar{v}) = \bar{F} \qquad (1.1.1)$$

est postulé en mécanique classique pour le mouvement d'un point matériel de masse m et de vitesse $\bar{v}$ par rapport au système de coordonnées « absolu » [2]) qui a été introduit précédemment et sera désigné par la suite par $\xi\eta\zeta$.

Le second membre de l'égalité (1.1.1) représente le vecteur force $\bar{F}$ appliqué au point matériel considéré. Ainsi, la force $\bar{F}$ constitue la cause qui fait varier le vecteur quantité de mouvement $m\bar{v}$ du point matériel par rapport au système de coordonnées « absolu » $\xi\eta\zeta$. La force $\bar{F}$ représente en dernier ressort la mesure de l'action physique exercée sur le point matériel par d'autres corps tant de la

[1]) Ou, ce qui revient au même, la deuxième loi de Newton.
[2]) Voir aussi la note au bas de la page 11.

nature elle-même que produits par l'homme. Par la suite, la force $\bar{F}$ intervenant dans l'équation fondamentale de la dynamique (1.1.1) sera appelée *force physique* ou *force naturelle* (v. p. 12, b)) à la différence de certaines autres grandeurs qui se rencontrent en mécanique et ont les dimensions d'une force, à savoir des forces dites d'inertie.

En mécanique classique, on admet que la masse ne varie pas avec le temps et que sa valeur ne dépend ni de la vitesse du point matériel, ni de sa position dans l'espace. On a donc

$$\frac{d}{dt}(m\bar{v}) = m\bar{w}, \qquad (1.1.2)$$

où $\bar{w}$ est l'accélération du point matériel par rapport au système de coordonnées « absolu ».

Ainsi, le principe fondamental de la dynamique établit la relation mathématique

$$m\bar{w} = \bar{F} \qquad (1.1.3)$$

entre la masse m d'un point matériel, le vecteur $\bar{w}$ de son accélération par rapport au système de coordonnées « absolu » et le vecteur de la force physique $\bar{F}$.

Connaissant comment le point matériel se meut par rapport au système de coordonnées « absolu » $\xi\eta\zeta$, c'est-à-dire en supposant connues les fonctions

$$\xi = \xi(t), \quad \eta = \eta(t), \quad \zeta = \zeta(t) \qquad (1.1.4)$$

qui représentent les coordonnées du point dans ce système, on peut en général trouver, en se servant du principe fondamental de la dynamique (1.1.3), les projections, sur les axes du même système, de la force physique appliquée au point, soit :

$$F_\xi = m\frac{d^2\xi}{dt^2}, \quad F_\eta = m\frac{d^2\eta}{dt^2}, \quad F_\zeta = m\frac{d^2\zeta}{dt^2}. \qquad (1.1.5)$$

Réciproquement, si chacune des projections F_ξ, F_η et F_ζ est donnée par une fonction du temps t, des coordonnées ξ, η et ζ du point matériel, ainsi que des projections $d\xi/dt$, $d\eta/dt$ et $d\zeta/dt$ de la vitesse de ce point sur les axes du système de coordonnées « absolu » $\xi\eta\zeta$, les relations (1.1.5) deviennent des équations différentielles. Dans le cas général, l'intégration de ces équations permet de déterminer la loi du mouvement du point matériel, c'est-à-dire les fonctions $\xi(t)$, $\eta(t)$ et $\zeta(t)$. Ceci étant, on doit (aussi dans le cas général) donner les conditions initiales du mouvement du point, c'est-à-dire les valeurs des coordonnées ξ, η, ζ et de leurs dérivées par rapport au temps $d\xi/dt$, $d\eta/dt$, $d\zeta/dt$ à l'instant initial $t = t_0$.

De ce qui précède, nous pouvons conclure qu'en étudiant le mouvement par rapport au système de coordonnées « absolu », la mécanique classique a affaire uniquement aux forces physiques ou

naturelles. Considérons le cas où le point matériel est immobile dans ce système (c'est-à-dire que ses coordonnées ξ, η et ζ sont des quantités constantes) ou est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme. Dans ce cas, son accélération absolue $\overline{w}$ est nulle. Ceci signifie qu'aucune force physique ne s'exerce sur le point ou que les actions de toutes les forces appliquées au point matériel se neutralisent mutuellement.

Dans le cas de l'action simultanée de plusieurs forces $\overline{F}_k$ sur le point matériel, on postule l'égalité

$$m\overline{w} = \sum \overline{F}_k. \tag{1.1.6}$$

Dans un énoncé légèrement différent, c'est le principe de l'indépendance de l'action des forces. Tout se passe comme si chaque force composante $\overline{F}_k$ apportait au vecteur accélération $\overline{w}$ du point matériel sa contribution

$$\overline{w}_k = \frac{1}{m}\overline{F}_k \tag{1.1.7}$$

indépendamment des autres forces agissant sur ce point. Ainsi, l'égalité

$$\sum \overline{F}_k = 0 \tag{1.1.8}$$

exprime la condition que les forces appliquées au point matériel se neutralisent ou, ce qui revient au même, font équilibre, le point étant animé dans ce cas d'un mouvement rectiligne et uniforme ou restant immobile par rapport au système de coordonnées « absolu » $\zeta\eta\xi$.

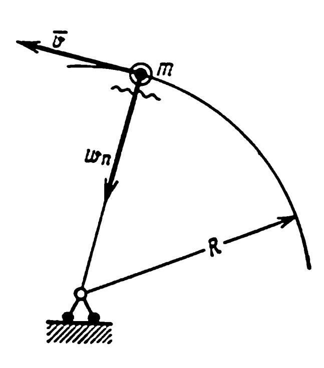


Fig. 1

Remarquons enfin qu'étant exprimées en mécanique classique, en vertu de la troisième loi de Newton, par les interactions des corps, les forces physiques doivent se rencontrer dans la nature par paires sous forme d'une action et d'une réaction, ces dernières étant d'une même intensité mais de sens contraires. L'action et la réaction sont des forces appliquées respectivement à deux corps différents mais interagissants.

Considérons maintenant à titre d'exemple d'interaction des corps le déplacement d'un point matériel de masse m à une vitesse v numériquement constante, sur une circonférence « absolument » fixe de rayon R (fig. 1). On sait que dans un tel mouvement l'accélération du point est dirigée vers le centre de la circonférence et a pour valeur

$$w_n = \frac{v^2}{R}. \tag{1.1.9}$$

Par conséquent, le point matériel effectuant un tel mouvement est soumis à l'action d'une force physique F_n dirigée, elle aussi, vers le centre de la circonférence et égale, suivant l'équation fondamentale de la dynamique, à

$$F_n = m\frac{v^2}{R}. \qquad (1.1.10)$$

L'origine de cette force que l'on appelle généralement force centripète peut être différente suivant le cas. Dans le cas d'un satellite artificiel, elle est due à l'attraction entre la masse m du satellite et la masse de la Terre. Si le satellite tourne sur une orbite circulaire à une altitude petite par rapport au rayon de la Terre $R \cong 6\,370\,000$ m, la force avec laquelle le satellite est attiré par la Terre (et la force de réaction de même valeur, c'est-à-dire l'attraction de la Terre par le satellite) est voisine du poids [1]) du satellite

$$G = mg. \qquad (1.1.11)$$

où g est l'accélération de la pesanteur, c'est-à-dire l'accélération de la chute libre des corps dans le vide par rapport à la Terre au voisinage de sa surface. A cause de la rotation de la Terre l'accélération de la pesanteur g est partout, sauf aux pôles, légèrement inférieure à la valeur de j qui est l'accélération de la force de gravitation. Cette dernière ne diffère pratiquement pas de l'accélération du même corps (plus exactement, du point matériel) en chute libre dans le vide par rapport à un système de coordonnées non tournant ayant

[1]) Le poids d'un corps se caractérise par la force de pression que ce corps exerce sur un support horizontal immobile, par rapport à la Terre, sur lequel il est placé. Un tel support peut être représenté, par exemple, par le plateau d'une balance à fléau ou à ressort après l'amortissement de leurs oscillations lors de la pesée du corps. Si le corps est suspendu par un fil sans masse et n'effectue pas d'oscillations par rapport à la Terre, la tension du fil est égale, elle aussi, au poids du corps. Lorsque la pesée se fait dans le vide, le poids est égal à la force de pesanteur mg.

La pesée d'un corps effectuée à l'aide d'une balance à ressort animée d'un mouvement quelconque par rapport à la Terre doit naturellement donner des résultats différant du poids de ce corps au repos. Cette différence est négligeable lorsque la pesée se fait dans un train en marche et même à bord d'un avion en vol horizontal. Par contre, à bord d'un avion en piquée, à bord d'une fusée ou dans un ascenseur animé d'une accélération, la pression exercée par le corps sur son support peut être plusieurs fois plus grande ou au contraire plus petite que la pesanteur. Dans un ascenseur en chute libre, cette pression peut même s'annuler complètement et le corps se comporte comme s'il était impondérable. Le même phénomène se produit à bord des satellites et des vaisseaux spatiaux après l'arrêt de leurs propulseurs.

Pour plus de détails sur cette question voir l'article *Ишлинский А. Ю.* « Классическая механика, силы инерции, невесомость » (*A. Ishlinsky* « Mécanique classique, forces d'inertie et apesanteur ») dans le recueil « Теоретическая механика во втузах » (« Mécanique rationnelle à l'école supérieure »). Изд. 2-ое. М., « Высшая школа », 1975 (en russe). Voir aussi § 4 de ce chapitre et chap. IV, § 1.

son origine au centre de masse de la Terre. L'accélération de la pesanteur présente sa valeur maximale égale à 9,83 m/s² au pôle géographique où elle coïncide avec l'accélération de la force de gravitation j, et sa valeur minimale à l'équateur où elle vaut 9,78 m/s². Pour valeur nominale de l'accélération de la pesanteur on prend sa valeur à la latitude de 45°, égale à 9,81 m/s². L'accélération de la pesanteur dépend également, mais très peu, de la longitude du milieu.

En comparant les deux dernières égalités, nous obtenons pour la première vitesse cosmique la valeur numérique suivante:

$$v_{\rm I} = \sqrt{gR} \cong 7\,900\ \text{m/s}\ ^{1)}. \qquad (1.1.12)$$

Si le point matériel en mouvement est un poids de masse m « attaché » à un centre fixe par un fil de longueur R, la force centri-

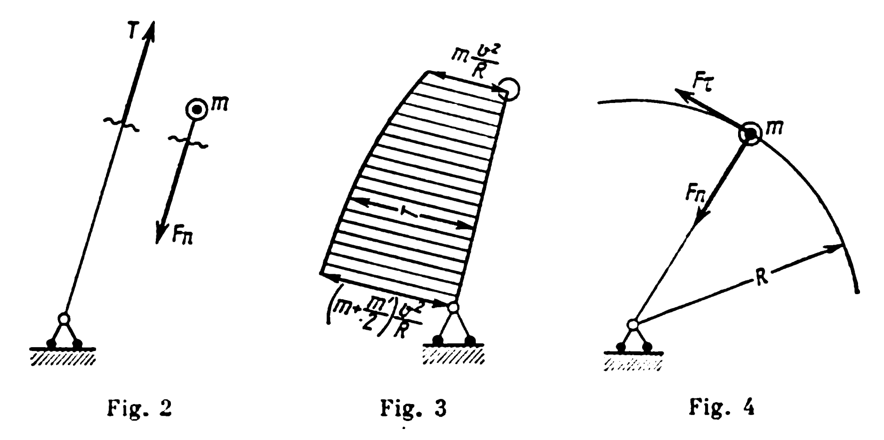


Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4

pète F_n mentionnée plus haut a pour origine l'action du fil sur le poids. En vertu de la troisième loi de Newton sur l'égalité des intensités et les sens opposés de l'action et de la réaction, le point matériel exerce sur le fil une force T de même intensité mais dirigée à partir du centre de la circonférence (fig. 2). C'est cette force qui provoque un allongement du fil.

Si la masse du fil est petite devant la masse du point matériel, la tension du fil est pratiquement la même sur toute sa longueur. Mais si sa masse est comparable à celle du point matériel, la tension du fil augmente de façon notable lorsqu'on passe de ses sections voisines du point en mouvement vers les sections situées près du centre fixe. On montre que la courbe (épure) traduisant la variation de la tension du fil est une partie de parabole (fig. 3). Il est intéressant de noter que la tension du fil près du centre fixe est dans ce cas la même que celle qui s'exercerait si, en gardant la même vites-

[1]) Animé d'une telle vitesse, un satellite effectue en 24 heures près de dix-sept révolutions complètes autour de la Terre.

se, la masse m du point matériel était augmentée de la moitié de la masse m' du fil qui le retient et le fil lui-même était remplacé par un fil imaginaire sans masse.

Remarquons que la tension du fil (et donc la force centripète F_n) peut être calculée d'après la valeur de la déformation du fil qui peut en principe se mesurer directement. Un tel calcul exige, bien entendu, que l'on connaisse la loi traduisant la déformation du fil en fonction de sa tension, c'est-à-dire la loi de la force physique mentionnée plus haut. Si le fil est fait en matériau élastique, l'allongement d'un petit morceau du fil est proportionnel à sa longueur et à la tension du fil au point considéré. C'est la loi de Hooke ou la loi de la force dite élastique.

Dans le cas où les fils sont confectionnés en un matériau qui n'est pas parfaitement élastique, les déformations des fils se décrivent par des lois plus complexes.

La résistance à la traction du fil étant limitée, si la tension est suffisamment forte, le fil finit inévitablement par se rompre. En exerçant une force supplémentaire F_τ de faible valeur, appliquée au point matériel perpendiculairement au rayon R (fig. 4), on peut augmenter progressivement la vitesse v du point en mouvement sur la surconférence. Il en résultera, en vertu de la formule (1.1.10), une croissance de la force centripète F_n, ainsi que de la force T, égale en valeur et de sens opposé, avec laquelle le point matériel agit sur le fil. C'est cette dernière force physique qui provoque la rupture du fil lorsque la vitesse du point matériel devient suffisamment grande.

En vertu du principe fondamental de la dynamique, la force $\bar{F}$ peut être déterminée d'après l'effet de son action sur le point matériel, c'est-à-dire d'après l'accélération $\bar{w}$ qu'elle imprime à ce point dans le système de coordonnées « absolu ». Un des problèmes de la mécanique est la synthèse de la loi d'une force physique concrète, c'est-à-dire l'établissement d'une expression donnant la valeur de cette force en fonction des paramètres de nature physique des corps interagissants, de leur position mutuelle et de leur mouvement relatif. Comme nous l'avons déjà dit, un exemple de telle synthèse est fourni par la conclusion de Newton sur l'attraction qui s'exerce entre les corps célestes proportionnellement au produit de leurs masses et à l'inverse du carré de leur distance, conclusion fondée sur l'analyse des lois de Kepler qui régissent le mouvement réel des planètes autour du Soleil. Le problème de synthèse des forces se posait aussi dans les cas de l'interaction élastique des corps, des actions électrique et magnétique, du frottement, de la résistance du milieu et de toute une série d'autres actions dont certaines ne sont pas encore suffisamment connues et étudiées. L'étude des lois de l'interaction des corps et en particulier l'étude des procédés de mesure des forces est un problème de nature physique.

La connaissance de la loi d'une force physique permet, en partant toujours de l'équation fondamentale de la dynamique (1.1.1), de déterminer l'accélération du point matériel dans les différents cas de son mouvement. Ceci signifie qu'il devient possible de prédire, à l'aide de méthodes mathématiques, comment ce mouvement s'effectuera en réalité et de calculer à l'avance tous ses paramètres nécessaires, c'est-à-dire de résoudre le *problème fondamental de la dynamique*.

Indiquons un exemple bien connu de résolution du problème fondamental de la dynamique. Soit un point matériel (un poids) de masse m soumis à une force F qui représente la mesure de l'action sur cette masse de la part de l'extrémité d'une barre élastique coincée dans un support fixe et écartée de sa position initiale qui est une position verticale rectiligne (fig. 5). La force obéit ici à la loi suivante. Lorsque les écarts x de l'extrémité de la barre par rapport à la verticale sont petits devant la longueur de la barre, la force F est proportionnelle à cet écart et est naturellement dirigée vers la position de l'extrémité de la barre dans laquelle cette dernière n'est pas contrainte, c'est-à-dire vers la verticale. Pour de tels écarts, on peut poser approximativement que le point matériel se déplace suivant une droite horizontale perpendiculaire à l'axe vertical de la barre non contrainte. En négligeant la masse propre de la barre (ainsi que l'influence du poids sur la flexion de la barre), nous obtenons, en vertu de l'équation fondamentale de la dynamique, la relation

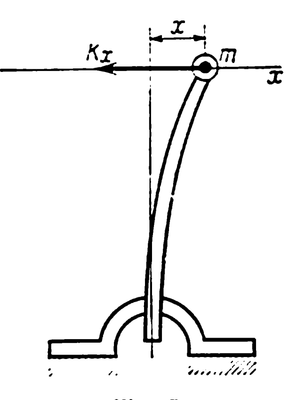


Fig. 5

$$mw = -Kx, \tag{1.1.13}$$

où K est une quantité caractérisant l'élasticité de la barre lors de sa flexion par une force, dite concentrée, appliquée à son extrémité. Dans le cas considéré on a

$$w = \frac{d^2x}{dt^2}, \tag{1.1.14}$$

et donc

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx. \tag{1.1.15}$$

La dernière égalité représente une équation différentielle qui permet, lorsqu'on connaît l'écart x du point matériel de sa position d'équilibre et sa vitesse v à un instant initial $t = t_0$, de déterminer le mouve-

ment ultérieur du point. La résolution de l'équation (1.1.15) montre que dans ce cas le point sera animé d'oscillations harmoniques régies par l'expression

$$x = x_0 \cos k(t - t_0) + \frac{v_0}{k} \sin k(t - t_0). \tag{1.1.16}$$

où x_0 et v_0 sont les valeurs de x et de v à l'instant initial t_0 et

$$k = \sqrt{\frac{K}{m}} \tag{1.1.17}$$

est la pulsation des oscillations liée à leur période T par la formule

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}. \tag{1.1.18}$$

Ainsi, tous les paramètres du mouvement peuvent être calculés à l'avance.

L'étude de phénomènes mécaniques liés à l'examen du mouvement des points matériels et des corps par rapport au système de coordonnées « absolu » s'avère dans de nombreux cas peu commode. Il est peu probable qu'il soit raisonnable de développer, par exemple, une théorie du pendule de Foucault dans le système de coordonnées « absolu » (ayant son origine au centre d'inertie du système solaire et les axes orientés vers les étoiles fixes). Un système de coordonnées dont l'origine est placée au point de suspension du pendule et les axes ne modifient leur orientation par rapport à la Terre se révèle ici incomparablement plus raisonnable et, si l'on préfère, plus naturel. Or, ce système n'est pas « absolu », il est mobile [1]).

Si dans l'équation fondamentale de la dynamique

$$m\bar{w} = \bar{F} \tag{1.1.19}$$

on entend par $\bar{w}$ l'accélération $\bar{w}^r$ du point matériel de masse m par rapport au système de coordonnées mobile et par $\bar{F}$, comme précédemment, une force physique, cette équation cesse d'être vraie. On sait qu'elle doit être remplacée dans ce cas par l'équation

$$m\bar{w}^r = \bar{F} + \bar{P} + \bar{Q}, \tag{1.1.20}$$

où $\bar{P}$ et $\bar{Q}$ sont les forces d'inertie dites d'entraînement et de Coriolis (fig. 6) données par les formules

$$\bar{P} = -m\bar{w}^e \tag{1.1.21}$$

et

$$\bar{Q} = -m\bar{w}^c. \tag{1.1.22}$$

---

[1]) Il n'est pas non plus un système de coordonnées inertiel (galiléen) parce que l'accélération de son origine par rapport au système « absolu » est non nulle et le système lui-même tourne avec la Terre.

Ici $\bar{w}^e$ et $\bar{w}^c$ sont respectivement les accélérations d'entraînement et de Coriolis du point matériel, dues au mouvement du système de coordonnées mobile choisi par rapport au système « absolu ». Dans le cas général, l'accélération d'entraînement dépend aussi de la position, alors que l'accélération de Coriolis dépend de la vitesse du point par rapport au système de coordonnées mobile [1]).

L'équation de la dynamique du mouvement relatif (1.1.20) est une conséquence directe de l'équation fondamentale de la dynamique du point mobile par rapport au système de coordonnées « absolu ». En effet, représentons l'équation fondamentale de la dynamique sous une forme légèrement modifiée

$$m\bar{w}' = \bar{F}, \qquad (1.1.23)$$

où $\bar{w}'$ est une nouvelle désignation de l'accélération du point matériel par rapport au système de coordonnées « absolu ».

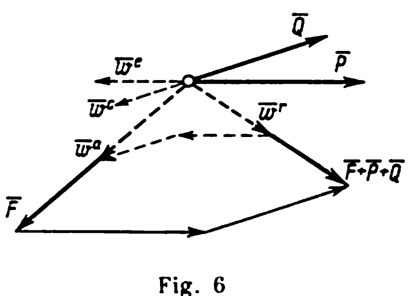


Fig. 6

Suivant les formules de la cinématique du point, on a la relation

$$\bar{w}' = \bar{w}^r + \bar{w}^e + \bar{w}^c. \qquad (1.1.24)$$

Maintenant, en tenant compte dans l'égalité (1.1.23) de la relation (1.1.24) et ensuite des formules (1.1.21) et (1.1.22), on obtient l'équation (1.1.20).

Examinons de plus près le sens physique des vecteurs: $\bar{w}^r$ de l'accélération relative, $\bar{w}^e$ de l'accélération d'entraînement et $\bar{w}^c$ de l'accélération de Coriolis. A cet effet, désignons par xyz le système de coordonnées mobile et par x, y et z les coordonnées d'un point L en mouvement par rapport à ce système.

On sait que les projections du vecteur accélération relative $\bar{w}^r$ du point sur les axes du système xyz s'expriment par les formules

$$w_x^r = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad w_y^r = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad w_z^r = \frac{d^2z}{dt^2}. \qquad (1.1.25)$$

Ces formules définissent l'accélération relative analytiquement. D'un point de vue géométrique, l'accélération relative peut être déterminée de la façon suivante. Considérons dans un système de coordonnées « absolu » auxiliaire $\xi\eta\zeta$ un point imaginaire Λ de coordonnées ξ, η, ζ telles qu'à tout instant t elles soient respectivement

[1]) Plus loin, nous donnons les formules (1.1.29), (1.1.33) pour les projections de l'accélération d'entraînement et de l'accélération de Coriolis sur les axes d'un système de coordonnées mobile, ainsi que les formules (1.1.30) et (1.1.31) qui représentent ces accélérations sous forme vectorielle.

égales aux coordonnées x, y et z du point réel L dans le système mobile xyz (fig. 7). Ainsi, pour un argument arbitraire t, on a les égalités suivantes des fonctions

$$\xi(t) = x(t), \quad \eta(t) = y(t), \quad \zeta(t) = z(t). \qquad (1.1.26)$$

Par définition, l'accélération « absolue » du point imaginaire Λ est égale à la limite du rapport de l'accroissement du vecteur vitesse du point Λ rapporté au système de coordonnées « absolu » $\xi\eta\zeta$, à

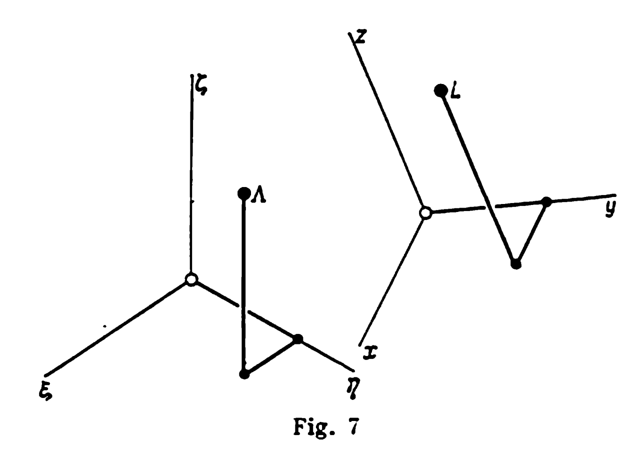


Fig. 7

l'intervalle correspondant du temps lorsque ce dernier tend vers zéro. Le choix du système de coordonnées « absolu » étant arbitraire, orientons ses axes de manière qu'à un instant $t = t_1$ ils soient parallèles respectivement aux axes du système mobile xyz (fig. 8). Au même instant, le vecteur accélération relative $\bar{w}^r$ du point réel L sera alors égal à l'accélération « absolue » du point imaginaire Λ. Par là même, l'accélération relative se définit à partir de l'accélération « absolue ». Une telle définition peut paraître un peu trop compliquée. Pourtant, elle permet d'éviter des définitions assez souvent rencontrées qui ne se prêtent pas à une interprétation rigoureuse, à savoir des définitions du type : l'accélération relative d'un point est l'accélération qu'enregistre un observateur lié au système de coordonnées mobile mais ne remarquant pas le mouvement de ce dernier. L'introduction du point imaginaire Λ sus-mentionné qui reproduit dans le système de coordonnées « absolu » $\xi\eta\zeta$ le mouvement du point réel L par rapport au système mobile xyz, sera également utile pour la suite.

Passons à la définition de l'accélération d'entraînement $\bar{w}^e$. A tout instant, par exemple à l'instant $t = t_1$, le point L occupe dans le système de coordonnées mobile xyz une position déterminée

M (fig. 9). Désignons par a, b et c les coordonnées de M. Ainsi on a

$$x(t_1) = a, \quad y(t_1) = b, \quad z(t_1) = c. \qquad (1.1.27)$$

Admettons que M est un point d'un corps solide imaginaire rigidement lié au système mobile xyz et donc effectuant avec ce système un mouvement par rapport au système « absolu ». L'accélération « absolue » de ce point du corps de coordonnées constantes a, b, c mentionnées est précisément l'accélération d'entraînement $\bar{w}^e$ du point L en mouvement dans le système de coordonnées xyz.

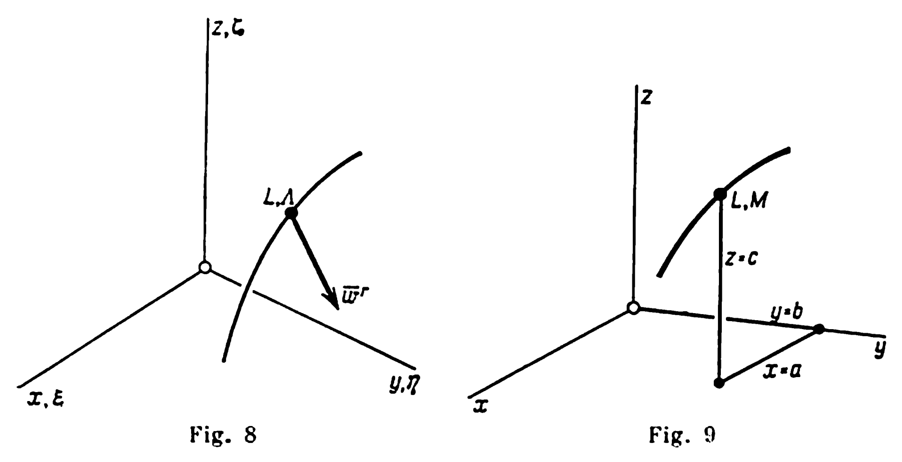


Fig. 8 Fig. 9

En cinématique du corps solide, on établit des formules pour les projections de l'accélération d'un point quelconque du corps sur les axes du système de coordonnées xyz qui lui est rigidement lié. Etant valables pour le cas le plus général du mouvement du corps solide, ces formules peuvent se présenter sous la forme

$$\begin{aligned} w_x &= w_x^0 + \frac{dq}{dt}c - \frac{dr}{dt}b + p(pa + qb + rc) - \omega^2 a, \\ w_y &= w_y^0 + \frac{dr}{dt}a - \frac{dp}{dt}c + q(pa + qb + rc) - \omega^2 b, \\ w_z &= w_z^0 + \frac{dp}{dt}b - \frac{dq}{dt}a + r(pa + qb + rc) - \omega^2 c. \end{aligned} \qquad (1.1.28)$$

Ici p, q et r sont les projections sur les axes x, y et z du vecteur vitesse angulaire $\bar{\omega}$ de ce corps, cette vitesse étant à la fois la vitesse angulaire du système de coordonnées xyz par rapport au système « absolu » [1]; w_x^0, w_y^0 et w_z^0 sont les projections sur les axes mobiles

[1] La vitesse angulaire d'un corps solide est une des grandeurs caractérisant son état physique. Elle peut être mesurée (par exemple, à l'aide de gyroscopes ou de mesureurs de forces centripètes) sans avoir recours à une information quelconque sur la position du corps par rapport au système de coordonnées « absolu ». Aussi, le terme vitesse angulaire absolue d'un corps doit-il s'employer, à la différence du terme vitesse « absolue » d'un point, sans guillemets.

x, y et z de l'accélération « absolue » de l'origine du système xyz.

Le remplacement, dans les dernières formules, des quantités a, b et c respectivement par les coordonnées courantes x, y et z nous conduit aux expressions suivantes pour les projections de l'accélération d'entraînement $\bar{w}^e$ du point L en mouvement par rapport au système de coordonnées mobile xyz:

$$\begin{aligned} w_x^e &= w_x^0 + \frac{dq}{dt} z - \frac{dr}{dt} y + p(px+qy+rz) - \omega^2 x, \\ w_y^e &= w_y^0 + \frac{dr}{dt} x - \frac{dp}{dt} z + q(px+qy+rz) - \omega^2 y, \\ w_z^e &= w_z^0 + \frac{dp}{dt} y - \frac{dq}{dt} x + r(px+qy+rz) - \omega^2 z. \end{aligned} \tag{1.1.29}$$

Signalons que la forme vectorielle de l'accélération d'entraînement est

$$\bar{w}^e = \bar{w}^0 + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega}(\bar{\omega}\cdot\bar{r}) - \omega^2 \bar{r}. \tag{1.1.30}$$

Ici, $\bar{w}^0$ est le vecteur accélération « absolue » de l'origine du système xyz, $\bar{\omega}$ est, comme précédemment, le vecteur vitesse angulaire absolue de ce système et $\bar{r}$ est le rayon vecteur du point mobile L rapporté au même système de coordonnées xyz, c'est-à-dire le vecteur dont les projections sur les axes de ce système sont les variables $x = x(t)$, $y = y(t)$ et $z = z(t)$; le signe $\times$ dans la formule (1.1.30) désigne comme à l'ordinaire le produit vectoriel et le point, le produit scalaire.

Enfin, l'accélération de Coriolis s'exprime sous la forme vectorielle par

$$\bar{w}^c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}^r, \tag{1.1.31}$$

où $\bar{v}^r$ est le vecteur vitesse relative du point L par rapport au système de coordonnées mobile xyz, c'est-à-dire le vecteur dont les projections sur les axes de ce système sont

$$v_x^r = \frac{dx}{dt}, \quad v_y^r = \frac{dy}{dt}, \quad v_z^r = \frac{dz}{dt}, \tag{1.1.32}$$

et que l'on peut définir géométriquement en procédant de la même façon que cela a été fait un peu plus haut pour le vecteur accélération relative $\bar{w}^r$.

Les projections de l'accélération de Coriolis $\bar{w}^c$ sur les axes du système mobile xyz, s'expriment par les formules

$$\begin{aligned} w_x^c &= 2(qv_z^r - rv_y^r), \\ w_y^c &= 2(rv_x^r - pv_z^r), \\ w_z^c &= 2(pv_y^r - qv_x^r). \end{aligned} \tag{1.1.33}$$

L'accélération de Coriolis peut s'interpréter comme une somme géométrique de deux composantes. La première de ces composantes est représentée par la partie de la dérivée par rapport au temps du vecteur $\bar{v}^r$ (c'est-à-dire du vecteur vitesse relative du point L) qui est due à la rotation du vecteur $\bar{v}^r$ avec le système de coordonnées mobile. La seconde est aussi une partie de la dérivée mais cette fois du vecteur vitesse d'entraînement $\bar{v}^e$, qui prend naissance par suite de la variation de ce vecteur lorsque le point L se déplace par rapport au système de coordonnées mobile d'une position dans une autre. Les deux composantes de l'accélération de Coriolis sont rigoureusement identiques.

Ainsi, l'équation fondamentale de la dynamique du mouvement relatif (1.1.20) contient dans son second membre, en plus de la force physique $\bar{F}$, encore deux forces d'inertie d'Euler, à savoir: la force d'entraînement $\bar{P}$ et la force de Coriolis $\bar{Q}$. Ces forces d'inertie ne sont pas des forces physiques et en ce sens elles sont fictives. En effet, elles dépendent exclusivement des circonstances de nature cinématique liées au choix d'un système de coordonnées mobile concret et ne reflètent pas l'interaction d'un point matériel donné avec les autres corps. En particulier, on ne peut pas leur faire correspondre les forces de réaction. Ceci signifie que le principe de l'action et de la réaction (troisième loi de Newton) ne s'applique pas à ces forces. C'est pourquoi les forces d'inertie d'Euler sont souvent appelées *pseudo-forces* [1]).

Les forces d'inertie d'Euler peuvent varier radicalement lorsqu'un système de coordonnées mobile est remplacé par un autre. Par exemple, si le système de coordonnées mobile est animé d'un mouvement de translation, c'est-à-dire si sa vitesse angulaire par rapport au système «absolu» (vitesse angulaire absolue) est nulle, la force d'inertie de Coriolis disparaît complètement et la force d'inertie d'entraînement d'un point matériel quelconque ne dépend pas de la position qu'il occupe dans le système de coordonnées mobile. En particulier, dans le cas d'un tel système de coordonnées, les forces d'inertie d'entraînement des parties élémentaires d'un corps continu sont parallèles ; leur résultante est égale au produit de la masse totale du corps par l'accélération « absolue » de l'origine du système mobile. Quelle que soit l'orientation du corps, cette résultante passe par le centre d'inertie de ce corps. De tels systèmes en mouvement de translation se révèlent bien commodes pour l'étude des questions théoriques de la mécanique des systèmes gyroscopiques.

Examinons de plus près des systèmes de coordonnées mobiles en translation dont les origines et donc tous les points de coordonnées

---

[1]) Voir *Feynman R. P., Leighton R. B., Sands M.* « The Feynman lectures on physics ». Vol. I. Reading (Mass.), Addison-Wesley Publ., 1963.

constantes dans ces systèmes sont animés d'un mouvement rectiligne et uniforme par rapport au système de coordonnées « absolu » (c'est-à-dire se meuvent avec une accélération « absolue » nulle). Ce sont des systèmes de coordonnées dits galiléens ou encore, comme les physiciens les appellent, les systèmes de référence galiléens (en incluant dans les systèmes de référence le temps « local »). Dans de tels systèmes mobiles sont nulles non seulement les forces d'inertie de Coriolis mais encore les forces d'inertie d'entraînement. Par conséquent, l'équation fondamentale de la dynamique (1.1.20) pour les systèmes galiléens coïncide en forme avec l'équation fondamentale de la dynamique (1.1.23) pour le mouvement rapporté au système de coordonnées « absolu ». Ceci signifie que le système « absolu » ne présente pas d'avantages particuliers qui ne soient propres qu'à lui. Tout système de coordonnées galiléen lui est parfaitement équivalent. Lors de l'étude du mouvement rapporté à un système galiléen arbitrairement choisi, toutes les lois de la mécanique et leurs corollaires ont une forme identique. Les systèmes galiléens sont souvent appelés systèmes inertiels.

L'appellation de système « galiléen » donnée au système de coordonnées inertiel sert plutôt à rendre immortel le nom du génial savant que de refléter le fait que ce système fut proposé par Galilée lui-même sous la forme telle que nous l'entendons de nos jours. Dans ses célèbres *Discorsi*, Galilée admet qu'à l'intérieur d'un navire animé d'un mouvement uniforme effectué dans une même direction, tous les phénomènes mécaniques, y compris la chute des corps, ne se distinguent pas des phénomènes analogues qui se produisent à l'intérieur d'un navire immobile, rangé le long du quai. Pourtant, la forme sphérique de la Terre et le fait de sa rotation étaient bien connus de Galilée. Ainsi, Galilée adoptait pour système de coordonnées inertiel, dans le sens moderne de ce mot, un système gravitant uniformément autour de la Terre suivant le grand cercle. Par conséquent, d'après Galilée, la portée d'un boulet de canon devait être la même, qu'il soit tiré, sous un même angle par rapport à l'horizon, vers l'est ou vers l'ouest : $l_E = l_W$ (fig. 10) et les corps en chute ne devaient pas s'écarter de la verticale [1]) vers l'est.

Revenons au cas général des systèmes de coordonnées mobiles, c'est-à-dire aux systèmes non inertiels, et à l'équation fondamentale de la dynamique (1.1.20) qui décrit le mouvement du point matériel par rapport à de tels systèmes. Ainsi qu'on l'a dit plus haut, la mécanique du mouvement relatif diffère, en vertu de l'équation (1.1.23), de la mécanique du mouvement « absolu » (ainsi que de la

---

[1]) Il est intéressant de noter que Galilée était près de découvrir la première vitesse cosmique en se demandant si un boulet de canon tiré dans la direction horizontale tombera toujours sur la Terre (en l'absence de toute résistance de l'air au mouvement du boulet). Hélas! Il avait commis des erreurs dans le calcul des infiniment petits.

mécanique du mouvement rapporté au système galiléen) par la nécessité de tenir compte, outre les forces physiques, des pseudo-forces, c'est-à-dire des forces d'inertie d'Euler : de la force d'entraînement et de la force de Coriolis. On doit évidemment tenir compte des forces d'inertie d'Euler de tous les points matériels et de toutes les parties élémentaires des corps continus, qui constituent l'ensemble mécanique considéré.

On peut proposer la définition suivante des forces d'inertie d'Euler. Par un procédé analogue à celui exposé plus haut à propos de

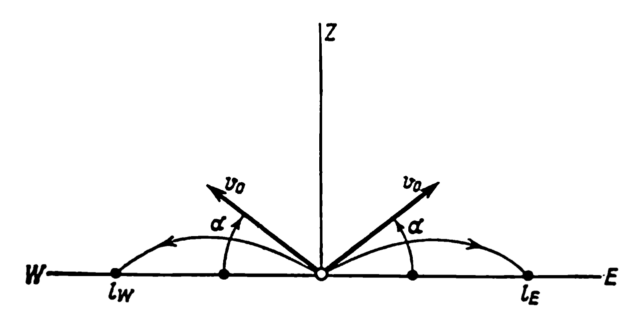


Fig. 10

la définition de l'accélération relative, considérons un ensemble mécanique auxiliaire tout à fait identique, d'après la répartition de ses masses, à l'ensemble mécanique principal. Supposons que cet ensemble auxiliaire effectue un mouvement par rapport à un système de coordonnées « absolu » $\xi\eta\zeta$ arbitrairement choisi, qui est le même que celui dont est animé l'ensemble mécanique principal par rapport au système mobile donné xyz. Ainsi, à un point matériel quelconque (resp. à une partie élémentaire quelconque du corps continu) de l'ensemble mécanique principal, de coordonnées courantes $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ correspond un point matériel (resp. une partie élémentaire du corps continu) de l'ensemble mécanique auxiliaire, de même masse et de coordonnées $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$. Ceci étant, on a de plus

$$\xi(t) = x(t), \quad \eta(t) = y(t), \quad \zeta(t) = z(t). \tag{1.1.34}$$

Supposons également que tous les points matériels et toutes les parties élémentaires des corps continus de l'ensemble mécanique auxiliaire sont soumis à des forces physiques (extérieures et intérieures) qui sont les mêmes que celles agissant sur l'ensemble mécanique principal, c'est-à-dire à des forces de même intensité, appliquées aux mêmes points et orientées par rapport aux axes du système de coordonnées « absolu » $\xi\eta\zeta$ exactement de la même façon que par rapport au système mobile xyz.

Pour que le mouvement de l'ensemble mécanique auxiliaire par rapport au système de coordonnées « absolu » $\xi\eta\zeta$ reproduise exactement le mouvement de l'ensemble mécanique principal par rapport au système de coordonnées mobile xyz, il est nécessaire, dans le cas général, d'appliquer à l'ensemble mécanique auxiliaire, en plus des forces physiques agissant sur l'ensemble mécanique principal, encore des forces supplémentaires. Le mouvement étant considéré par rapport au système de coordonnées « absolu », ces forces supplémentaires ne peuvent être que des forces physiques. Il est évident qu'elles correspondent exactement aux forces d'inertie d'Euler.

Ainsi, les forces d'inertie d'Euler sont égales à des forces physiques qu'on doit ajouter aux forces physiques initiales pour reproduire le mouvement relatif d'un ensemble mécanique quelconque comme un mouvement absolu. Signalons en particulier que les efforts intérieurs dans les corps de l'ensemble mécanique auxiliaire seront exactement les mêmes que dans les corps de l'ensemble principal.

Une telle définition des forces d'inertie d'Euler rend inutiles des raisonnements peu clairs, mais qui se rencontrent néanmoins, à savoir: les forces d'inertie doivent être considérées comme des forces ordinaires pour un observateur se déplaçant avec le système de coordonnées mobile mais le considérant comme immobile.

Pour en terminer avec cette question, examinons la forme que prennent les équations du mouvement d'un point matériel rapportées à un système de coordonnées dit « tombant » qui a une importance considérable tant pour les questions théoriques que pour les applications. Introduisons un système de coordonnées en translation $\xi^*\eta^*\zeta^*$ dont l'origine est placée au centre de masse d'un corps de petites dimensions (par exemple d'un satellite artificiel) qui se meut dans l'espace cosmique (fig. 11). Le mouvement d'un tel corps s'effectue sous l'action des forces d'attraction exercées par tous les corps de notre système solaire, c'est-à-dire par le Soleil, la Terre, la Lune, les grandes et petites planètes et leurs satellites. Désignons par $\bar{f}$ le vecteur de la force d'attraction globale appliquée à l'unité de masse du corps considéré et soit M la masse de ce dernier. Les dimensions du corps étudié étant petites devant la distance aux centres de masse des corps célestes du système solaire, on peut admettre que toutes les forces d'attraction appliquées à ses parties élémentaires sont parallèles. Ainsi donc, l'équation du mouvement du centre de masse du corps, rapportée au système de coordonnées « absolu » $\xi\eta\zeta$, s'écrira sous la forme

$$M\bar{w}^0 = M\bar{f}. \tag{1.1.35}$$

Ici $\bar{w}^0$ est l'accélération « absolue » de l'origine du système $\xi^*\eta^*\zeta^*$, c'est-à-dire l'accélération par rapport au système $\xi\eta\zeta$. Il est évident que

$$\bar{w}^0 = \bar{f}. \tag{1.1.36}$$

Soit un point matériel de masse m en mouvement au voisinage immédiat du corps considéré. D'après ce qui a été établi plus haut, l'équation du mouvement relatif de ce point par rapport au système de coordonnées mobile $\xi^*\eta^*\zeta^*$ s'écrit sous la forme

$$m\bar{w}^r = \bar{F} + \bar{P} + \bar{Q}. \qquad (1.1.37)$$

Ici $\bar{F}$ est la force d'attraction du point matériel par les corps du système solaire, $\bar{P}$ la force d'inertie d'entraînement et $\bar{Q}$ la force d'inertie de Coriolis.

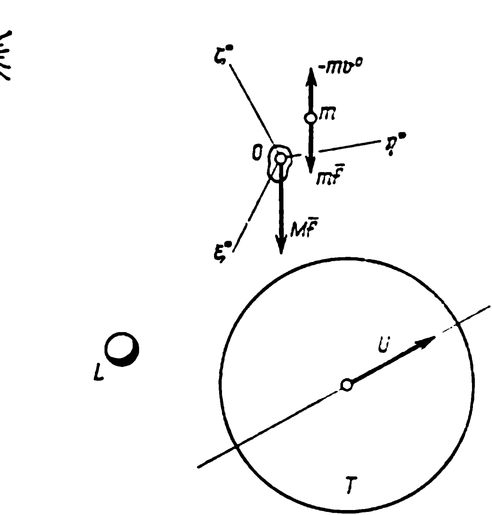


Fig. 11

Dans le cas considéré, la force de gravitation $\bar{F}$ s'exprime avec une grande précision par la formule

$$\bar{F} = m\bar{f}. \qquad (1.1.38)$$

En déterminant la force d'inertie d'entraînement

$$\bar{P} = -m\bar{w}^e \qquad (1.1.39)$$

il faut tenir compte du fait que par hypothèse le système de coordonnées $\xi^*\eta^*\zeta^*$ est animé d'un mouvement de translation. Par suite,

$$\bar{w}^e = \bar{w}^0. \qquad (1.1.40)$$

La force d'inertie de Coriolis $\bar{Q}$ n'existe pas dans le cas considéré. En effet,

$$\bar{Q} = -2m\bar{\omega}^* \times \bar{v}^r, \qquad (1.1.41)$$

où $\bar{\omega}^*$ est la vitesse angulaire du système $\xi^*\eta^*\zeta^*$. Or, $\bar{\omega}^*$ est nulle.

Compte tenu des formules (1.1.38) à (1.1.40), ainsi que du fait que la force $\bar{Q}$ est nulle, l'équation (1.1.37) se ramène à la forme

$$m\bar{w}^r = m\bar{f} - m\bar{w}^0. \tag{1.1.42}$$

En vertu de l'égalité (1.1.36), le second membre de la dernière équation est nul. Il en résulte que

$$\bar{w}^r = 0, \quad \bar{v}^r = \text{const.} \tag{1.1.43}$$

Ainsi, dans le cas où l'on néglige l'action de la masse M sur le point matériel m, ce dernier doit être animé d'un mouvement rectiligne uniforme par rapport au système de coordonnées $\xi^*\eta^*\zeta^*$. En particulier, si à l'instant initial la vitesse relative $\bar{v}^r$ est nulle, le point considéré sera, par rapport à ce système, à l'état de repos relatif.

Le système de coordonnées $\xi^*\eta^*\zeta^*$ ainsi introduit est dit *tombant* [1]). Il ne doit pas, bien entendu, tomber sur la Terre avec le corps de masse M qui le porte, ou sur un autre corps céleste quelconque. Une telle appellation est conventionnelle. L'origine d'un tel système peut être placée, par exemple, au centre de masse d'un vaisseau spatial ou d'une fusée si leurs propulseurs sont à l'arrêt [2]). Le système de coordonnées tombant peut être lié, avec une certaine approximation, à un ascenseur lourd réellement tombant ou à un avion effectuant pendant un certain temps un mouvement programmé exactement le même que celui qu'il aurait en l'absence de l'atmosphère et les moteurs mis à l'arrêt. Dans les systèmes de coordonnées tombants, le mouvement relatif des corps s'effectue de manière comme si ces corps étaient dépourvus de la pesanteur, c'est-à-dire comme s'ils étaient « impondérables ».

Enfin, plaçons l'origine du système de coordonnées $\xi^*\eta^*\zeta^*$ au centre de la Terre. D'après ce qui précède, nous pouvons conclure que le mouvement des corps (par exemple, d'un pendule de Foucault ou d'un projectile) par rapport à ce système s'effectue pratiquement de la même façon comme si ce système était « absolu » et l'attraction des corps par le Soleil, la Lune et les autres corps célestes (excepté la Terre) était nulle.

§ 2. Pendule composé imperturbable

Un exemple utile illustrant les lois de la mécanique du mouvement relatif (v. paragraphe précédent) est fourni par l'étude du problème concernant le mouvement d'un pendule composé dont le

---

[1]) Voir « Inertial guidance ». Ed. by *Pittman G. R.* London, 1962.

[2]) Le cas où les propulseurs d'une fusée ou d'un vaisseau cosmique fonctionnent conduit à une étude, importante pour la pratique, du mouvement et de l'équilibre des corps par rapport à un système de coordonnées en translation dont l'origine est animée d'un mouvement accéléré avec le centre de masse de la fusée ou du vaisseau (voir plus loin théorie de l'accéléromètre, chap. IV, § 1).

point de suspension se déplace sur une sphère non tournante S, concentrique à la sphère terrestre [1]). Négligeons l'influence que l'attraction due au Soleil, à la Lune et aux autres corps célestes a sur le mouvement du pendule. En conséquence, prenons pour système « absolu » un système de coordonnées $\xi\eta\zeta$ d'origine placée au centre commun de la Terre et de la sphère S et d'axes de directions fixes par rapport aux étoiles. Supposons que la Terre est une sphère à répartition radiale de la densité (ne dépendant que de la distance au centre de la Terre ou ayant, en particulier, une valeur constante). Sous ces hypothèses, l'attraction que la Terre exerce sur la masse du pendule est pratiquement équivalente à une seule force $\overline{F}$ passant par le centre de gravité du pendule et le centre de la Terre. Négligeons également le frottement dans le dispositif de suspension du pendule et l'influence du milieu ambiant. Le pendule sera considéré comme un corps solide parfait.

Désignons par x, y et z les axes d'inertie principaux de la masse du pendule, qui passent par son point de suspension ; ces axes forment un système de coordonnées xyz rigidement lié au pendule. Proposons-nous d'établir les équations du mouvement du pendule étudié, rapportées à un système de coordonnées $\xi^*\eta^*\zeta^*$ se déplaçant en translation (et donc non tournant) et ayant son origine au point de suspension du pendule. D'après ce qui a été établi au § 1 du présent chapitre, ces équations différeront des équations d'Euler bien connues qui traduisent le mouvement d'un solide à un point fixe par rapport à un système de coordonnées « absolu »:

$$
\begin{aligned}
A\frac{dp}{dt}+(C-B)\,qr&=M_x,\\
B\frac{dq}{dt}+(A-C)\,rp&=M_y,\\
C\frac{dr}{dt}+(B-A)\,pq&=M_z.
\end{aligned}
\qquad (1.2.1)
$$

En effet, leurs seconds membres M_x, M_y et M_z doivent comporter, en plus des moments par rapport aux axes x, y et z de la force de gravitation $\overline{F}$, encore des moments correspondants des forces d'inertie d'Euler. Ces dernières sont composées, dans le cas général, des forces d'inertie d'entraînement et des forces d'inertie de Coriolis. Or, le système $\xi^*\eta^*\zeta^*$, par rapport auquel sont établies les équations du mouvement du pendule, est animé d'un mouvement de translation

[1]) L'introduction d'une telle sphère S se révèle utile dans de nombreux cas où l'on étudie le mouvement des systèmes gyroscopiques et inertiels. Les équations du mouvement établies par rapport à une sphère qui ne participe pas à la rotation de la Terre, prennent la forme la plus simple. Ceci est vrai surtout en ce qui concerne la théorie du compas gyroscopique, du pendule gyroscopique de Schüler-Boulgakov, du pendule composé imperturbable, ainsi que le problème fondamental de la navigation par inertie.

et sa vitesse angulaire absolue ω^* est nulle. Par suite, comme il a été indiqué au paragraphe précédent, les forces d'inertie de Coriolis sont dans ce cas nulles, alors que les forces d'inertie d'entraînement des masses élémentaires du pendule se réduisent à une seule force $\bar{P}$ passant par son centre de masse. Cette dernière force est égale au produit de la masse m du pendule par l'accélération $\bar{w}$ de son point de suspension, c'est-à-dire de l'origine du système $\xi^*\eta^*\zeta^*$ mobile par rapport au système « absolu » $\xi\eta\zeta$ introduit plus haut. La force $\bar{P}$ est parallèle au vecteur $\bar{w}$ de l'accélération mentionnée mais est orientée en sens inverse, soit

$$\bar{P} = -m\bar{w}. \tag{1.2.2}$$

Remplaçons les seconds membres des équations (1.2.1) par les sommes des moments des forces $\bar{F}$ et $\bar{P}$ respectivement par rapport aux axes x, y et z: les équations du mouvement du pendule prennent la forme suivante:

$$\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} + (C-B)\,qr &= y_c(F_z + P_z) - z_c(F_y + P_y), \\ B\frac{dq}{dt} + (A-C)\,rp &= z_c(F_x + P_x) - x_c(F_z + P_z), \\ C\frac{dr}{dt} + (B-A)\,pq &= x_c(F_y + P_y) - y_c(F_x + P_x). \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

Ici x_c, y_c, z_c sont les coordonnées du centre de masse du pendule dans le système xyz lié au pendule; F_x, F_y, F_z et P_x, P_y, P_z sont les projections respectives sur les axes x, y et z de la force de gravitation $\bar{F}$ et de la résultante $\bar{P}$ des forces d'inertie d'entraînement; A, B et C sont, comme précédemment, les moments d'inertie principaux de la masse du pendule ou, ce qui revient au même, les moments d'inertie par rapport aux axes d'inertie principaux x, y et z; enfin, p, q, r sont les projections, sur les mêmes axes, de la vitesse angulaire $\bar{\omega}$ du pendule et du système de coordonnées xyz qui lui est lié (par rapport au système de coordonnées non tournant $\xi^*\eta^*\zeta^*$ ou, ce qui revient au même, par rapport au système « absolu » $\xi\eta\zeta$).

Dans ce qui suit, nous nous contenterons d'examiner le cas d'un pendule dont le centre de masse est situé dans la partie négative de l'axe z qui est à la fois l'axe de symétrie dynamique (fig. 12). Par conséquent, dans les équations (1.2.3), posons

$$A = B \tag{1.2.4}$$

et

$$x_c = y_c = 0, \quad z_c = -l, \tag{1.2.5}$$

où l est la distance entre le point de suspension et le centre de masse du pendule.

Les équations (1.2.3) prennent la forme suivante:

$$A\frac{dp}{dt}+(C-A)\,qr=l\,(F_y+P_y),$$
$$A\frac{dq}{dt}+(A-C)\,rp=-l\,(F_x+P_x), \qquad (1.2.6)$$
$$C\frac{dr}{dt}=0.$$

La dernière des équations (1.2.6) permet de conclure que quel que soit le mouvement effectué par le point de suspension du pendule, la projection de sa vitesse angulaire sur l'axe de symétrie dynamique reste inchangée au cours du temps, c'est-à-dire que

$$r = \text{const.} \qquad (1.2.7)$$

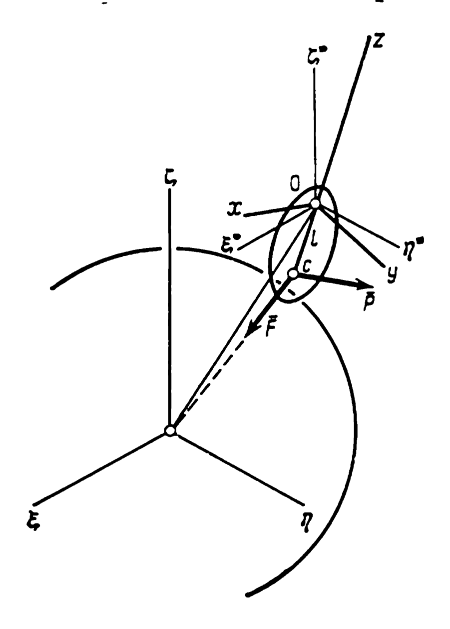


Fig. 12

Traitons dans ce paragraphe un problème particulier concernant le comportement d'un pendule composé dont le point de suspension se déplace sur la sphère S. A savoir, proposons-nous d'établir les conditions sous lesquelles l'axe z de symétrie dynamique d'un pendule à point de suspension mobile passe invariablement par le centre de la Terre.

Supposons que les paramètres du pendule: les moments d'inertie principaux $A=B$ et C, la masse m et la distance l de son centre de masse à son point de suspension, ainsi que les conditions initiales du mouvement du pendule et enfin le caractère du mouvement de son point de suspension sur la sphère S sont tels que l'axe z passe effectivement tout le temps par le centre de la Terre. Dans ce cas, en plus de la condition (1.2.7), les deux premières équations (1.2.6) doivent également se transformer en identités. Dans ces équations, les projections F_x et F_y de la force de gravitation doivent maintenant être posées nulles parce que cette force passe par le centre de masse du pendule et par le centre de la Terre et donc est dirigée suivant l'axe z. Compte tenu de cette remarque, les équations men-

tionnées (1.2.6) deviennent

$$A\frac{dp}{dt} + (C-A)\,qr = lP_y,$$
$$A\frac{dq}{dt} + (A-C)\,rp = -lP_x, \qquad (1.2.8)$$

où r est une constante, comme il en résulte de l'intégrale première (1.2.7).

Déterminons maintenant les composantes P_x et P_y de la résultante des forces d'inertie d'entraînement en utilisant à cet effet la formule (1.2.2). Remarquons tout d'abord que dans le cas considéré le système de coordonnées xyz lié au pendule se déplace de manière que les axes x et y sont tangents à la sphère S et que l'axe z est le prolongement du rayon R mené du centre de cette sphère vers le point de suspension du pendule. Ainsi, les axes x, y et z peuvent être considérés comme des arêtes d'un trièdre de Darboux se déplaçant sur la sphère S [1]).

Désignons par v_x, v_y, v_z et w_x, w_y, w_z les projections respectives sur les arêtes x, y, z de la vitesse et de l'accélération, par rapport au système de coordonnées « absolu » $\xi\eta\zeta$, du sommet du trièdre de Darboux, c'est-à-dire de l'origine du système xyz qui coïncide avec le point de suspension du pendule et avec l'origine du système mobile non tournant $\xi^*\eta^*\zeta^*$.

Pour l'analyse qui suit il faut avoir des formules exprimant les projections de la vitesse $\bar{v}$ et de l'accélération $\bar{w}$ du sommet du trièdre de Darboux sur ses arêtes par l'intermédiaire des projections sur les mêmes arêtes de sa vitesse angulaire $\bar{\omega}$. Proposons-nous d'établir ces formules. Si l'on associe au trièdre de Darboux un corps solide, il se trouve que ce corps, s'il a des dimensions appropriées, possède toujours un point fixe quel que soit le caractère du mouvement du sommet du trièdre sur la sphère S. Ce point se confond avec le centre commun de la sphère S et de la Terre. Il se situe à une distance égale au rayon R de la sphère S au sommet du trièdre dans la partie négative de l'axe z.

Introduisons un système de coordonnées $x'y'z'$ ayant son origine au centre de la Terre et ses axes x' et y' parallèles respectivement aux arêtes x et y du trièdre. L'axe z' de ce système est dirigé suivant le même rayon de la sphère S que l'arête z. Il est évident que la vitesse angulaire $\bar{\omega}'$ du nouveau système de coordonnées $x'y'z'$ est la même que celle du trièdre xyz. L'origine du système $x'y'z'$ étant

---

[1]) En étudiant la géométrie des surfaces gauches, Darboux introduisit un trièdre mobile dont le sommet se déplace sur la surface considérée et l'une des faces est tangente à cette surface. (Voir *Darboux G.* « Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal ». P. I. Paris, Gauthier-Villars, 1891-1914.)

immobile, on a pour les projections $v_{x'}$, $v_{y'}$, $v_{z'}$ sur les axes x', y', z' de la vitesse de tout point du corps solide lié à ce système et par conséquent, au trièdre de Darboux, les formules d'Euler suivantes:

$$\begin{aligned} v_{x'} &= \omega'_{y'} z' - \omega'_{z'} y', \\ v_{y'} &= \omega'_{z'} x' - \omega'_{x'} z', \\ v_{z'} &= \omega'_{x'} y' - \omega'_{y'} x'. \end{aligned} \tag{1.2.9}$$

Ici x', y' et z' sont les coordonnées d'un point quelconque du corps solide mentionné dans le système $x'y'z'$, et $\omega'_{x'}$, $\omega'_{y'}$ et $\omega'_{z'}$ sont les projections de sa vitesse angulaire $\bar{\omega}'$ sur les axes de ce système.

Comme les axes x', y', z' sont respectivement parallèles aux arêtes x, y et z, on a évidemment

$$\begin{aligned} &v_{x'} = v_x, \quad v_{y'} = v_y, \quad v_{z'} = v_z, \\ &\omega'_{x'} = p, \quad \omega'_{y'} = q, \quad \omega'_{z'} = r. \end{aligned} \tag{1.2.10}$$

Posons maintenant dans les formules (1.2.9) $x' = y' = 0$ et $z' = R$, ce qui correspond aux coordonnées du sommet du trièdre de Darboux dans le système $x'y'z'$. Il en résulte, compte tenu des formules (1.2.10), que

$$v_x = qR, \quad v_y = -pR, \quad v_z = 0. \tag{1.2.11}$$

Au point de vue géométrique, l'accélération est le vecteur vitesse, par rapport à un système de coordonnées fixe, de l'extrémité du vecteur vitesse du point mobile à condition que l'origine de ce vecteur soit confondue avec l'origine du système mentionné. Quant aux projections $w_{x'}$, $w_{y'}$, $w_{z'}$ de l'accélération du point en mouvement sur les axes du système de coordonnées mobile $x'y'z'$, elles s'expriment par les formules

$$\begin{aligned} w_{x'} &= \frac{dv_{x'}}{dt} + \omega'_{y'} v_{z'} - \omega'_{z'} v_{y'}, \\ w_{y'} &= \frac{dv_{y'}}{dt} + \omega'_{z'} v_{x'} - \omega'_{x'} v_{z'}, \\ w_{z'} &= \frac{dv_{z'}}{dt} + \omega'_{x'} v_{y'} - \omega'_{y'} v_{x'}. \end{aligned} \tag{1.2.12}$$

Les dérivées $dv_{x'}/dt$, $dv_{y'}/dt$ et $dv_{z'}/dt$ qui apparaissent aux seconds membres de ces formules caractérisent une partie de la vitesse de l'extrémité du vecteur vitesse, qui est due à la variation de la valeur de ce vecteur et à celle de son orientation par rapport au système de coordonnées mobile $x'y'z'$. Les autres termes caractérisent une autre partie de la vitesse de l'extrémité du vecteur vitesse, provoquée par la rotation du système $x'y'z'$. Il n'est pas difficile de voir que les derniers termes s'obtiennent à partir des seconds mem-

bres des formules (1.2.9) si l'on y remplace les coordonnées x', y' et z' respectivement par les projections de la vitesse $v_{x'}$, $v_{y'}$ et $v_{z'}$.

En tenant compte dans les formules (1.2.12) des égalités (1.2.10) et (1.2.11), nous obtenons, pour les projections de l'accélération du sommet du trièdre xyz sur ses arêtes, les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} w_x &= R\left(\frac{dq}{dt} + pr\right), \\ w_y &= -R\left(\frac{dp}{dt} - qr\right), \\ w_z &= -R\,(p^2 + q^2). \end{aligned} \tag{1.2.13}$$

On a, bien entendu, dans ce cas

$$w_{x'} = w_x, \quad w_{y'} = w_y, \quad w_{z'} = w_z. \tag{1.2.14}$$

Connaissant l'accélération « absolue » du sommet du trièdre de Darboux xyz, il n'est pas difficile de déterminer les projections sur ses arêtes de la résultante $\bar{P}$ des forces d'inertie d'entraînement des masses élémentaires du pendule composé. Comme il a été dit plus haut, la force P est due au mouvement du système de coordonnées non tournant $\xi^*\eta^*\zeta^*$ dont l'origine est au point de suspension du pendule ou, ce qui revient au même, au sommet du trièdre de Darboux xyz. Ainsi qu'on l'a dit plus haut, c'est précisément par rapport au système $\xi^*\eta^*\zeta^*$ en translation qu'ont été établies les équations (1.2.3) du mouvement du pendule autour de son point de suspension. D'après la formule (1.2.2), on a

$$\begin{aligned} P_x &= -mw_x = -mR\left(\frac{dq}{dt} + pr\right), \\ P_y &= -mw_y = mR\left(\frac{dp}{dt} - qr\right), \\ P_z &= -mv_z = mR\,(p^2 + q^2). \end{aligned} \tag{1.2.15}$$

Introduisons maintenant les deux premières expressions (1.2.15) dans les équations (1.2.8). Nous obtenons, moyennant les transformations évidentes, deux relations:

$$\begin{aligned} (A - lmR)\frac{dp}{dt} + (C - A + lmR)\,qr &= 0, \\ (A - lmR)\frac{dq}{dt} - (C - A + lmR)\,pr &= 0, \end{aligned} \tag{1.2.16}$$

dans lesquelles r est une constante égale à la projection de la vitesse angulaire du pendule sur l'axe z à l'instant initial.

Les relations (1.2.16) doivent être satisfaites à tout instant, c'est-à-dire identiquement, si dans un certain mouvement du point de suspension du pendule sur la sphère S l'axe de symétrie dynamique z

du pendule passe constamment par le centre de la Terre. Proposons-nous d'établir les conditions dans lesquelles les égalités (1.2.16) se transforment en identités. On a déjà fait observer que ces conditions peuvent concerner tant les valeurs des paramètres A, C, m, l du pendule que le caractère du mouvement de son point de suspension sur la sphère S, ainsi que le rayon R de la Terre et la projection r de la vitesse angulaire du pendule sur l'axe z.

Les relations (1.2.16) peuvent être considérées comme un système d'équations algébriques linéaires homogènes par rapport aux quantités $A - lmR$ et $C - A + lmR$. Comme $C \neq 0$ (dans le cas contraire, le pendule se présenterait sous la forme d'une tige d'épaisseur infiniment petite, allongée suivant l'axe z), l'une au moins de ces quantités est différente de zéro. Ceci signifie que les égalités (1.2.16) ne peuvent se transformer en identités que dans le cas où le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{dp}{dt} & qr \\ \frac{dq}{dt} & -pr \end{vmatrix} = -r\left(p\frac{dp}{dt} + q\frac{dq}{dt}\right) \qquad (1.2.17)$$

est nul. La condition $\Delta = 0$ peut avoir lieu dans deux cas. Le déterminant (1.2.17) s'annule, dans le premier cas, si

$$r = 0 \qquad (1.2.18)$$

et, dans le second, si est vérifiée l'égalité

$$p\frac{dp}{dt} + q\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{p^2+q^2}{2} = 0. \qquad (1.2.19)$$

Dans le premier cas, c'est-à-dire pour $r = 0$, en vertu des relations (1.2.16), doit être réalisée la condition

$$A = lmR, \qquad (1.2.20)$$

alors que les fonctions du temps

$$p = p(t), \quad q = q(t) \qquad (1.2.21)$$

peuvent être arbitraires. Il en résulte, suivant les formules (1.2.11), qu'aucune variation en grandeur et en direction de la vitesse de mouvement du point de suspension sur la sphère S ne peut faire changer l'état de mouvement du pendule dans lequel son axe de symétrie dynamique z passe par le centre de la Terre et la projection r de la vitesse angulaire du pendule sur cet axe est nulle.

C'est la raison de la dénomination « *pendule imperturbable* » donnée au pendule qui vient d'être décrit. La possibilité de réaliser théoriquement un pendule imperturbable a été indiquée pour la

première fois par M. Schüler[1]) dont il porte le nom. Malheureusement, la réalisation pratique du pendule de Schüler est impossible du fait que son paramètre l doit avoir une valeur extrêmement petite[2]).

Passons maintenant au second cas où le déterminant (1.2.17) s'annule lorsque l'égalité (1.2.19) est réalisée. En vertu de cette égalité, on a

$$p^2 + q^2 = \omega_\pi^2 = \text{const}, \qquad (1.2.22)$$

d'où

$$p = \pm\sqrt{\omega_\pi^2 - q^2}. \qquad (1.2.23)$$

La constante ω_π a ici un sens bien simple. Elle est égale à la projection de la vitesse angulaire $\bar{\omega}$ du trièdre de Darboux xyz sur sa face xy.

La première des relations (1.2.16) se ramène maintenant à la forme

$$\mp (A - lmR)\frac{q}{\sqrt{\omega_\pi^2 - q^2}}\frac{dq}{dt} + (C - A + lmR)\,qr = 0. \qquad (1.2.24)$$

Excepté la variable q et sa dérivée par rapport au temps, toutes les quantités figurant dans la dernière égalité sont des constantes. Par suite, si la projection r de la vitesse angulaire du trièdre xyz est non nulle et la projection q est une fonction du temps, l'égalité (1.2.24) ne peut être vérifiée que si

$$\frac{1}{\sqrt{\omega_\pi^2 - q^2}}\frac{dq}{dt} = k = \text{const}. \qquad (1.2.25)$$

Cette dernière relation est une équation différentielle du premier ordre en la fonction $q = q\,(t)$, dont la résolution donne

$$q = \omega_\pi \sin\,(kt + \varepsilon), \qquad (1.2.26)$$

où ε, de même que ω_π et k, est une constante.

[1]) Voir *Schüler M.* « Die Störung von Pendel und Kreiselapparaten durch die Beschleunigung des Fahrzeuges ». Phys. Z., 1923, B. 24, H. 16.

[2]) Il est intéressant de noter que la condition (1.2.20) est équivalente à la disposition du centre du choc ou, ce qui revient au même, du centre d'oscillation d'un pendule composé au centre de la Terre. Le centre du choc et le point de suspension peuvent être permutés. Il s'ensuit que le pendule de Schüler ne se perturbe pas non plus en cas d'une brusque variation de sa vitesse (qui peut se produire lors d'une action impulsive sur le pendule, au point de sa suspension, dirigée suivant la tangente à la sphère S).

Remarquons que dans l'état actuel de la technique il devient déjà possible de réaliser, à l'aide de gyroscopes, un dispositif — élément sensible de compas gyroscopique spatial — qui indique constamment, dans les limites de la précision de la théorie de précession des gyroscopes, la direction vers le centre de la Terre, quel que soit le déplacement du point de suspension de l'élément sensible sur la surface terrestre.

D'après la formule (1.2.23), on peut écrire sans restreindre la généralité [1])

$$p = \omega_n \cos (kt + \varepsilon). \tag{1.2.27}$$

Si maintenant l'on introduit les expressions (1.2.27) et (1.2.26) dans les relations (1.2.16), ces dernières se réduisent à une seule égalité :

$$(A - lmR)\, k - (C - A + lmR)\, r = 0, \tag{1.2.28}$$

qui doit être considérée comme condition de transformation des relations (1.2.16) en identités.

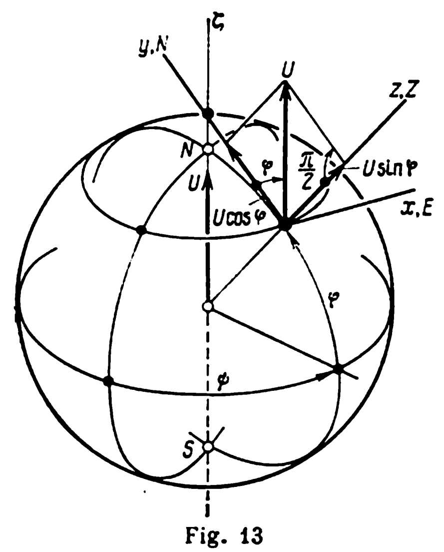


Fig. 13

Si l'on pose $k = 0$ dans la condition (1.2.28), elle prend la forme

$$C - A + lmR = 0. \tag{1.2.29}$$

En vertu des formules (1.2.27), (1.2.26) et (1.2.7), lorsque $k = 0$, les projections p, q et r de la vitesse angulaire $\bar{\omega}$ du trièdre de Darboux sur ses arêtes respectives x, y et z sont des constantes. Il en résulte, compte tenu du fait que le trièdre xyz a un point fixe, centre commun de la Terre et de la sphère S, que le trièdre xyz tourne à la vitesse angulaire $\bar{\omega}$ autour d'un axe qui ne change pas son orientation par rapport au système de coordonnées « absolu » $\xi\eta\zeta$. Supposons par exemple que le point de suspension du pendule est immobile par rapport à la Terre. Dirigeons l'arête x du trièdre de Darboux vers l'est et donc l'arête y vers le nord. Dans ces conditions la vitesse angulaire $\bar{\omega}$ du trièdre xyz sera constante et égale à la vitesse angulaire de la Terre, alors que ses projections sur les arêtes x, y et z auront pour valeurs respectives (fig. 13)

$$p = 0, \quad q = U \cos \varphi, \quad r = U \sin \varphi. \tag{1.2.30}$$

[1]) A une valeur négative du second membre de la formule (1.2.23) correspond l'inversion du signe de la constante k et le remplacement de la constante ε par $\pi - \varepsilon$. Il en résulte que les expressions (1.2.26) et (1.2.27) conservent encore la même forme dans le cas où le radical (1.2.23) prend une valeur négative.

Ici U est la vitesse angulaire de la Terre et φ la latitude géographique (ou plus exactement géocentrique) du lieu où se trouve le point de suspension du pendule.

Lorsque la condition (1.2.29) est réalisée, la ligne du pendule, c'est-à-dire la droite joignant le point de suspension au centre de gravité (axe z), passera, si le pendule est à l'état d'équilibre par rapport à la Terre, par le centre de la Terre. La vitesse angulaire U de la Terre et la latitude φ du lieu où se trouve le point de suspension du pendule n'interviennent pas dans la condition (1.2.29). En revanche, le rayon R de la Terre figure dans cette condition qui relie les moments d'inertie principaux A et C du pendule à sa masse m et au paramètre l.

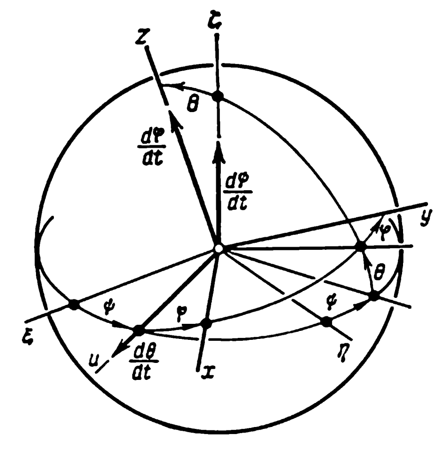


Fig. 14

Pour $k \neq 0$, la vitesse angulaire du trièdre de Darboux n'est constante qu'en module. En effet, d'après les formules (1.2.22) et (1.2.7), on a

$$\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2 = \omega_\pi^2 + r^2 = \text{const.} \tag{1.2.31}$$

Quant à la direction du vecteur vitesse angulaire du trièdre de Darboux, elle varie continuellement par rapport au trièdre lui-même et par rapport au système de coordonnées « absolu » $\xi\eta\zeta$ (c'est-à-dire par rapport à la sphère S). On peut montrer que le cas considéré correspond au mouvement du point de suspension du pendule suivant l'un des petits cercles de la sphère S. A cet effet, introduisons les angles d'Euler ψ, θ et φ (fig. 14 [1]), v. aussi tome I, chap. III, § 5) qui caractérisent l'orientation du système de coordonnées xyz lié au pendule composé (dans le cas considéré, ce système est à la fois le trièdre de Darboux) par rapport au système « absolu » $\xi\eta\zeta$. Il es évident que les angles ψ et θ déterminent la position du point de suspension du pendule, ou, ce qui revient au même, celle de l'origine du système de coordonnées xyz sur la sphère S. Quant à l'angle φ, il caractérise la rotation du système de coordonnées xyz par rapport au méridien du lieu, ou, ce qui revient au même, par rapport au plan ζz. Les projections p, q et r de la vitesse angulaire du système de coordonnées xyz et donc du pendule composé sur les axes x, y

[1]) Dans la figure 14, l'origine du système de coordonnées xyz est placée, pour plus de clarté, au centre de la sphère S.

et z s'expriment, en vertu des équations cinématiques d'Euler, bien connues par les formules

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{d\psi}{dt}\sin\theta\sin\varphi + \frac{d\theta}{dt}\cos\varphi,\\
q &= \frac{d\psi}{dt}\sin\theta\cos\varphi - \frac{d\theta}{dt}\sin\varphi,\\
r &= \frac{d\psi}{dt}\cos\theta + \frac{d\varphi}{dt}.
\end{aligned}
\tag{1.2.32}
$$

En remplaçant dans ces formules les projections p, q et r par leurs expressions (1.2.27), (1.2.26) et (1.2.7), nous obtenons le système de trois équations différentielles

$$
\begin{aligned}
\frac{d\psi}{dt}\sin\theta\sin\varphi + \frac{d\theta}{dt}\cos\varphi &= \omega_\pi\cos(kt+\varepsilon),\\
\frac{d\psi}{dt}\sin\theta\cos\varphi - \frac{d\theta}{dt}\sin\varphi &= \omega_\pi\sin(kt+\varepsilon),\\
\frac{d\psi}{dt}\cos\theta + \frac{d\varphi}{dt} &= r,
\end{aligned}
\tag{1.2.33}
$$

où r est une constante.

Une des solutions particulières de ces équations est de la forme

$$
\begin{aligned}
\psi &= \frac{\omega_\pi}{\sin\theta^0}t,\\
\theta &= \theta^0,\\
\varphi &= \frac{\pi}{2} - kt - \varepsilon,
\end{aligned}
\tag{1.2.34}
$$

où θ^0 est une constante qui se détermine de la façon suivante.

Portons les expressions (1.2.34) dans les premiers membres des équations (1.2.33). Les deux premières de ces équations se transforment tout de suite en identités, alors que la troisième se réduit à l'égalé

$$
\omega_\pi \operatorname{cotg}\theta^0 - k = r \tag{1.2.35}
$$

et donc devient, elle aussi, une identité si l'on prend pour valeur de θ^0 la racine de l'équation trigonométrique

$$
\operatorname{tg}\theta^0 = \frac{\omega_\pi}{k+r}. \tag{1.2.36}
$$

Les deux premières formules (1.2.34) montrent que le point de suspension du pendule composé doit se déplacer sur un petit cercle de la sphère S, de centre sur l'axe ζ (fig. 15), avec la vitesse

$$
v = R\sin\theta^0\frac{d\psi}{dt} = R\omega_\pi. \tag{1.2.37}
$$

La condition (1.2.28) permet d'exprimer la pulsation k de variation harmonique des projections p et q par la projection r de la vitesse angulaire du pendule sur l'axe z. On a

$$k=\frac{C-A+lmR}{A-lmR}r \quad (1.2.38)$$

Introduisons cette expression dans l'équation (1.2.36), il vient

$$\operatorname{tg}\theta^0=\frac{A-lmR}{C}\cdot\frac{\omega_\pi}{r} \quad (1.2.39)$$

Maintenant, on peut faire disparaître la constante ω_π dans le second membre de la première formule (1.2.34), ce qui donne

$$\psi=\frac{Cr}{A-lmR}\cdot\frac{1}{\cos\theta^0}t. \quad (1.2.40)$$

On peut opérer de même sur l'égalité (1.2.37) et ramener ainsi l'expression donnant la vitesse du point de suspension à la forme

$$v=\frac{CrR}{A-lmR}\operatorname{tg}\theta^0. \quad (1.2.41)$$

Ainsi, en se donnant différentes valeurs de θ^0 et de la projection r de la vitesse angulaire du pendule composé sur son axe de symétrie dynamique, on obtient toute une famille de mouvements de son point de suspension, qui correspondent à la solution particulière (1.2.34) et pour lesquels l'axe z de symétrie dynamique du pendule passe par le centre de la Terre (si, bien entendu, sont réalisées les conditions initiales appropriées du mouvement du pendule).

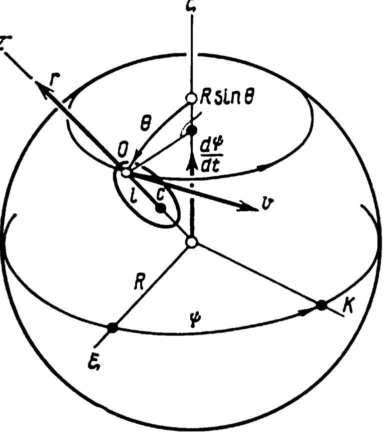


Fig. 15

En partant de la solution particulière (1.2.34), on peut trouver également la solution générale du système d'équations différentielles (1.2.33). A la solution générale il correspond, sur la sphère S, un ensemble de circonférences différentes dont chacune représente, pour des conditions initiales données, une trajectoire suivie par l'origine du système de coordonnées xyz lié au pendule composé ou, ce qui revient au même, une trajectoire du point de suspension du pendule. Parmi ces circonférences, on voit figurer celle, située sur la sphère S, qui correspond à la solution particulière (1.2.34) du système d'équations différentielles (1.2.33). Plus loin, au chap. VI, §4, il sera montré que toute courbe de la solution générale et une des courbes traduisant la solution particulière peuvent être amenées en

coïncidence l'une avec l'autre, à condition de déplacer l'une quelconque d'entre elles sur la sphère, comme une formation solide rigide (v. fig. 142 dans le même paragraphe), c'est-à-dire sans modifier la courbure et la torsion en tous ses points. Il se produit en même temps la mise en coïncidence des axes correspondants des systèmes de coordonnées xyz qui se rapportent à des points confondus situés sur les courbes sphériques traduisant les solutions générale et particulière mentionnées du système d'équations (1.2.33). On voit que la construction de la solution générale se ramène à un changement de coordonnées qui correspond à des rotations finies du corps solide.

§ 3. Pendule-gyroscope dont l'axe est dirigé vers le centre de la Terre

D'après son contenu, ce paragraphe est proche du paragraphe précédent. Nous y étudions en particulier si un pendule composé quelconque à symétrie axiale et à point de suspension immobile par rapport à la Terre peut avoir son axe passant, en l'absence de perturbations, invariablement par le centre de la Terre (cette dernière étant supposée, comme précédemment, sphérique, à répartition radiale de la densité). Ceci étant, on suppose qu'il est possible d'admettre la rotation du pendule, par rapport à la Terre, autour de son axe de symétrie dynamique, à une vitesse angulaire qui sera nécessaire. Il apparaît que la réponse à cette question est positive.

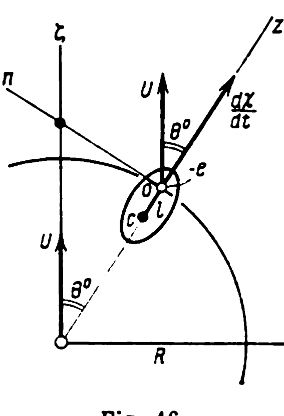


Fig. 16

Ainsi, supposons qu'un tel pendule est réalisé et tourne autour de l'axe z de sa symétrie dynamique, qui lui est lié et passe par le centre de la Terre. L'axe z est immobile par rapport à la Terre et fait un angle θ^0 avec son axe ζ ou, ce qui revient au même, avec le vecteur vitesse angulaire de la Terre, $\bar{U}$ (fig. 16).

Associons à la Terre un système de coordonnées enz en plaçant son origine au point de suspension du pendule, c'est-à-dire au point d'intersection de l'axe z avec la sphère S ou, ce qui revient au même, avec la surface de la Terre (par hypothèse, la Terre est supposée sphérique et de même rayon que la sphère S). Plaçons l'axe n du système enz dans le plan du méridien passant par le point de suspension du pendule et orientons-le vers le nord. Dirigeons l'axe e vers l'est, si bien que l'axe z constitue naturellement le prolongement du rayon de la Terre qui relie son centre au point de suspension du pendule. La vitesse angulaire du système de coordonnées enz est, bien en-

tendu, égale à la vitesse angulaire U de la Terre. De ce fait (fig. 16), les projections de la vitesse angulaire du système *enz* sur ses axes ont pour valeurs

$$\begin{aligned} U_e &= 0, \\ U_n &= U \sin \theta^0, \\ U_z &= U \cos \theta^0, \end{aligned} \qquad (1.3.1)$$

où θ^0 est l'angle fait par l'axe z de symétrie dynamique du pendule composé avec l'axe ζ de la Terre (l'angle θ^0 est l'angle complémentaire de la latitude du lieu où se trouve le point de suspension du pendule).

Le plan xy du système de coordonnées xyz lié au pendule composé est, par hypothèse, confondu avec le plan *en* du système *enz* lié à la Terre, les deux systèmes ayant l'axe z commun. Désignons par χ l'angle formé par l'axe x avec l'axe e. Lorsque $\chi > 0$, le système xyz est tourné en sens inverse des aiguilles d'une montre par rapport au système *enz* si on l'observe du côté de la partie positive de l'axe z (fig. 17). La vitesse angulaire du système de coordonnées xyz ne diffère de celle du système *enz* que par la composante $d\chi/dt$ dirigée suivant l'axe z. Cette composante représente la vitesse angulaire (relative) du système xyz par rapport au système *enz* et peut être appelée vitesse angulaire *apparente* du pendule composé. Les projections de la vitesse angulaire absolue du système de coordonnées xyz (ou, ce qui revient au même, du pendule composé) sur les axes x, y et z ont été précédemment désignées par p, q et r. Compte tenu des remarques faites ci-dessus, on a dans le cas considéré

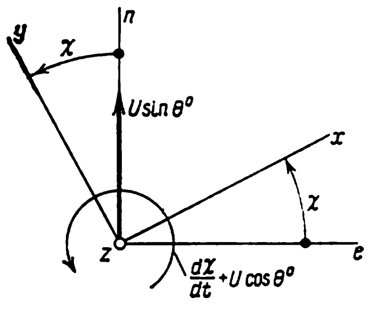


Fig. 17

$$\begin{aligned} p &= U \sin \theta^0 \sin \chi, \\ q &= U \sin \theta^0 \cos \chi, \\ r &= \frac{d\chi}{dt} + U \cos \theta^0. \end{aligned} \qquad (1.3.2)$$

Introduisons les expressions de p et q dans les égalités (1.2.16) du paragraphe précédent, qui doivent être vérifiées identiquement si l'axe z passe par le centre de la Terre. En admettant que $\theta^0 \neq 0$, on obtient finalement une seule relation

$$(A - lmR) \frac{d\chi}{dt} + (C - A + lmR)\, r = 0. \qquad (1.3.3)$$

Cette dernière coïncide avec la condition (1.2.28), obtenue au paragraphe précédent à partir des considérations différentes, si l'on y pose

$$\frac{d\chi}{dt} = -k. \tag{1.3.4}$$

Introduisons maintenant dans la relation (1.3.3) l'expression de la projection r donnée par la troisième formule (1.3.2). On obtient, après quelques transformations simples, la relation

$$C\frac{d\chi}{dt} = -(C - A + lmR)\,U\cos\theta^0 \tag{1.3.5}$$

qui montre que pour un pendule composé de paramètres arbitraires C, A, l et m, placé en n'importe quel point de la Terre, on peut choisir, pour la vitesse angulaire $d\chi/dt$ de sa rotation apparente, une valeur telle que l'axe du pendule puisse conserver aussi longtemps que l'on veut sa direction vers le centre de la Terre.

Suivant la troisième équation du système (1.2.6) établi au paragraphe précédent, la projection r de la vitesse angulaire du pendule composé sur l'axe de sa symétrie dynamique est une constante. De ce fait, la vitesse apparente $d\chi/dt$ de la rotation du pendule, c'est-à-dire sa vitesse angulaire par rapport à la Terre, reste, elle aussi, constante, comme ceci découle de la troisième formule (1.3.2).

Si la vitesse angulaire apparente $d\chi/dt$ est nulle, le pendule est absolument immobile par rapport à la Terre et son axe de symétrie dynamique z reste dirigé vers le centre de la Terre. Dans ce cas, la relation (1.3.5) permet d'écrire la condition

$$A = lmR + C \tag{1.3.6}$$

à imposer aux paramètres du pendule pour qu'un tel mouvement (c'est-à-dire un équilibre relatif du pendule composé par rapport à la Terre en rotation) soit possible. La condition (1.3.6) coïncide avec la condition (1.2.29) établie au paragraphe précédent par une voie légèrement différente. Au paragraphe qui suit, la même condition (1.3.6) sera établie une fois de plus à l'occassion de l'étude du cas général de l'équilibre du pendule composé par rapport à la Terre supposée exempte de rotation.

Posons maintenant

$$\frac{d\chi}{dt} = -U\cos\theta^0, \tag{1.3.7}$$

ce qui signifie d'après la troisième formule (1.3.2) que la projection r de la vitesse angulaire du pendule sur l'axe z de sa symétrie dynamique est nulle. En vertu de la relation (1.3.5), on obtient maintenant la condition

$$A - lmR = 0 \tag{1.3.8}$$

qui doit être satisfaite pour que le mouvement considéré soit réalisé. Or, la même condition (1.2.20) a déjà été obtenue au paragraphe précédent, lorsque nous avons étudié la possibilité de ce que l'axe z soit invariablement dirigé vers le centre de la Terre lors d'un mouvement arbitraire du point de suspension du pendule sur la surface de la sphère S. Ceci étant, en plus de la condition (1.3.8), il est apparu que la projection r de la vitesse angulaire du pendule sur l'axe z

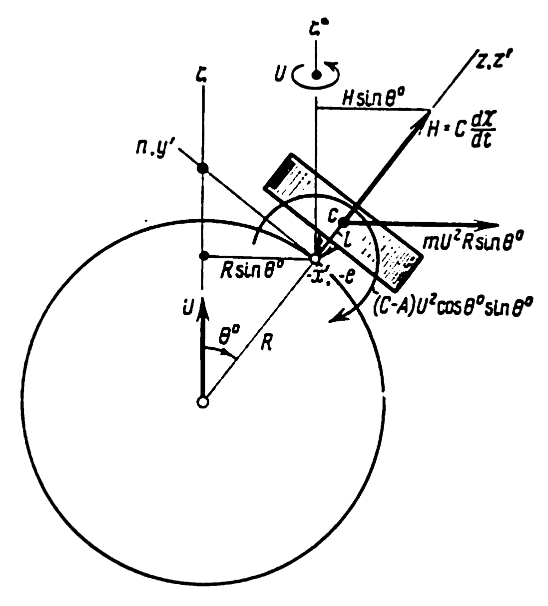


Fig. 18

devait être nulle. Il est évident que le mouvement du point de suspension du pendule suivant un parallèle terrestre est un cas particulier, examiné plus haut, du mouvement arbitraire sur la sphère S.

Revenons à la relation (1.3.5). Comme il a été dit précédemment, elle exprime la condition nécessaire à la réalisation d'un mouvement du pendule composé (à point de suspension immobile par rapport à la Terre) au cours duquel son axe de symétrie dynamique passe par le centre de la Terre [1]). Considérons le cas où la vitesse angulaire apparente $d\chi/dt$ d'un tel pendule est donnée à l'avance (fig. 18). Dans ce cas, il est logique d'appeler le pendule composé le gyroscope, et le

[1]) Signalons que la formule initiale (1.3.5) peut s'obtenir par application des équations d'Euler modifiées qui seront données plus loin au chap. II, § 1. Le système de coordonnées auxiliaire $x'y'z'$ utilisé dans ce paragraphe doit être lié à la Terre en rotation et amené en coïncidence, par exemple avec le système enz (v. fig. 18 sur laquelle la force d'attraction terrestre agissant sur le pendule n'est pas représentée).

4—01247

produit

$$H = C \frac{d\chi}{dt} \qquad (1.3.9)$$

le moment cinétique propre de ce gyroscope. La suspension à la cardan d'un tel gyroscope doit être soit complètement absente (v. par exemple, le gyroscope à coussinet pneumatique, tome II, chap. II, § 1), soit être réalisée de manière à ne pas exercer d'action sur l'axe de rotation propre du gyroscope, si cet axe est immobile par rapport à la Terre [1]). On suppose, bien entendu, que les forces de frottement dans le dispositif de suspension du gyroscope sont nulles et qu'il n'y a pas d'autres forces physiques exercées sur le rotor, sauf la force de gravitation.

Admettons qu'en plus de $d\chi/dt$ toutes les autres grandeurs intervenant dans la relation (1.3.5) sont, elles aussi, données, à l'exception du paramètre l, c'est-à-dire de la distance entre le centre de suspension du gyroscope, immobile par rapport à la Terre, et son centre de masse. De cette relation on tire

$$l = -\frac{1}{mR}\left(\frac{H}{U\cos\theta^0} + C - A\right), \qquad (1.3.10)$$

où H est donné par la formule (1.3.9).

Suivant la valeur et le signe du moment cinétique propre H, le centre de gravité du rotor doit être placé soit au-dessus, soit au-dessous de son centre de suspension (fig. 18).

§ 4. Equilibre d'un pendule composé par rapport à la Terre

Examinons encore un problème de mécanique du mouvement relatif. Considérons un pendule composé dont le point de suspension est immobile par rapport à la Terre. Proposons-nous de trouver sa position d'équilibre par rapport à la Terre pour un rapport arbitraire entre les moments d'inertie $A = B$, C et le produit lmR. Dans cette position, le vecteur vitesse angulaire $\bar{\omega}$ du pendule coïncide avec le vecteur vitesse angulaire $\bar{U}$ de la Terre, si bien que les projections du vecteur $\bar{\omega}$ sur les axes x, y, z, c'est-à-dire les quantités p, q, r, sont constantes et égales respectivement aux projections sur les mêmes axes du vecteur $\bar{U}$. De ce fait, les deux premières des équations (1.2.6) obtenues au § 2 du présent chapitre prennent la forme

$$\begin{aligned} (C - A)\, U_z U_y - l\,(F_y + P_y) &= 0, \\ (C - A)\, U_z U_x - l\,(F_x + P_x) &= 0, \end{aligned} \qquad (1.4.1)$$

[1]) On peut montrer que la condition nécessaire de l'absence d'une telle action est la transformation en sphère de l'ellipsoïde central de chacun des anneaux de cardan.

alors que la troisième équation se transforme en identité. Ici, en plus des désignations qui se sont déjà rencontrées au cours des paragraphes précédents, U_x, U_y, U_z sont les projections de la vitesse angulaire de la Terre sur les axes du système de coordonnées xyz lié au pendule.

Introduisons un vecteur

$$\bar{K} = (C - A)U_z\bar{U} - l\bar{F} - l\bar{P}. \tag{1.4.2}$$

Il est aisé de voir que les premiers membres des égalités (1.4.1) représentent les projections du vecteur $\bar{K}$ respectivement sur les axes x et y. Elles sont nulles. Le vecteur $\bar{K}$ est donc parallèle à l'axe z.

Désignons par λ, μ et ν les cosinus directeurs de l'axe z dans le système de coordonnées « absolu » $\xi\eta\zeta$, c'est-à-dire les cosinus des angles faits par l'axe z respectivement avec les axes ξ, η et ζ. On a

$$K_\xi = \lambda K, \quad K_\eta = \mu K, \quad K_\zeta = \nu K. \tag{1.4.3}$$

Ici K_ξ, K_η et K_ζ sont les projections du vecteur $\bar{K}$ sur les axes ξ, η et ζ. Il est évident que

$$\begin{aligned} K_\xi &= (C - A)U_zU_\xi - lF_\xi - lP_\xi, \\ K_\eta &= (C - A)\, U_zU_\eta - lF_\eta - lP_\eta, \\ K_\zeta &= (C - A)U_zU_\zeta - lF_\zeta - lP_\zeta, \end{aligned} \tag{1.4.4}$$

où U_ξ, U_η, U_ζ; F_ξ, F_η, F_ζ et enfin P_ξ, P_η, P_ζ sont les projections sur les axes ξ, η, ζ respectivement des vecteurs de la vitesse angulaire $\bar{U}$ de la Terre, de la force de gravitation $\bar{F}$ et de la résultante $\bar{P}$ des forces d'inertie d'entraînement.

Les formules (1.4.3) et les égalités (1.4.4) entraînent la proportion

$$\frac{(C-A)\,U_zU_\xi - l\,(F_\xi + P_\xi)}{\lambda} = \frac{(C-A)\,U_zU_\eta - l\,(F_\eta + P_\eta)}{\mu} = \frac{(C-A)\,U_zU_\zeta - l\,(F_\zeta + P_\zeta)}{\nu}. \tag{1.4.5}$$

La direction des axes du système de coordonnées « absolu » introduit plus haut, dont l'origine se trouve au centre de la Terre, peut être choisie arbitrairement. Il semble logique de diriger l'axe ζ de ce système le long de l'axe terrestre. Dans ce cas

$$U_\xi = U_\eta = 0, \quad U_\zeta = U \tag{1.4.6}$$

et donc

$$U_z = U_\xi \cos(\widehat{z, \xi}) + U_\eta \cos(\widehat{z, \eta}) + U_\zeta \cos(\widehat{z, \zeta}) = \nu U. \tag{1.4.7}$$

Orientons l'axe η du système « absolu » de manière qu'à l'instant considéré (fig. 19) le point de suspension du pendule composé se situe dans le plan de coordonnées $\eta\zeta$. Les équations initiales (1.2.3),

obtenues au § 2 du présent chapitre, décrivent le mouvement du pendule par rapport au système de coordonnées $\xi^*\eta^*\zeta^*$ ayant son origine au point de suspension du pendule et animé d'un mouvement de translation. L'accélération « absolue » du point de suspension immobile par rapport à la Terre est dirigée perpendiculairement à l'axe de la Terre ou, ce qui revient au même, perpendiculairement à l'axe ζ. Aussi, les projections sur les axes ξ, η et ζ de la résultante $\overline{P}$ des forces d'inertie d'entraînement dues au mouvement du système de

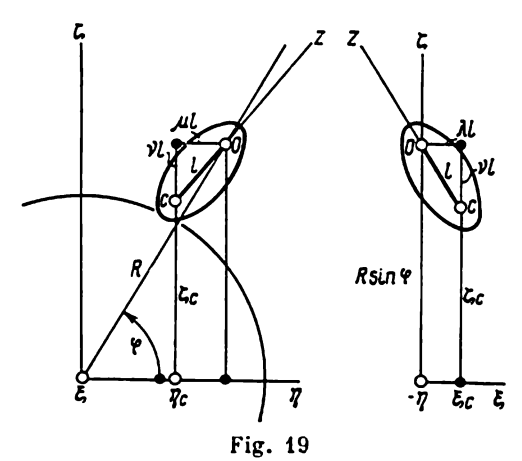


Fig. 19

coordonnées non tournant $\xi^*\eta^*\zeta^*$ sont-elles représentées à l'instant considéré par les expressions

$$P_\xi = 0, \quad P_\eta = mU^2R\cos\varphi, \quad P_\zeta = 0. \tag{1.4.8}$$

Quant aux formules exprimant les projections, sur les mêmes axes ξ, η et ζ, de la force $\overline{F}$ d'attraction du pendule par la Terre, elles sont, comme on peut s'en assurer facilement, de la forme suivante:

$$F_\xi = -\frac{fmM}{r^3}\xi_c, \quad F_\eta = -\frac{fmM}{r^3}\eta_c, \quad F_\zeta = -\frac{fmM}{r^3}\zeta_c, \tag{1.4.9}$$

où f est la constante de gravitation ; m est, comme précédemment, la masse du pendule ; M la masse de la Terre ; r la distance du centre de gravité du pendule au centre de la Terre ; ξ_c, η_c et ζ_c sont les coordonnées du centre de gravité du pendule dans le système « absolu » $\xi\eta\zeta$ (fig. 19). Ceci étant, on a évidemment

$$r = \sqrt{\xi_c^2 + \eta_c^2 + \zeta_c^2}. \tag{1.4.10}$$

En effet, la force de gravitation F exercée par la Terre sur le pendule est définie par la formule de Newton bien connue

$$F = \frac{fmM}{r^2} \tag{1.4.11}$$

et est dirigée vers le centre de la Terre suivant le rayon vecteur r. A leur tour, les rapports des coordonnées ξ_c, η_c et ζ_c à la longueur du rayon vecteur r sont respectivement égaux aux cosinus directeurs de ce rayon vecteur dans le système $\xi\eta\zeta$.

En utilisant les égalités (1.4.6) à (1.4.9) dans la proportion (1.4.5), on obtient, toutes réductions effectuées,

$$\frac{lfmM\xi_c}{\lambda}=\frac{-lmU^2Rr^3\cos\varphi+lfmM\eta_c}{\mu}=\frac{(C-A)\,U^2r^3\nu+lfmM\zeta_c}{\nu}. \quad (1.4.12)$$

Les coordonnées ξ_c, η_c et ζ_c s'expriment par les cosinus directeurs λ, μ et ν de l'axe z dans le système $\xi\eta\zeta$ à l'aide des formules suivantes (v. fig. 19, dans laquelle le rayon vecteur r et la force de gravitation $\bar{F}$ ne sont pas indiqués):

$$\begin{aligned} \xi_c &= -\lambda l, \\ \eta_c &= -\mu l + R\cos\varphi, \\ \zeta_c &= -\nu l + R\sin\varphi. \end{aligned} \quad (1.4.13)$$

Introduisons les seconds membres de ces formules dans l'égalité (1.4.10). Compte tenu de la relation connue

$$\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1, \quad (1.4.14)$$

on obtient

$$r=\sqrt{R^2+l^2-2Rl\,(\mu\cos\varphi+\nu\sin\varphi)}. \quad (1.4.15)$$

Il en résulte que tous les termes de la proportion (1.4.12) s'expriment de façon explicite par l'intermédiaire des grandeurs λ, μ et ν. Ces dernières sont à leur tour liées entre elles par la relation (1.4.14).

Deux égalités qui s'obtiennent de la proportion (1.4.12) et la relation (1.4.14) constituent, compte tenu des formules (1.4.13) et (1.4.15), trois équations algébriques permettant de trouver les valeurs inconnues des angles λ, μ, ν. Ces angles déterminent la direction de l'axe z du pendule composé en équilibre par rapport à la Terre en rotation (plus exactement, par rapport au système de coordonnées « absolu » $\xi\eta\zeta$ dont le plan $\eta\zeta$ passe à l'instant considéré par le point de suspension du pendule). Si l'on tient compte des formules (1.4.13), la première des relations déduites de la proportion (1.4.12) est la seule qui contient la grandeur cherchée λ, tant au numérateur qu'au dénominateur. Ceci signifie que l'on peut donner à λ des valeurs quelconques et, en particulier, la poser nulle. Dans ce dernier cas, c'est-à-dire pour

$$\lambda=\cos(\widehat{\xi,\ z})=0, \quad (1.4.16)$$

le centre de gravité du pendule se situe dans le plan méridien $\eta\zeta$ qui contient, comme il a été indiqué précédemment, également le point de suspension du pendule.

Au cas de $\lambda \neq 0$ correspondent des solutions analogues à celles qui peuvent être obtenues pour un pendule simple de très grande longueur [1]). S'y rapportent également certaines solutions pour le cas de $\varphi = \pi/2$, où le point de suspension du pendule est situé sur l'axe de la Terre. Toutes ces solutions ne présentent qu'un intérêt purement théorique et ne sauraient trouver place ici.

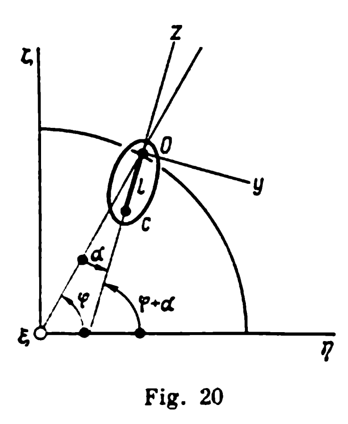


Fig. 20

Introduisons un angle α caractérisant l'écart de l'axe de symétrie dynamique z du pendule par rapport au rayon de la Terre passant par le point de suspension du pendule (fig. 20). Avec cet angle, on a dans le cas où $\lambda = 0$

$$\mu = \cos(\widehat{\eta, z}) = \cos(\varphi + \alpha),$$
$$\nu = \cos(\widehat{\zeta, z}) = \sin(\varphi + \alpha). \tag{1.4.17}$$

Maintenant, en tenant compte de l'égalité de deux derniers rapports de la proportion (1.4.12), ainsi que des formules (1.4.13), on obtient l'équation

$$-l \sin(\varphi + \alpha) \{mU^2Rr^3 \cos\varphi - fmM[R\cos\varphi - l\cos(\varphi + \alpha)]\} =$$
$$= \cos(\varphi + \alpha) \{(C - A) U^2r^3 \sin(\varphi + \alpha) +$$
$$+ lfmM[R\sin\varphi - l\sin(\varphi + \alpha)]\} \tag{1.4.18}$$

qui contient l'angle cherché α. Moyennant quelques transformations trigonométriques simples, cette équation devient

$$fM \sin\alpha = U^2r^3 \left[\cos\varphi - \frac{A-C}{lRM}\cos(\varphi + \alpha)\right]\sin(\varphi + \alpha). \tag{1.4.19}$$

Ici, au lieu de la longueur du rayon vecteur r, il convient d'utiliser son expression donnée par la formule (1.4.15).

Remarquons tout d'abord qu'à la condition

$$\frac{A-C}{lmR} = 1 \tag{1.4.20}$$

l'équation (1.4.19) admet une solution

$$\alpha = 0. \tag{1.4.21}$$

[1]) Voir, par exemple, l'article: *Ишлинский А. Ю.* «Об относительном равновесии физического маятника с подвижной точкой опоры» (*A. Ishlinsky.* « Sur l'équilibre relatif d'un pendule composé à point d'appui mobile»).— ПММ, 1956, т. 20, вып. 3 (en russe).

Ainsi, lorsque la condition (1.4.20) est réalisée, le centre de la Terre, le point de suspension et le centre de gravité du pendule composé se trouvant à l'état d'équilibre par rapport à la Terre se situent sur une même droite. Or, ce cas a déjà été étudié plus haut par une autre voie, la condition (1.4.20) coïncidant exactement avec la condition (1.2.29).

En principe, l'angle α peut prendre même des valeurs négatives. A savoir, le centre de gravité d'un pendule composé se trouvant en position d'équilibre dans l'hémisphère nord peut s'écarter de la verticale non pas vers le sud, comme c'est toujours le cas d'un pendule simple, mais vers le nord. A cet effet, il est nécessaire, suivant la formule (1.4.19), que soit réalisée l'inégalité

$$A - C > lmR \qquad (1.4.22)$$

qui ne peut avoir lieu que dans le cas où

$$A > C. \qquad (1.4.23)$$

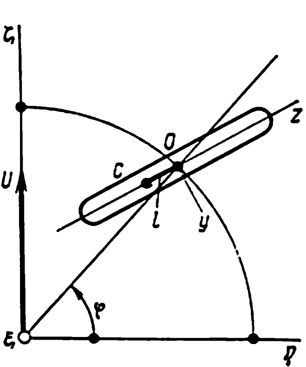


Fig. 21

En même temps, la distance l entre le point de suspension du pendule et son centre de gravité doit être suffisamment petite. Suivant l'inégalité (1.4.23), l'ellipsoïde d'inertie du pendule construit pour son point de suspension, doit être allongé suivant l'axe de symétrie dynamique z; par conséquent, le corps du pendule doit, lui aussi, avoir une forme allongée suivant l'axe z (fig. 21).

Développons les fonctions trigonométriques figurant dans l'équation (1.4.19) en séries suivant les puissances de l'angle cherché α et ne gardons dans ces développements que les termes de premier ordre par rapport à cette grandeur. Nous obtenons la relation

$$\alpha = \frac{U^2r^3}{2fM}\left\{\left(1-\frac{A-C}{lmR}\right)\sin 2\varphi + \right.$$
$$\left. + 2\alpha\left[\left(1-\frac{A-C}{lmR}\right)\cos 2\varphi + \sin^2\varphi\right]\right\} \quad (1.4.24)$$

qui, de même que l'équation (1.4.19), se transforme en identité pour $\alpha = 0$, si la condition (1.4.20) est réalisée.

Le facteur devant l'accolade au second membre de l'égalité (1.4.24) est égal, avec une grande précision, au rapport de la force centrifuge, due à la rotation de la Terre, au double de la force de pesanteur d'un point matériel situé à l'équateur. En effet on a

$$\frac{U^2r^3}{fM} \simeq mU^2R\,\frac{R^2}{fmM} = \frac{mU^2R}{F} \simeq \frac{mU^2R}{mg}, \qquad (1.4.25)$$

où m est la masse du point matériel, g l'accélération de la pesanteur et de plus on admet que d'une façon approchée

$$r \simeq R, \quad F \simeq mg. \tag{1.4.26}$$

Il n'est pas difficile de voir que le facteur mentionné (1.4.25) est considérablement plus petit (de trois cent fois environ) que l'unité. Ceci permet de négliger, au second membre de la relation (1.4.24), le produit de ce facteur par la valeur de l'angle α, en supposant que cette dernière est, elle aussi, petite devant l'unité. Il en résulte la formule approchée

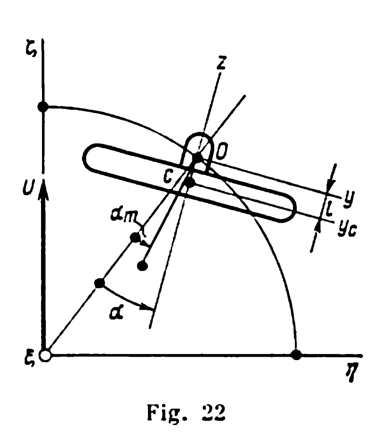


Fig. 22

$$\alpha = \frac{U^2R}{2g}\left(1 - \frac{A-C}{lmR}\right)\sin 2\varphi \tag{1.4.27}$$

bien commode pour le calcul des petites valeurs de l'angle α qui caractérise l'écart de l'axe z de symétrie dynamique du pendule composé par rapport à la direction vers le centre de la Terre. Cette formule montre, elle aussi, que l'angle α s'annule lorsque la condition (1.4.20) est réalisée.

Désignons par A_c le moment d'inertie du pendule par rapport à une droite parallèle à l'axe x et passant par le centre de gravité du pendule. En vertu du théorème de Steiner, on a

$$A = A_c + ml^2. \tag{1.4.28}$$

La formule (1.4.27) prend maintenant la forme

$$\alpha = \frac{U^2R}{2g}\left(1 - \frac{l}{R} - \frac{A_c - C}{lmR}\right)\sin 2\varphi. \tag{1.4.29}$$

Dans le cas d'un pendule simple de longueur l, dans la dernière formule il convient de poser

$$A_c = C = 0. \tag{1.4.30}$$

Il en résulte la formule suivante pour l'angle α_m, c'est-à-dire pour l'écart d'un pendule simple vers le sud de la direction au centre de la Terre:

$$\alpha_m = \frac{U^2R}{2g}\left(1 - \frac{l}{R}\right)\sin 2\varphi. \tag{1.4.31}$$

Dans les formules (1.4.29) et (1.4.31) on peut, bien entendu, négliger devant l'unité le rapport de la longueur l du pendule au rayon R de la Terre. La comparaison de ces formules permet de conclure que l'angle d'écart α d'un pendule composé peut être soit plus grand, soit

plus petit que l'angle d'écart α_m d'un pendule simple, suivant que le moment d'inertie A_c est plus petit ou plus grand que C, c'est-à-dire suivant la forme de l'ellipsoïde central d'inertie du pendule composé. Si l'ellipsoïde est allongé, on a $\alpha < \alpha_m$, et inversement, s'il est aplati, $\alpha > \alpha_m$. Dans le dernier cas, le corps du pendule composé doit être réalisé sous forme d'un disque mince (fig. 22).

BIBLIOGRAPHIE

Андреев В. Д. Об одном случае малых колебаний физического маятника с подвижной точкой опоры (*V. Andréev*. Sur un cas des petites oscillations d'un pendule composé à point d'appui mobile). — ПММ, 1958, т. 22, вып. 6 (en russe).

Булгаков Б. В. Прикладная теория гироскопов (*B. Boulgakov*. Théorie appliquée des gyroscopes). М., Гостехиздат, 1955 (en russe).

Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики (*N. Boukhgolts*. Cours principal de mécanique rationnelle). Ч. 1-2. М., « Наука », 1972 (en russe).

Ишлинский А. Ю. Об относительном равновесии физического маятника с подвижной точкой опоры (*A. Ishlinsky*. Sur l'équilibre relatif d'un pendule composé à point d'appui mobile). — ПММ, 1956, т. 20, вып. 3 (en russe).

Ишлинский А. Ю. Классическая механика, силы инерции, невесомость (*A. Ishlinsky*. Mécanique classique, forces d'inertie et apesanteur). — Dans le recueil: Теоретическая механика во втузах (Mécanique rationnelle à l'école supérieure). Изд. 2-е. М., « Высш. школа », 1975 (en russe).

Лурье А. И. Свободное падение материальной точки в кабине спутника (*A. Lourier*. Chute libre d'un point matériel dans la cabine d'un satellite artificiel). — ПММ, 1963, т. 27, вып. 1 (en russe).

Тихменев С. С. О положении равновесия физического маятника, установленного на подвижном основании (*S. Tikhménev*. Sur la position d'équilibre d'un pendule composé placé sur un support mobile). — Dans le recueil: Элементы расчёта точных приборов (Eléments de calcul des appareils de précision). М., Оборонгиз, 1954 (en russe).

Darboux G. Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. P. 1-4. Paris, Gauthier-Villars, 1887.

Einstein A. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. — Ann. Physik, 1916, Bd. 49, H. 7.

Feynman R.P., Leighton R.B., Sands M. The Feynman lectures on physics. Vol. I. Reading (Mass.), Addison-Wesley Publ., 1963.

Foucault L. Sur une nouvelle démonstration expérimentale du mouvement de la Terre, fondée sur la fixité du plan de rotation. — C. r. Acad. sci., Paris, 1852, vol. 35.

Inertial guidance. Ed. by *Pittman G.R.* N.Y.-London, 1962.

Schüler M. Die Störung von Pendel und Kreiselapparaten durch die Beschleunigung des Fahrzeuges. — Phys. Z., 1923, B. 24, H. 16.

Schüler M. Mathematischer Anhang zu dem Vortrage von Dr. Anschütz-Kämpfe über « Der Kreisel als Richtungsweiser auf der Erde mit besonderer Berucksichtigung seiner Verwendbarkeit auf Schiffen ». — Jahrb. Schiffbautechn. Ges., 1909, Bd. 10.

CHAPITRE II

THÉORIE DE PRÉCESSION DES GYROSCOPES

§ 1. Equations d'Euler modifiées

L'élément essentiel de la plupart des dispositifs gyroscopiques qui ont trouvé des applications pratiques est constitué par un corps tournant rapidement autour de son axe : une toupie, un rotor ou un gyroscope proprement dit. Le modèle d'un solide parfait convient parfaitement à la description du mouvement de tels corps. Aussi, les équations du mouvement du solide parfait peuvent-elles servir de base pour construire la théorie des dispositifs gyroscopiques. En étudiant le mouvement d'un solide parfait (sous forme abrégée, d'unsolide) à un seul point fixe par rapport à un système de coordonnées immobile $\xi\eta\zeta$, L. Euler a établi, dans le cas le plus simple, des équations qui portent maintenant son nom. Les trois premières d'entre elles sont généralement appelées *équations dynamiques d'Euler*. Elles ont déjà été indiquées au § 2 du chapitre précédent. Ce sont

$$\begin{aligned} A\frac{dp}{dt}+(C-B)\,qr&=M_x,\\ B\frac{dq}{dt}+(A-C)\,rp&=M_y,\\ C\frac{dr}{dt}+(B-A)\,pq&=M_z, \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

où p, q, r sont les projections de la vitesse angulaire absolue (c'est-à-dire rapportée au système de coordonnées immobile $\xi\eta\zeta$) du solide sur les axes d'un système de coordonnées xyz spécialement choisi, lequel est invariablement lié au solide et donc participe pleinement à son mouvement (fig. 23). L'origine du système xyz est au point fixe du solide et ses axes x, y et z sont à la fois les axes d'inertie principaux du solide. Le choix d'un tel système de coordonnées a prédéterminé dans une large mesure le succès de l'étude de plusieurs problèmes dans la théorie du mouvement du solide à un point fixe. Rappelons que les grandeurs A, B, C figurant dans les équations dynamiques d'Euler sont les moments d'inertie principaux du solide, c'est-à-dire les moments par rapport aux axes d'inertie principaux x, y, z. A leur tour, M_x, M_y, M_z sont les projections du vecteur moment résultant, par rapport au point fixe, du système de forces agissant

sur le solide. Il est évident que les grandeurs M_x, M_y, M_z peuvent également être interprétées comme sommes des moments des forces appliquées au solide respectivement par rapport aux axes x, y, z. Dans certains cas, elles seront appelées, pour abréger, tout simplement moments M_x, M_y, M_z.

Reproduisons également les équations cinématiques d'Euler (v. chap. I, § 2):

$$\begin{aligned} p &= \frac{d\psi}{dt}\sin\theta\sin\varphi + \frac{d\theta}{dt}\cos\varphi, \\ q &= \frac{d\psi}{dt}\sin\theta\cos\varphi - \frac{d\theta}{dt}\sin\varphi, \\ r &= \frac{d\psi}{dt}\cos\theta + \frac{d\varphi}{dt}, \end{aligned} \qquad (2.1.2)$$

qui relient les projections de la vitesse angulaire ω du solide aux angles d'Euler ψ, θ, φ et à leurs dérivées par rapport au temps. Ces angles déterminent à tout instant la position du système de coordonnées xyz et donc celle du solide par rapport au système immobile $\xi\eta\zeta$ (fig. 14).

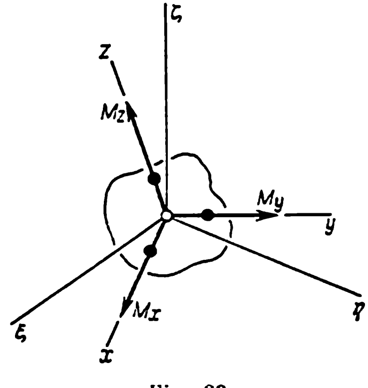


Fig. 23

La résolution de six équations différentielles d'Euler par rapport à six fonctions du temps inconnues p, q, r, ψ, θ, φ sous différentes hypothèses faites sur: les valeurs initiales de ces fonctions, les rapports des moments d'inertie principaux A, B, C et les lois de variation des forces agissant sur le solide (c'est-à-dire des moments M_x, M_y, M_z), a attiré l'attention d'un grand nombre de mathématiciens. Les résultats de leurs recherches sont exposés dans des traités spécialisés de dynamique et en partie dans les manuels de mécanique rationnelle.

Malheureusement, les équations dynamiques d'Euler et les angles d'Euler ψ, θ et φ se sont avérés peu commodes pour l'étude des phénomènes gyroscopiques. Les raisons en sont les suivantes. Le rotor de gyroscope représente généralement un corps rapidement tournant. Un des axes d'inertie principaux de ce corps est l'axe de symétrie dynamique ; il est désigné le plus souvent par la lettre z. Les deux autres axes du système de coordonnées xyz lié au corps solide doivent être désignés naturellement par x et y. Il s'ensuit que les moments d'inertie principaux A et B du rotor doivent être considérés comme étant égaux l'un à l'autre. La projection de la vitesse angulaire sur l'axe z, c'est-à-dire la quantité r, est, en règle générale, beaucoup plus

grande que ses deux autres projections p et q, respectivement sur les axes x et y. Ainsi, la rotation du rotor se produit principalement autour de l'axe z et donc, les axes x et y changent rapidement leur orientation. C'est pourquoi, la connaissance des projections p et q en tant que fonctions du temps ne donne pas une idée précise du changement réel de l'orientation du vecteur vitesse angulaire par rapport au système de coordonnées immobile.

Dans la plupart des cas, l'axe du rotor rapidement tournant d'un gyroscope ne s'écarte que peu d'une certaine direction moyenne à variation relativement lente. Par suite, si l'axe ζ du système de coordonnées immobile $\xi\eta\zeta$ est orienté de telle sorte qu'à un certain instant il se confonde avec l'axe z du rotor, l'angle θ des axes ζ et z, qui est un des angles d'Euler, sera petit pendant un intervalle de temps suivant (bien entendu, pas trop long). Pour construire les deux autres angles d'Euler, il convient de déterminer une ligne u dite des nœuds (fig. 14) qui est la perpendiculaire au plan contenant les axes ζ et z ou, ce qui revient au même, la droite d'intersection des plans $\xi\eta$ et xy. L'angle formé par l'axe ξ avec la ligne des nœuds u est l'angle ψ et celui que forme l'axe x avec la ligne des nœuds est l'angle φ. Il n'est pas difficile de voir que, même dans le cas de faibles mouvements de l'axe z au voisinage de l'axe ζ, le plan ζz, et donc la ligne des nœuds u, peuvent changer brusquement leur orientation (voir tome I, chap. III, § 5). Les angles ψ et φ subiront dans ces conditions de fortes variations dont le caractère ne permet pas de se faire facilement une idée exacte du mouvement réel de l'axe z lié au solide par rapport au système de coordonnées immobile $\xi\eta\zeta$. L'examen des équations cinématiques d'Euler (2.1.2) nous conduit à la même conclusion si l'angle θ qu'elles contiennent est supposé petit.

Ces deux circonstances qui empêchent d'utiliser directement les équations dynamiques et cinématiques d'Euler dans la théorie des gyroscopes rendent nécessaire une modification appropriée de la forme de ces équations. Tout d'abord, prenons au lieu de l'ensemble des angles d'Euler ψ, θ et φ un autre ensemble (v. tome I, chap. III, § 6) proposé par A. N. Krylov [1]). Pour la commodité de l'exposé qui va suivre, décrivons ces angles relativement aux systèmes de coordonnées $\xi\eta\zeta$ et xyz introduits plus haut.

Introduisons un trièdre auxiliaire *abc*. Supposons que dans la position initiale de ce trièdre ses arêtes *a*, *b*, *c* se confondent respectivement avec les axes ξ, η, ζ du système de coordonnées immobile $\xi\eta\zeta$. Faisons tourner le trièdre *abc* d'un angle α autour de l'axe ξ ou, ce qui revient au même, autour de l'arête *a*, en considérant comme d'habitude que l'angle est positif si la rotation s'effectue en sens

[1]) *Крылов А. Н., Крутков Ю. А.* « Общая теория гироскопов и некоторых технических их применений » (*A. Krylov, You. Kroutkov.* « Théorie générale des gyroscopes et de certaines de leurs applications industrielles »). Л., Изд-во АН СССР, 1932 (en russe).

inverse des aiguilles d'une montre pour un observateur placé dans la partie positive de l'axe ξ. Par suite d'une telle rotation, le trièdre *abc* prendra la position d'un système de coordonnées $x_2y_2z_2$ dont l'axe x_2 se confond avec l'axe ξ du système $\xi\eta\zeta$ (fig. 24). Faisons faire une nouvelle rotation au trièdre, cette fois d'un angle β autour de l'axe y_2 qui se confond avec l'arête *b* dans sa nouvelle position, c'est-à-dire

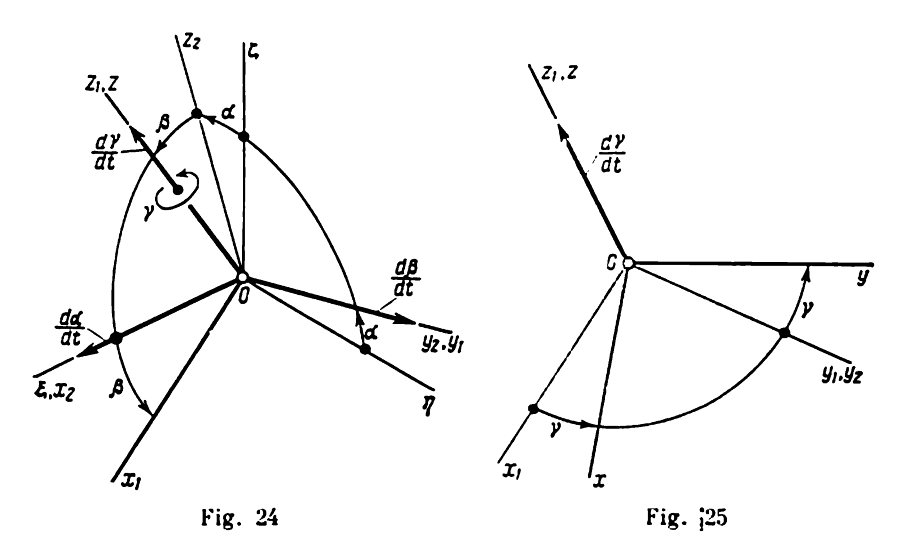


Fig. 24 Fig. 25

dans la position prise par l'arête *b* après la première rotation du trièdre. D'une manière analogue, l'angle β sera considéré comme positif si la rotation se fait en sens inverse des aiguilles d'une montre. Par suite de la deuxième rotation, le trièdre prendra la position d'un nouveau système de coordonnées $x_1y_1z_1$ dont l'axe y_1 se confond avec l'axe y_2 du système $x_2y_2z_2$ (fig. 24). Enfin, faisons passer le trièdre *abc* de la position $x_1y_1z_1$ dans la position xyz par une troisième rotation d'angle γ autour de l'arête *c* qui se confond après deux rotations précédentes avec l'axe z_1 ou, ce qui revient au même, avec l'axe z du système de coordonnées xyz (fig. 25). Ainsi qu'on l'a dit plus haut, le système xyz est supposé invariablement lié au solide qui effectue un mouvement autour de l'origine du système de coordonnées immobile $\xi\eta\zeta$.

Les angles α, β, γ portent le nom d'angles d'Euler-Krylov (v. tome I, chap. III, § 6). De même que les angles classiques d'Euler, ils caractérisent entièrement la position du système de coordonnées xyz et donc celle du solide auquel il est invariablement lié, par rapport au système de coordonnées $\xi\eta\zeta$. En particulier, l'orientation de l'axe z est déterminée dans ce système par les angles α et β qui sont petits si l'angle θ des axes z et ζ est petit (fig. 24).

Les projections de la vitesse angulaire du solide sur les axes x, y et z qui lui sont liés, exprimées par les angles d'Euler-Krylov et leurs dérivées par rapport au temps sont données par les formules

$$\begin{aligned} p &= \frac{d\alpha}{dt}\cos\beta\cos\gamma + \frac{d\beta}{dt}\sin\gamma, \\ q &= -\frac{d\alpha}{dt}\cos\beta\sin\gamma + \frac{d\beta}{dt}\cos\gamma, \\ r &= \frac{d\alpha}{dt}\sin\beta + \frac{d\gamma}{dt} \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

qui ne sont pas difficiles à obtenir si l'on utilise les résultats exposés au tome I, chap. III, § 6, ainsi que les figures 24 et 25. Ces relations

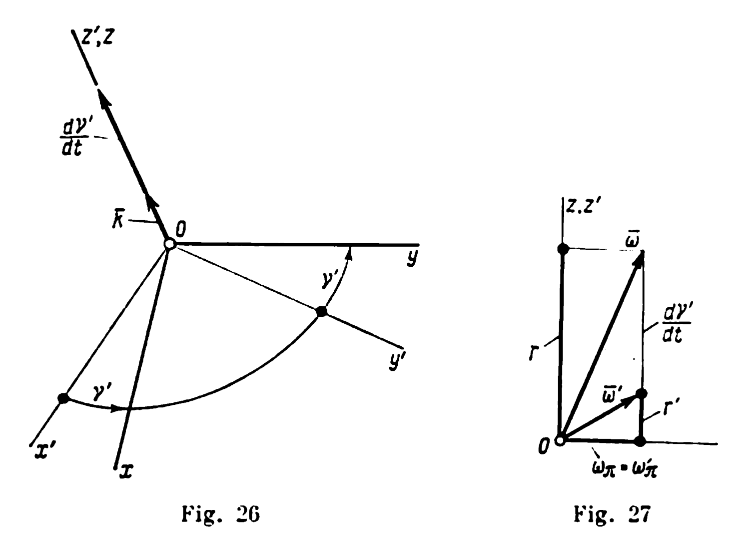


Fig. 26 Fig. 27

sont utilisées dans la théorie des gyroscopes incomparablement plus souvent que les équations cinématiques d'Euler.

Reprenons les équations dynamiques d'Euler (2.1.1). Afin de les mettre sous une forme commode pour l'utilisation dans la théorie des gyroscopes, introduisons en plus du système de coordonnées xyz rigidement lié au solide, c'est-à-dire au rotor de gyroscope, un système de coordonnées auxiliaire $x'y'z'$ dont l'axe z' est constamment confondu avec l'axe z (fig. 26). Le système $x'y'z'$ se comporte comme s'il était entraîné par le corps solide ; la composante de la vitesse angulaire du système $x'y'z'$ le long de l'axe z' (ou, ce qui revient au même, le long de l'axe z) diffère, bien entendu, de la composante correspondante de la vitesse angulaire du corps. Nous appellerons un tel système de coordonnées *système entraîné*.

Désignons par γ' l'angle des axes x' et x et considérons-le comme positif si le système de coordonnées xyz a tourné en sens inverse des aiguilles d'une montre par rapport au système entraîné $x'y'z'$, la rotation étant observée du côté de la partie positive de l'axe z (z'). Il est évident que le vecteur vitesse angulaire $\bar{\omega}$ du système xyz rigidement lié au rotor de gyroscope ne diffère du vecteur vitesse angu-

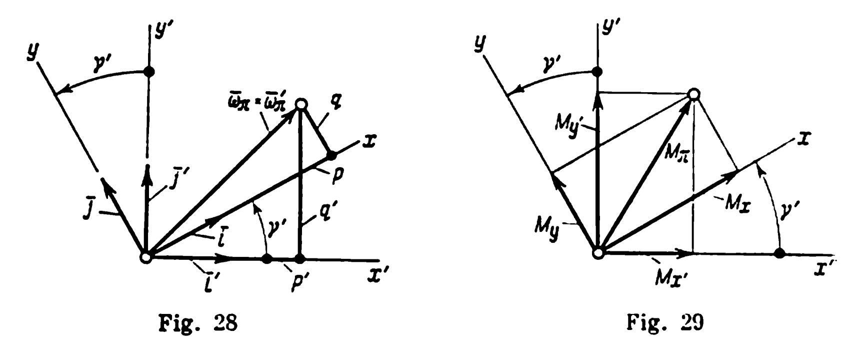


Fig. 28 Fig. 29

laire $\bar{\omega}'$ du système entraîné $x'y'z'$ que par la valeur de la vitesse relative $d\gamma'/dt$ (orientée le long des axes z' et z confondus, fig. 26 et 27). Ainsi

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}' + \bar{k}\,\frac{d\gamma'}{dt} \tag{2.1.4}$$

et donc

$$r = r' + \frac{d\gamma'}{dt}. \tag{2.1.5}$$

Ici $\bar{k}$ est le vecteur unitaire orienté le long des axes confondus z et z'; r et r' sont les projections des vitesses angulaires $\bar{\omega}$ et $\bar{\omega}'$ sur l'axe z (z').

Il est évident que la composante $\bar{\omega}_\pi$ de la vitesse angulaire $\bar{\omega}$, située dans le plan xy (fig. 27 et 28), coïncide avec la composante analogue $\bar{\omega}'_\pi$ de la vitesse angulaire $\bar{\omega}'$, d'où il résulte l'égalité

$$\bar{i}p + \bar{j}q = \bar{i}'p' + \bar{j}'q'. \tag{2.1.6}$$

Ici $\bar{i}$, $\bar{j}$ et $\bar{i}'$, $\bar{j}'$ sont les vecteurs unitaires orientés respectivement suivant les axes x, y et x', y' ; p, q sont, comme précédemment, les projections du vecteur vitesse angulaire $\bar{\omega}$ du rotor de gyroscope (ou, ce qui revient au même, du système de coordonnées xyz) sur les axes x et y; enfin, p', q' sont les projections du vecteur vitesse angulaire $\bar{\omega}'$ du système de coordonnées $x'y'z'$ sur les axes x', y'. La dernière égalité vectorielle (fig. 28) entraîne les formules

$$\begin{aligned} p &= p'\cos\gamma' + q'\sin\gamma', \\ q &= -\,p'\sin\gamma' + q'\cos\gamma' \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

qui expriment les projections p et q de la vitesse angulaire $\bar{\omega}$ sur les axes x et y par l'intermédiaire des projections p' et q' de la vitesse angulaire $\bar{\omega}'$ sur les axes x' et y'.

Multiplions les deux membres de la deuxième formule (2.1.7) par $i = \sqrt{-1}$ et additionnons membre à membre le résultat obtenu à la première formule (2.1.7). Une telle opération, appelée *compression*, conduit à une seule égalité reliant maintenant des quantités complexes. Dans notre cas, il vient

$$p + iq = (p' + iq') \exp(-i\gamma'). \tag{2.1.8}$$

A leur tour, les formules (fig. 29)

$$\begin{aligned} M_x &= M_{x'} \cos\gamma' + M_{y'} \sin\gamma', \\ M_y &= -M_{x'} \sin\gamma' + M_{y'} \cos\gamma' \end{aligned} \tag{2.1.9}$$

ou encore, après la compression,

$$M_x + iM_y = (M_{x'} + iM_{y'}) \exp(-i\gamma') \tag{2.1.10}$$

définissent la relation entre les sommes des moments, par rapport aux axes x et y, des forces appliquées au rotor de gyroscope et les sommes analogues des moments des mêmes forces par rapport aux axes x' et y'.

Comme il a été indiqué précédemment, par raison de symétrie du rotor par rapport à l'axe z, dans les équations dynamiques d'Euler (2.1.1) il faut poser $A = B$, ce qui donne

$$\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} + (C - A)\,qr &= M_x, \\ A\frac{dq}{dt} + (A - C)\,rp &= M_y, \\ C\frac{dr}{dt} &= M_z. \end{aligned} \tag{2.1.11}$$

En faisant subir la compression aux deux premières des équations (2.1.11), on obtient

$$A\frac{d}{dt}(p + iq) + i(A - C)(p + iq)\,r = M_x + iM_y \tag{2.1.12}$$

Remplaçons ici les expressions à valeurs complexes $p + iq$ et $M_x + iM_y$ par leurs représentations (2.1.8) et (2.1.10) obtenues plus haut. Puis remplaçons la projection r de la vitesse angulaire du solide sur l'axe z par la somme (2.1.5) de r' et $d\gamma'/dt$ qui lui est égale. En réduisant les termes semblables et en simplifiant par le facteur exponentiel $\exp(-i\gamma')$, on obtient la relation

$$A\frac{d}{dt}(p' + iq') + i(A - C)(p' + iq')\,r' - \\ - i(p' + iq')\,C\frac{d\gamma'}{dt} = M_{x'} + iM_{y'} \tag{2.1.13}$$

qui est équivalente à deux égalités où interviennent les seules grandeurs réelles. Joignons à ces deux égalités une troisième qui s'obtient à partir de la dernière équation dynamique d'Euler (2.1.11) lorsqu'on y remplace r par $r' + d\gamma'/dt$. On est conduit finalement à trois *équations d'Euler modifiées* qui seront appelées encore *équations gyroscopiques*:

$$\begin{aligned} A\frac{dp'}{dt} + (C-A)\,q'r' + q'H' &= M_{x'}, \\ A\frac{dq'}{dt} + (A-C)\,r'p' - p'H' &= M_{y'}, \\ C\frac{dr'}{dt} + \frac{dH'}{dt} &= M_{z'}. \end{aligned} \tag{2.1.14}$$

Dans les équations (2.1.14) on a introduit la désignation

$$H' = C\frac{d\gamma'}{dt} = C\,(r - r') \tag{2.1.15}$$

pour le produit du moment d'inertie C du rotor de gyroscope, par rapport à l'axe de symétrie z, par la vitesse angulaire propre $d\gamma'/dt$ du rotor de gyroscope par rapport au système de coordonnées mobile entraîné $x'y'z'$. La grandeur H' sera appellée *moment cinétique propre* du rotor dans le système de coordonnées entraîné $x'y'z'$. Le choix de ce dernier comporte un certain degré d'arbitraire dû à ce que la projection de la vitesse angulaire du système $x'y'z'$ sur l'axe z', c'est-à-dire la quantité r', peut être donnée, en général, de façon arbitraire. Par suite, dans un autre système de coordonnées entraîné $x^*y^*z^*$ (dont l'axe z^* se confond également avec l'axe z lié au solide), la valeur du moment cinétique propre H^* sera différente de H' par suite d'une autre valeur que prend, dans le cas général, la projection de la vitesse angulaire $\bar{\omega}^*$ de ce système sur l'axe z^* (z), c'est-à-dire la quantité r^*. B. Boulgakov [1]) a introduit un système de coordonnées $x^0y^0z^0$ dit *astatique* dont l'axe z^0, de même que l'axe z', se confond avec l'axe de symétrie dynamique z du corps solide, alors que la projection r^0 de la vitesse angulaire $\bar{\omega}^0$ de ce système sur l'axe z^0 (z) est constamment nulle. Dans ce cas, les équations d'Euler modifiées prennent une forme particulièrement simple

$$\begin{aligned} A\frac{dp^0}{dt} + q^0H^0 &= M_{x^0}, \\ A\frac{dq^0}{dt} - p^0H^0 &= M_{y^0}, \\ \frac{dH^0}{dt} &= M_{z^0}, \end{aligned} \tag{2.1.16}$$

où p^0 et q^0 sont les projections respectives de la vitesse angulaire du système astatique $x^0y^0z^0$ sur ses propres axes x^0 et y^0; H^0 est, par ana-

[1]) *Булгаков Б. В.* « Прикладная теория гироскопов » (*B. Boulgakov.* « Théorie appliquée des gyroscopes »). Изд. 2-е. М., Гостехиздат, 1955 (en russe).

logie avec (2.1.15), égal à

$$H^0 = C\frac{d\gamma^0}{dt} = C(r - r^0) = Cr. \qquad (2.1.17)$$

Ici γ^0 est l'angle des axes x et x^0 (ou, ce qui revient au même, des axes y et y^0).

Les égalités (2.1.16) seront appelées *équations de Boulgakov.* Ces équations permettent une étude simple du mouvement du solide autour d'un point fixe situé sur son axe de symétrie dynamique, dans le cas où est nul le moment résultant M, par rapport à ce point, du système de forces s'exerçant sur le solide, c'est-à-dire dans le cas où les valeurs de M_{x0}, M_{y0} et M_{z0} ou, ce qui revient au même, de M_x, M_y et M_z sont nulles. Suivant la troisième équation de Boulgakov (2.1.16) on déduit que le moment cinétique propre H^0 rapporté au système de coordonnées astatique $x^0y^0z^0$ reste, dans ce cas, constant. Il s'ensuit en vertu de l'égalité (2.1.17) que la projection r de la vitesse angulaire du solide sur l'axe z (z^0) est, elle aussi, constante. Le même résultat découle, bien entendu, directement de la troisième équation (2.1.11) si le moment M_z y est posé égal à zéro.

Etant donné que $M_{x0} = M_{y0} = 0$, multiplions la première et la deuxième équation (2.1.16) respectivement par p^0 et q^0 et additionnons membre à membre les résultats obtenus. Il s'ensuit la relation

$$A\frac{d}{dt}\frac{(p^0)^2 + (q^0)^2}{2} = 0 \qquad (2.1.18)$$

qui permet de conclure que la somme

$$(p^0)^2 + (q^0)^2 = \omega_\pi^2 \qquad (2.1.19)$$

est, elle aussi, constante. Considéré conjointement avec la condition de $r = \text{const}$, ce fait conduit à la conclusion que pour $M_x = M_y = M_z = 0$ le module de la vitesse angulaire du corps solide symétrique ne varie pas avec le temps et que le vecteur $\bar{\omega}$ rapporté au système de coordonnées astatique $x^0y^0z^0$ (ainsi qu'au système xyz lié au solide) est orienté suivant la génératrice d'un cône circulaire d'axe z^0 (z) (fig. 30). Le vecteur vitesse angulaire $\bar{\omega}$ effectue un mouvement circulaire uniforme autour de l'axe z^0 dans le système $x^0y^0z^0$, avec une période

$$T = 2\pi\frac{A}{H^0}. \qquad (2.1.20)$$

En effet, le module du moment cinétique H^0 étant constant, les deux premières équations de Boulgakov (2.1.16) constituent dans ce cas un système de deux équations différentielles linéaires à coefficients constants par rapport aux variables p^0 et q^0, soit

$$\begin{aligned} A\frac{dp^0}{dt} + H^0q^0 = 0, \\ A\frac{dq^0}{dt} - H^0p^0 = 0. \end{aligned} \qquad (2.1.21)$$

Il est aisé de vérifier que leur solution générale s'exprime par deux fonctions trigonométriques suivantes:

$$p^0 = \omega_\pi^0 \cos\left(\frac{H^0}{A}t + \varepsilon\right),$$
$$q^0 = \omega_\pi^0 \sin\left(\frac{H^0}{A}t + \varepsilon\right) \tag{2.1.22}$$

de période T indiquée plus haut. Ici ω_π^0 et ε sont des constantes arbitraires qui se déterminent par les conditions initiales du mouvement. La première d'elles, c'est-à-dire ω_π^0, comporte une interprétation bien simple: c'est la valeur de la projection sur le plan x^0y^0 (xy) du vecteur vitesse angulaire $\bar{\omega}^0$ du système astatique de Boulgakov $x^0y^0z^0$ ou, comme il a été déjà expliqué, le module de la projection ω_π, qui lui est égale, du vecteur vitesse angulaire $\bar{\omega}$ du solide sur le même plan (v. fig. 31 sur laquelle $\vartheta = H^0t/A + \varepsilon$).

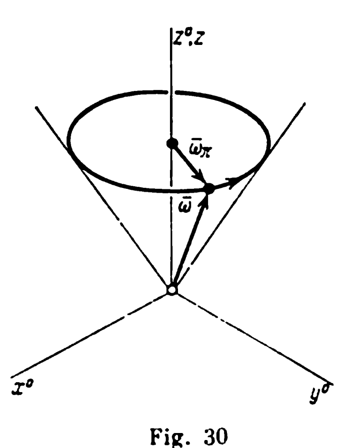


Fig. 30

En principe, le système astatique de Boulgakov peut être « matérialisé ». Envisageons un disque homogène emmanché sur un axe de telle sorte que celui-ci soit son axe de symétrie (v. fig. 32, ainsi que tome I, chap. IV, § 1). Dans ces conditions, en l'absence de frottement, la projection r de la vitesse angulaire du disque sur l'axe z sera constante en vertu de la troisième équation d'Euler (2.1.11). Supposons que les conditions initiales du mouvement du disque soient telles que cette projection est nulle à l'instant initial. Dans un tel cas, elle restera constamment nulle. Si à présent on lie au disque le système de coordonnées $x^0y^0z^0$, en orientant son axe z^0 suivant l'axe z, ce système sera astatique.

Revenons maintenant à l'analyse des équations d'Euler modifiées (2.1.14). Mettons-les sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} A\frac{dp'}{dt} + (C-A)\,q'r' \;&\vdots\; + q'H' = M_{x'},\\ A\frac{dq'}{dt} + (A-C)\,r'p' \;&\vdots\; - p'H' = M_{y'},\\ C\frac{dr'}{dt} \;&\vdots\; + \frac{dH'}{dt} = M_{z'}. \end{aligned} \tag{2.1.23}$$

Les termes situés à gauche de la ligne verticale en traits interrompus sont analogues aux premiers membres des équations ordinaires d'Eu-

ler (2.1.11) qui traduisent, dans ce cas, le mouvement d'un certain solide imaginaire à symétrie axiale, invariablement lié au système de coordonnées entraîné $x'y'z'$. Les moments d'inertie de ce solide imaginaire sont les mêmes que ceux du solide réel, c'est-à dire du rotor de gyroscope. Il est évident que les grandeurs

$$\begin{aligned} M'_{x'} &= A\frac{dp'}{dt} + (C-A)\,q'r', \\ M'_{y'} &= A\frac{dq'}{dt} + (A-C)\,r'p', \\ M'_{z'} &= C\frac{dr'}{dt} \end{aligned} \tag{2.1.24}$$

sont des moments qu'il convient d'appliquer au solide imaginaire pour qu'il effectue, pour des conditions initiales correspondantes le

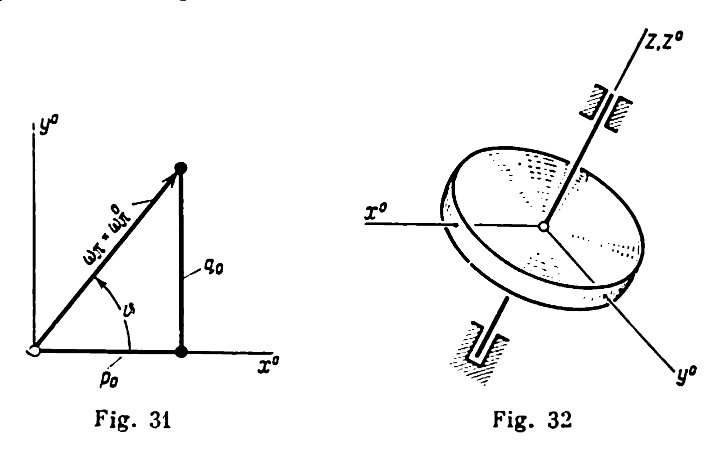


Fig. 31 Fig. 32

même mouvement que le système de coordonnées entraîné $x'y'z'$. Quant aux termes des premiers membres des équations (2.1.23), situés à droite de la ligne verticale en traits interrompus, ils représentent les projections sur les axes x', y' et z' de la dérivée par rapport au temps d'un vecteur $\bar{H}'$ orienté suivant l'axe de symétrie z' (z) du rotor de gyroscope, dont le module est égal à la valeur du moment cinétique propre H'. On peut s'en assurer facilement si l'on tient compte du fait que la dérivée par rapport au temps du vecteur $\bar{H}'$ représente, suivant le théorème bien connu en analyse vectorielle, le vecteur $\bar{V}$ de la vitesse de l'extrémité du vecteur $\bar{H}'$ par rapport à un système de coordonnées immobile quelconque $\xi\eta\zeta$ (fig. 33). Quant à l'origine du vecteur $\bar{H}'$, elle doit être placée en un point fixe, par exemple à l'origine du système $\xi\eta\zeta$ susmentionné. Le vecteur $\bar{H}'$ est par hypothèse rigidement lié à l'axe

z' du système de coordonnées mobile $x'y'z'$. Par suite, la composante $V_{x'}$ de la vitesse de l'extrémité de ce vecteur, orientée suivant l'axe x' est due à la projection q' de la vitesse angulaire $\overline{\omega}'$ du système $x'y'z'$ sur l'axe y' (fig. 34). Il est évident que

$$V_{x'} = \left(\frac{d\overline{H}'}{dt}\right)_{x'} = q'H'. \qquad (2.1.25)$$

D'une manière analogue, la composante $V_{y'}$ de la même vitesse le long de l'axe y' s'exprime par la formule

$$V_{y'} = \left(\frac{d\overline{H}'}{dt}\right)_{y'} = -p'H'. \qquad (2.1.26)$$

Enfin, la composante de la vitesse de l'extrémité du vecteur $\overline{H}'$

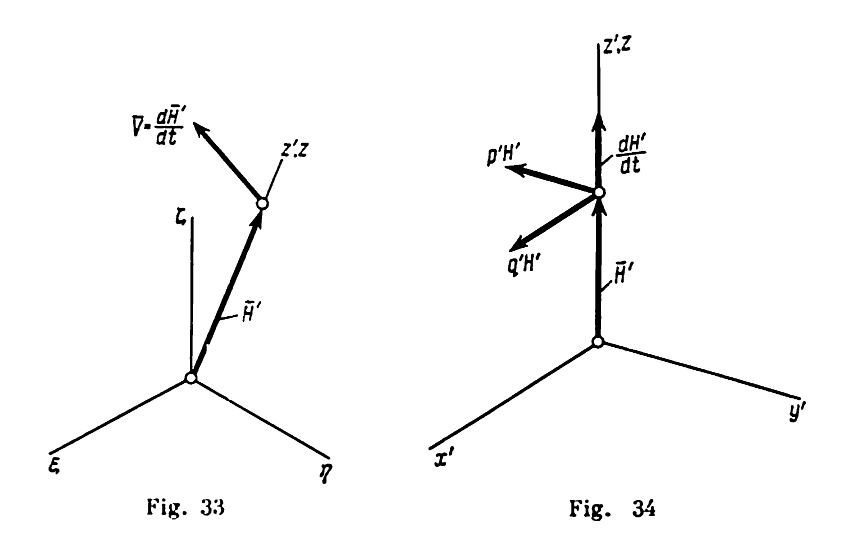


Fig. 33

Fig. 34

le long de l'axe z' (z) est déterminée par la variation du module H' du vecteur et a donc pour expression

$$V_{z'} = \left(\frac{d\overline{H}'}{dt}\right)_{z'} = \frac{dH'}{dt}. \qquad (2.1.27)$$

Ainsi, les équations d'Euler modifiées (2.1.23) peuvent être représentées sous la forme d'une seule équation vectorielle

$$\frac{d\overline{H}'}{dt} = \overline{M} - \overline{M}', \qquad (2.1.28)$$

où $\overline{M}$ est le moment résultant des forces appliquées au rotor de gyroscope et $\overline{M}'$ est le vecteur dont les projections sur les axes x', y' et

z' sont des grandeurs $M'_{x'}$, $M'_{y'}$ et $M'_{z'}$ introduites précédemment à l'aide des égalités (2.1.24).

Confrontons la dernière équation vectorielle (2.1.28) à la relation

$$\frac{d\overline{G}}{dt} = \overline{M} \qquad (2.1.29)$$

qui découle du théorème général de la dynamique d'un système sur la variation de son moment cinétique total. Ici $\overline{G}$ est le moment cinétique total du rotor de gyroscope et $\overline{M}$ est, comme précédemment, le moment résultant des forces agissant sur le rotor. Les deux moments sont pris par rapport à un même point fixe (dans le cas considéré, par rapport à l'origine du système de coordonnées immobile $\xi\eta\zeta$). Les équations classiques d'Euler (2.1.1) et l'équation vectorielle (2.1.29) qui découle du théorème général de la dynamique d'un système sur le moment cinétique sont, bien entendu, équivalentes.

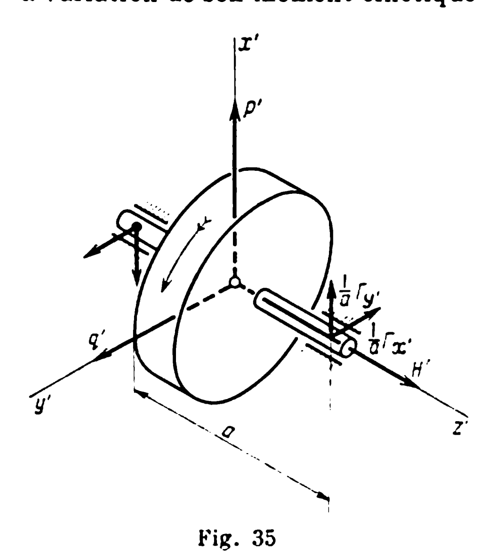


Fig. 35

La représentation vectorielle (2.1.28) des équations d'Euler modifiées ne fait intervenir que la dérivée par rapport au temps du vecteur moment cinétique propre $\overline{H}'$ du rotor de gyroscope, c'est-à-dire la dérivée d'une partie du vecteur moment cinétique total $\overline{G}$ du rotor de gyroscope. Au contraire, l'équation vectorielle (2.1.29) du théorème général de la dynamique du système contient, au premier membre, le vecteur moment cinétique total $\overline{G}$ du même rotor. Il est donc naturel que le second membre de l'équation (2.1.28) contient, au lieu du moment $\overline{M}$ de toutes les forces agissant sur le rotor, la différence géométrique des moments $\overline{M}$ et $\overline{M}'$. D'après ce qui précède, le moment $\overline{M}'$ peut être conventionnellement interprété comme la réaction d'un corps imaginaire identique au rotor de gyroscope. Ce corps est animé d'un mouvement tel qu'il se déplace avec le système de coordonnées entraîné $x'y'z'$.

Illustrons par un exemple l'application des équations d'Euler modifiées (2.1.14) ou (2.1.23). A savoir, déterminons le moment d'un couple supplémentaire de forces de pression que l'axe d'un vo-

lant tournant (rotor) exerce sur les paliers lors d'un mouvement angulaire quelconque du support portant ce volant (fig. 35). Ce moment est généralement appelé *moment gyroscopique.*

Associons le système de coordonnées entraîné $x'y'z'$ au support mobile, en dirigeant son axe z' le long de l'axe z de rotation propre du volant. Considérons d'abord le cas où il n'y a pas de frottement dans les paliers et le milieu environnant le volant n'oppose aucune résistance à sa rotation. En conséquence, posons égal à zéro le moment $M_{z'}$ dans la troisième équation du système (2.1.23). Il en résulte une intégrale première

$$Cr' + H' = H = \text{const.} \tag{2.1.30}$$

Il est évident qu'en vertu de l'égalité (2.1.15) on a

$$H = Cr. \tag{2.1.31}$$

En faisant disparaître, à l'aide de la relation (2.1.30), le moment cinétique propre H' entre les deux premières équations du même système (2.1.23), on peut les mettre sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} A\frac{dp'}{dt} - Ar'q' + q'H &= M_{x'}, \\ A\frac{dq'}{dt} + Ap'r' - p'H &= M_{y'}. \end{aligned} \tag{2.1.32}$$

Désignons par $\bar{\Gamma}$ le moment gyroscopique ou, ce qui revient au même, le moment des forces que le volant exerce sur les paliers dans lesquels tourne son axe. Suivant le principe de Newton sur l'égalité de l'action et de la réaction, le moment gyroscopique $\bar{\Gamma}$ et le moment $\overline{M}$ des forces de réaction des paliers ont le même module mais des sens opposés. On peut donc écrire

$$\Gamma_{x'} = -M_{x'}, \qquad \Gamma_{y'} = -M_{y'}, \qquad \Gamma_{z'} = -M_{z'} = 0. \tag{2.1.33}$$

Les forces de réaction s'exercent sur le volant et donc, suivant les équations (2.1.32), on a

$$\begin{aligned} \Gamma_{x'} &= -q'H - A\left(\frac{dp'}{dt} - r'q'\right), \\ \Gamma_{y'} &= p'H - A\left(\frac{dq'}{dt} + r'p'\right). \end{aligned} \tag{2.1.34}$$

Introduisons maintenant, en plus du vecteur vitesse angulaire $\bar{\omega}'$ du système de coordonnées entraîné:

$$\bar{\omega}' = \bar{i}'p' + \bar{j}'q' + \bar{k}'r', \tag{2.1.35}$$

encore des vecteurs

$$\bar{H} = \bar{k}'H = \bar{k}'Cr \tag{2.1.36}$$

et

$$\overline{G}_\pi = \overline{i}'Ap' + \overline{j}'Aq'. \qquad (2.1.37)$$

Le premier ($\overline{H}$) sera appelé le moment cinétique polaire et le second ($\overline{G}_\pi$) le moment cinétique équatorial du volant (rotor). Il est évident que le vecteur moment cinétique total $\overline{G}$ du volant vaut la somme

$$\overline{G} = \overline{i}'Ap' + \overline{j}'Aq' + \overline{k}'Cr = \overline{G}_\pi + \overline{H}. \qquad (2.1.38)$$

Il est aisé de vérifier que les formules (2.1.34) peuvent maintenant se mettre sous la forme vectorielle suivante:

$$\overline{\Gamma} = \overline{H} \times \overline{\omega}' - \frac{\tilde{d}\overline{G}_\pi}{dt} - \overline{\omega}' \times \overline{G}_\pi. \qquad (2.1.39)$$

Le deuxième terme au second membre de la dernière égalité représente la dérivée locale du vecteur $\overline{G}_\pi'$ dans le système de coordonnées $x'y'z'$ et a pour expression

$$\frac{\tilde{d}\overline{G}_\pi}{dt} = \overline{i}'A\frac{dp'}{dt} + \overline{j}'A\frac{dq'}{dt}. \qquad (2.1.40)$$

Ce terme n'a de l'importance que dans le cas des brusques variations de la vitesse angulaire du support. Quant au troisième terme de l'égalité (2.1.39), il est, en général, petit devant le premier, car la vitesse de rotation propre du volant est, en règle générale, supérieure de plusieurs ordres de grandeur à la vitesse angulaire du support et donc $H \gg G_\pi$. On peut donc poser, avec une approximation suffisant dans la pratique,

$$\overline{\Gamma} = \overline{H} \times \overline{\omega}'. \qquad (2.1.41)$$

La dernière égalité est connue sous le nom de *formule du moment gyroscopique*. Suivant cette formule, le vecteur moment gyroscopique $\overline{\Gamma}$ est orthogonal au plan des vecteurs $\overline{H}$ et $\overline{\omega}'$. Il est dirigé de telle sorte comme s'il tendait à faire coïncider, par le chemin le plus court, le vecteur $\overline{H}$ avec le vecteur $\overline{\omega}'$, c'est-à-dire l'axe z' (z) de rotation propre du volant avec l'axe de rotation instantanée du support (règle de N. E. Joukovski, v. fig. 36). Conformément à la formule vectorielle (2.1.41), les expressions approchées pour les projections $\Gamma_{x'}$ et $\Gamma_{y'}$ du vecteur moment gyroscopique $\overline{\Gamma}$ sur les axes x' et y' du système de coordonnées entraîné $x'y'z'$ sont de la forme

$$\Gamma_{x'} = -q'H, \qquad \Gamma_{y'} = p'H. \qquad (2.1.42)$$

Ces égalités sont faciles à établir si l'on compare les formules (2.1.41), (2.1.39) et (2.1.34).

Les forces de pression exercées par le volant sur les paliers provoquent une déformation de ces derniers, ce qui permet de mesurer le

moment gyroscopique. Il devient possible de déterminer ainsi deux composantes de la vitesse angulaire du support du volant (rotor), à savoir

$$p' = \omega'_{x'}, \quad q' = \omega'_{y'}. \tag{2.1.43}$$

En effet, d'après les formules (2.1.42) pour le moment gyroscopique, on a

$$\omega'_{x'} = \frac{\Gamma_{y'}}{H}, \quad \omega'_{y'} = -\frac{\Gamma_{x'}}{H}. \tag{2.1.44}$$

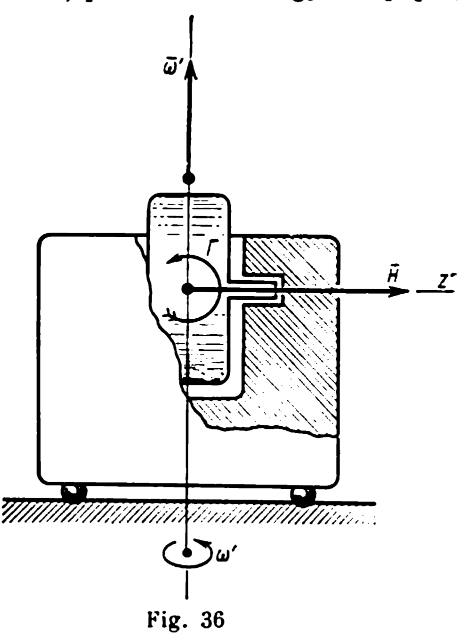


Fig. 36

Ainsi, la valeur du moment gyroscopique pouvant être mesurée, on peut concevoir, en utilisant un volant, un mesureur gyroscopique de vitesse angulaire, c'est-à-dire un *tachymètre gyroscopique* à deux axes sensibles. Or, pour déterminer le vecteur total de la vitesse angulaire $\bar{\omega}'$ du support mobile il n'est pas suffisant d'avoir un seul gyrotachymètre de ce type. Si l'on installe sur le support mobile deux gyrotachymètres pareils, le vecteur vitesse angulaire $\bar{\omega}'$ sera mesuré « par excès ». Par exemple, la projection $\omega'_{y'}$ peut être mesurée à la fois par deux gyrotachymètres pareils (fig. 37).

Une mesure précise des efforts qui prennent naissance dans les paliers se heurte à des difficultés techniques considérables. C'est pourquoi on utilise le plus souvent un gyrotachymètre à un seul axe sensible (fig. 38). Le volant, appelé dans ce cas rotor, est enfermé dans un boîtier dont l'axe tourne dans les paliers du support. La rotation du boîtier par rapport au support est empêchée par un ressort.

Introduisons un système de coordonnées entraîné $x_1y_1z_1$, lié au boîtier, en dirigeant son axe y_1 suivant l'axe du boîtier et l'axe z_1 suivant l'axe z de rotation propre du rotor. L'orientation de l'axe x_1 s'en trouve déterminée de façon univoque. Il est évident que les égalités (2.1.34) restent valables après un changement approprié des indices. On a

$$\begin{aligned} \Gamma_{x_1} &= -q_1H - A\left(\frac{dp_1}{dt} - r_1q_1\right), \\ \Gamma_{y_1} &= p_1H - A\left(\frac{dq_1}{dt} + r_1p_1\right), \end{aligned} \tag{2.1.45}$$

où par Γ_{x_1} et Γ_{y_1} il convient d'entendre maintenant les projections du moment d'une force exercée par le rotor sur le boîtier, et par p_1,

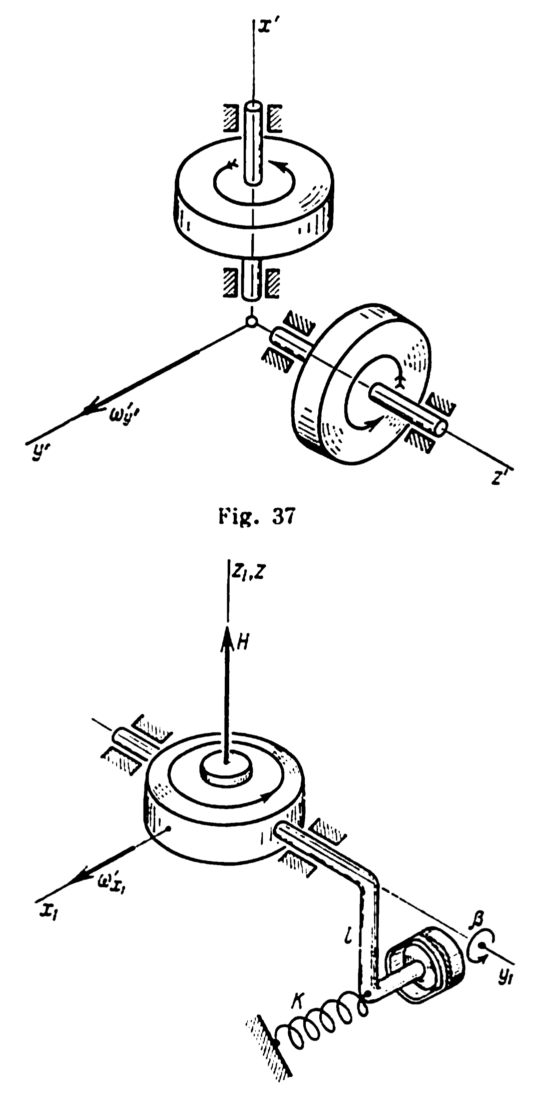


Fig. 37

Fig. 38

q_1, r_1 les projections de la vitesse angulaire du boîtier sur les axes x_1, y_1, z_1. Le moment Γ_{x_1} sera transmis aux paliers de l'axe du rotor et puis aux paliers de l'axe du boîtier. La déformation des paliers

qui en résulte est généralement peu importante. En ce qui concerne le moment Γ_{y_1}, il provoque finalement une déformation du ressort qui s'oppose à la rotation du boîtier autour de l'axe y_1. Par analogie avec ce qui a été fait plus haut, négligeons dans les équations (2.1.45) les termes contenant le facteur A, ainsi que le moment d'inertie, par rapport à l'axe y_1, de la masse du boîtier de gyroscope. Si le ressort est linéaire et sa rigidité est K, on obtient alors

$$p_1 H \simeq K\beta l^2, \tag{2.1.46}$$

où β est l'angle de rotation du boîtier par rapport au support, dont la valeur est facile à mesurer, et l la longueur du levier reliant le ressort à l'axe du boîtier.

Ainsi, la valeur de l'angle β est proportionnelle à la projection p_1 de la vitesse angulaire du boîtier de gyroscope sur l'axe x_1. L'axe x_1 change sa position par rapport au support. Néanmoins, l'angle β étant très réduit, on peut admettre dans la plupart des cas que p_1 est en même temps la projection de la vitesse angulaire du support sur la direction de l'axe x_1 que celui-ci prend lorsque l'angle β est nul.

En plus du ressort, le gyrotachymètre à un axe comporte généralement un amortisseur monté sur l'axe y_1 et servant à amortir les oscillations angulaires du boîtier (v. fig. 38). Ces oscillations peuvent apparaître en cas de brusques variations de la vitesse angulaire du support.

Revenons maintenant aux équations gyroscopiques (2.1.23). Comme il a déjà été dit, dans les conditions habituelles de la rotation rapide du rotor de gyroscope, son axe de symétrie n'est animé que de faibles mouvements autour d'une certaine position moyenne. Par suite, le vecteur vitesse angulaire $\bar{\omega}$ du rotor s'écarte peu de la direction de l'axe de symétrie z (z') du rotor. Il s'ensuit que les projections de la vitesse angulaire du rotor sur les axes x' et y' sont petites devant sa projection sur l'axe z (z'). Or, conformément aux formules (2.1.4) et (2.1.6), ces projections sont égales aux projections sur les mêmes axes du vecteur vitesse angulaire $\bar{\omega}'$ du système de coordonnées entraîné $x'y'z'$. Ainsi, les valeurs de p' et q' sont, en règle générale, petites par rapport à la composante r de la vitesse angulaire $\bar{\omega}$ le long de l'axe z (z'). Le système entraîné $x'y'z'$ peut toujours être choisi de telle sorte que la projection r' de sa vitesse angulaire $\bar{\omega}'$ sur l'axe z' (z) soit, elle aussi, petite devant r. En particulier, dans le cas des axes de Boulgakov x^0, y^0, z^0 cette projection devient tout à fait nulle. Il est logique de supposer que les dérivées par rapport au temps des projections p', q' et r' sont, elles aussi, petites. Compte tenu de ces considérations, on peut admettre que dans de nombreux cas pratiques importants les termes des équations d'Euler modifiées (2.1.23), situés à gauche de la ligne verticale en traits in-

terrompus sont petits par rapport aux termes se trouvant à droite de la même ligne et contenant le module H' du moment cinétique propre du rotor de gyroscope ou sa dérivée par rapport au temps. En négligeant ces petits termes dans les équations d'Euler modifiées, on obtient les nouvelles équations

$$q'H' = M_{x'}, \quad -p'H' = M_{y'}, \quad \frac{dH'}{dt} = M_{z'}, \tag{2.1.47}$$

que nous appellerons *équations de précession* de la théorie des gyroscopes. Compte tenu des considérations exposées plus haut, ces équations peuvent être représentées par une seule équation vectorielle

$$\frac{d\overline{H}'}{dt} = \overline{M}, \tag{2.1.48}$$

où $\overline{H}'$ est, comme précédemment, le vecteur orienté suivant l'axe z (z') de symétrie du rotor de gyroscope, dont le module est égal au moment cinétique propre du rotor, c'est-à-dire à la quantité définie par la formule (2.1.15). Les formules (2.1.41) et (2.1.42), ainsi que l'égalité (2.1.46) se rapportent en fait aux relations de la théorie de précession des gyroscopes.

§ 2. Equations du mouvement de précession des gyroscopes

Lors de l'étude des phénomènes gyroscopiques dans les cours de mécanique rationnelle, on développe un raisonnement à peu près suivant pour justifier la théorie élémentaire des gyroscopes. Le vecteur vitesse angulaire du rotor de gyroscope s'écarte peu de son axe de symétrie, et le vecteur moment cinétique total $\overline{G}$ est dirigé, comme on le sait, suivant la perpendiculaire au plan tangent à l'ellipsoïde d'inertie (fig. 39), construit au point d'intersection de la surface de l'ellipsoïde et du vecteur vitesse angulaire $\overline{\omega}$ du rotor (ou, ce qui revient au même, de son axe de rotation instantané). Par conséquent, lorsque l'écart du vecteur vitesse angulaire $\overline{\omega}$ par rapport à l'axe z de symétrie du rotor est faible, l'écart du vecteur moment cinétique total $\overline{G}$ par rapport à l'axe z est, lui aussi, petit. C'est pourquoi, dans la relation (2.1.29) qui découle du théorème sur la variation du vecteur moment cinétique total $\overline{G}$ du rotor, on peut considérer avec une certaine approximation que ce vecteur est orienté suivant l'axe z et que son module est égal à sa projection sur cet axe. On est conduit ainsi à l'équation vectorielle approchée

$$\frac{d}{dt}(Cr\overline{k}) = \overline{M}, \tag{2.2.1}$$

où $\bar{k}$ est le vecteur unitaire orienté suivant l'axe z, et Cr la composante du moment cinétique total $\bar{G}$ le long de l'axe z. Le produit

$$Cr\bar{k} = \bar{H}, \quad (2.2.2)$$

dans lequel C est le moment d'inertie du rotor par rapport à son axe de symétrie z, et r la projection de la vitesse angulaire sur cet axe, est encore appelé dans la théorie élémentaire des gyroscopes le vecteur moment cinétique propre du rotor. Il est parallèle au vecteur $\bar{H}'$ (v. fig. 34). Des formules (2.1.5) et (2.1.15) données plus haut on tire

$$H = Cr = C\left(r' + \frac{d\gamma'}{dt}\right) = = Cr' + H'. \quad (2.2.3)$$

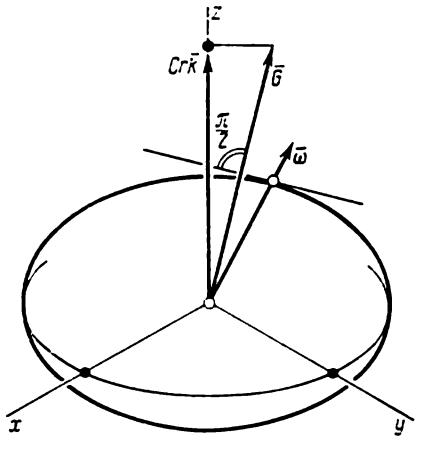


Fig. 39

Il en résulte que le module du vecteur moment cinétique propre du rotor de gyroscope, considéré en théorie élémentaire des gyroscopes, diffère par une petite quantité Cr' du module du vecteur moment cinétique propre $\bar{H}'$ du rotor de gyroscope, introduit plus haut dans le système de coordonnées entraîné $x'y'z'$. Dans le cas du système de coordonnées astatique $x^0y^0z^0$, cette différence devient tout à fait nulle. En effet, par analogie avec l'égalité précédente, on a

$$H = Cr^0 + H^0. \quad (2.2.4)$$

Or, en vertu de la propriété fondamentale du système de coordonnées astatique, $r^0 = 0$.

Ainsi, la différence entre les équations de la théorie élémentaire des gyroscopes et les équations de précession n'est pas essentielle. Néanmoins, la méthode d'obtention des équations de précession (2.1.47) exposée au paragraphe précédent semble être préférable.

La solution approchée du problème de mouvement d'un corps solide à symétrie axiale autour d'un point fixe, obtenue par intégration des équations (2.1.47) de la théorie de précession des gyroscopes constitue une solution exacte des équations (2.1.23) du même problème, ces équations ayant leurs seconds membres légèrement modifiés et la solution ne satisfaisant pas à toutes les conditions initiales du mouvement. En effet, augmentons dans les équations (2.1.23) les valeurs

données des moments $M_{x'}$, $M_{y'}$ et $M_{z'}$ appliqués au solide respectivement des quantités $M'_{x'}$, $M'_{y'}$ et $M'_{z'}$ définies par les formules (2.1.24) et introduisons aux seconds membres de ces équations, au lieu de p', q', les fonctions du temps trouvées par intégration des équations de précession (2.1.47). Toutes les transformations effectuées, les équations d'Euler modifiées ou, ce qui revient au même, les équations rigoureuses (complètes) du mouvement du solide (2.1.23) avec les seconds membres ainsi modifiés seront identiquement satisfaites si l'on prend pour p', q' et H' les solutions des équations de précession (2.1.47). Il en résulte que la précision de la solution du problème de mouvement du solide, obtenue par intégration des équations de précession, se caractérise dans une certaine mesure par la petitesse des « appoints » sus-mentionnés $M'_{x'}$, $M'_{y'}$ et $M'_{z'}$ devant les moments donnés $M_{x'}$, $M_{y'}$ et $M_{z'}$.

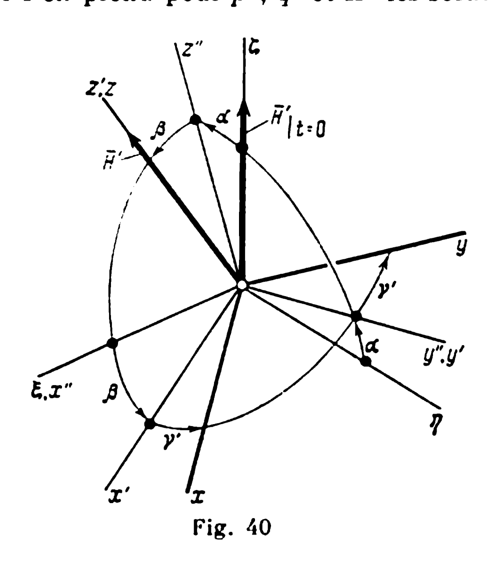


Fig. 40

Considérons la correspondance entre les conditions initiales des équations de précession et des équations complètes. Les équations dynamiques (2.1.1) et cinématiques (2.1.2) d'Euler forment six équations différentielles du premier ordre par rapport aux variables $p, q, r, \psi, \theta, \varphi$. Pour une description complète du mouvement du solide il faut donc avoir six conditions initiales. Elles peuvent être constituées par les conditions d'égalité des angles d'Euler ψ, θ, φ et de leurs dérivées par rapport au temps à des valeurs définies pour l'instant initial du mouvement et données à l'avance. Il en est de même, bien entendu, aussi pour le système d'équations d'Euler modifiées (2.1.14) et des équations cinématiques d'Euler-Krylov (2.1.3) pour lesquelles on peut, dans certains cas, prendre comme conditions initiales les valeurs initiales des angles d'Euler-Krylov α, β, γ et de leurs dérivées par rapport au temps.

Pourtant, l'ordre du système constitué par les équations de précession (2.1.47) de la théorie des gyroscopes jointes aux équations cinématiques d'Euler-Krylov (2.1.3) est inférieur à six. Comme il sera montré plus loin, cet ordre est égal à quatre. Ainsi, la donnée de six conditions initiales dans le cas des équations de précession est superflue. Essayons d'expliquer la contradiction ainsi apparue.

Choisissons le système de coordonnées immobile $\xi\eta\zeta$ et le système entraîné $x'y'z'$ de la façon suivante. Dirigeons l'axe ζ de la même manière que l'axe de symétrie z (z') du rotor était orienté à l'instant initial (fig. 40), et les axes ξ et η de façon quelconque. Dans ce cas, les angles d'Euler-Krylov α et β déterminant l'orientation courante de l'axe z (z') dans le système de coordonnées immobile $\xi\eta\zeta$ seront, en règle générale, peu élevés. Prenons pour angle α l'angle de rotation à partir de la position $\xi\eta\zeta$ d'un certain système de coordonnées $x''y''z''$ autour de l'axe x'' confondu avec l'axe ξ. Cette rotation doit être telle que l'axe z'' se trouve situé dans le plan ξz. Quant à l'angle β, supposons qu'il détermine la rotation du système $x'y'z'$ à partir de la position $x''y''z''$, autour de l'axe y' confondu avec l'axe y''. Par suite de cette rotation du système $x'y'z'$ son axe z' doit être amené en coïncidence avec l'axe de symétrie z du gyroscope.

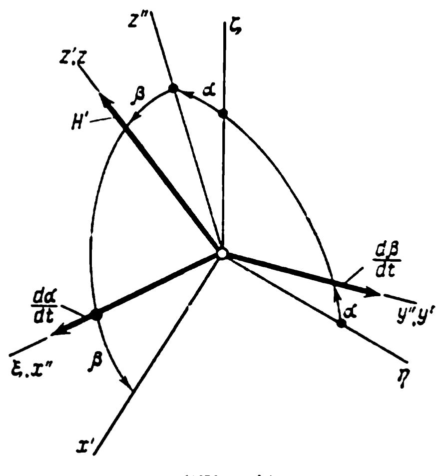


Fig. 41

L'axe z' étant constamment confondu avec l'axe z, le système de coordonnées $x'y'z'$ est, comme il a déjà été dit, partiellement entraîné par le solide en mouvement. On peut donc le prendre pour système de coordonnées entraîné de même nom $x'y'z'$ introduit précédemment lors de l'établissement des équations d'Euler modifiées. Pour angle γ' qui détermine la position du solide par rapport à ce système de coordonnées, prenons, par analogie avec ce qui a été fait précédemment, l'angle des axes x' et x (v. fig. 26). Cet angle augmente lorsque le solide tourne en sens inverse des aiguilles d'une montre par rapport au système de coordonnées $x'y'z'$, si la rotation est observée du côté de la partie positive des axes confondus z' et z.

Il n'est pas difficile de déterminer maintenant les composantes de la vitesse angulaire du système $x'y'z'$ par rapport au système immobile $\xi\eta\zeta$. L'examen de la position relative de ces systèmes (fig. 41) montre immédiatement que

$$p' = \frac{d\alpha}{dt}\cos\beta,$$
$$q' = \frac{d\beta}{dt}, \qquad (2.2.5)$$
$$r' = \frac{d\alpha}{dt}\sin\beta.$$

On peut obtenir les mêmes expressions si dans les formules (2.1.3) qui donnent les projections de la vitesse angulaire du solide par l'intermédiaire des angles d'Euler-Krylov, on pose égal à zéro le troisième de ces angles, à savoir l'angle γ (en amenant en coïncidence par là même les systèmes de coordonnées xyz et $x'y'z'$). En introduisant les expressions (2.2.5) des grandeurs p', q', r' dans les équations de précession (2.1.47) de la théorie des gyroscopes et en tenant compte de la relation (2.1.15), on obtient le système d'équations suivant:

$$\begin{aligned} \frac{d\beta}{dt} H' &= M_{x'}, \\ -\frac{d\alpha}{dt} \cos\beta H' &= M_{y'}, \\ \frac{dH'}{dt} &= M_{z'}, \\ H' &= C\frac{d\gamma'}{dt}. \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Ce système est du quatrième ordre par rapport aux angles d'Euler-Krylov α, β, γ'. Sa solution générale contient seulement quatre constantes arbitraires et non pas six comme c'est le cas des équations d'Euler. Ceci signifie qu'en utilisant la théorie de précession des gyroscopes, on peut donner seulement quatre conditions initiales du mouvement du solide. Elles peuvent être constituées, par exemple, par les valeurs initiales des angles α, β, γ' et de la dérivée première de l'angle γ' par rapport au temps. La dernière condition initiale peut, bien entendu, être remplacée par la donnée de la composante r de la vitesse angulaire du solide à l'instant initial. En effet, si l'on y remplace la désignation γ par γ', on tire de la troisième relation cinématique d'Euler-Krylov

$$r|_{t=0} = \left[\frac{d\gamma'}{dt} + \frac{d\alpha}{dt}\sin\beta\right]_{t=0} \tag{2.2.7}$$

Par ailleurs, suivant la deuxième équation du système (2.2.6), on a

$$\left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_{t=0} = -\left[\frac{1}{H'\cos\beta} M_{y'}\right]_{t=0}. \tag{2.2.8}$$

Ainsi, connaissant les valeurs initiales des grandeurs r et β (ainsi que, bien entendu, la valeur de $M_{y'}$), on peut, compte tenu de la quatrième équation (2.2.6), déterminer la valeur initiale de la dérivée de l'angle γ'.

Ainsi donc, dans le cas des équations de la théorie de précession des gyroscopes, on ne doit pas donner en plus des valeurs initiales des angles α, β, γ' et de la dérivée $d\gamma'/dt$ encore les valeurs initiales des dérivées $d\alpha/dt$ et $d\beta/dt$ ou, ce qui revient au même, des vitesses angulaires des systèmes $x''y''z''$ et $x'y'z'$ respectivement par rapport aux systèmes $\xi\eta\zeta$ et $x''y''z''$ à l'instant $t = 0$. En même temps, il est

évident que pour un énoncé rigoureux du problème la donnée des valeurs initiales des dérivées sus-mentionnées est, au contraire, obligatoire et correspond à l'essence même de l'étude du mouvement du solide ayant un point fixe. La contradiction qui apparaît ici est facile à éliminer. Un mouvement concret du rotor de gyroscope est sans doute déterminé par la donnée des six conditions initiales, c'est-à-dire des trois angles α, β et γ' et de leurs dérivées par rapport au temps $d\alpha/dt$, $d\beta/dt$ et $d\gamma'/dt$. Pourtant, dans la plupart des cas, ceci ne concerne qu'un intervalle de temps bien court qui suit immédiatement l'instant initial. Au cours de cet intervalle de temps, l'axe du rotor effectue des oscillations rapides que l'on appelle *nutations*, autour d'une position moyenne dont la variation de l'orientation est relativement lente. La nutation s'évanouit rapidement. La cause en est la présence de forces d'amortissement qui engendrent partiellement les moments $M_{x'}$, $M_{y'}$, $M_{z'}$, ainsi que l'élasticité imparfaite du matériau dont est fait le gyroscope. La nutation s'accompagne d'une déformation périodique de tous les éléments constitutifs du gyroscope et surtout de son axe. Ceci conduit à l'absorption de l'énergie et finalement à la disparition de la nutation. Plus haut, lors de l'établissement des équations du mouvement du gyroscope, nous n'avons pas tenu compte de l'élasticité de ses éléments. Dans le cas du mouvement de précession, on ne doit tenir compte de la déformation du gyroscope que pour l'étude du comportement des gyroscopes de très haute précision montés sur un support vibrant [1]). Après la disparition de la nutation, le mouvement lent ultérieur de l'axe du rotor, connu sous le nom de *mouvement de précession*, se décrit avec une grande précision justement par les équations de précession de la théorie des gyroscopes. Si l'on calcule dans ce cas les termes dits de nutation (2.1.24) des équations d'Euler modifiées (2.1.23) par lesquels ces équations diffèrent des équations de précession (2.1.47), on constate que ces termes sont très petits devant les valeurs des moments $M_{x'}$, $M_{y'}$, $M_{z'}$ et tendent vers zéro.

Ainsi, si l'on exclut un petit intervalle de temps qui suit immédiatement l'instant initial, le mouvement du rotor de gyroscope s'avère, en fait, indépendant de la donnée des valeurs initiales des dérivées des angles α et β. Une justification rigoureuse de la théorie de précession des gyroscopes fait l'objet des études spéciales fondées, en particulier, sur la théorie des équations différentielles à petit paramètre des dérivées d'ordre le plus élevé des fonctions cherchées.

Des questions analogues se rencontrent également dans d'autres disciplines et notamment dans la théorie de l'électricité. Par exemple,

---

[1]) Voir, par exemple, *Ишлинский А. Ю.* « Механика гироскопических систем » (*A. Ishlinsky.* « Mécanique des systèmes gyroscopiques »). M., Изд-во АН СССР, 1963 (en russe).

lorsqu'un condensateur C (fig. 42) est chargé depuis une source de tension continue U, on doit en toute rigueur tenir compte de la résistance ohmique R du circuit électrique et de son inductance propre L, ce qui exige la résolution d'une équation différentielle du deuxième ordre avec deux conditions initiales. Ces conditions concernent la valeur de la charge initiale du condensateur et du flux magnétique initial de tout le circuit. Dans les conditions habituelles, la partie du phénomène transitoire due à l'inductance s'affaiblit rapidement

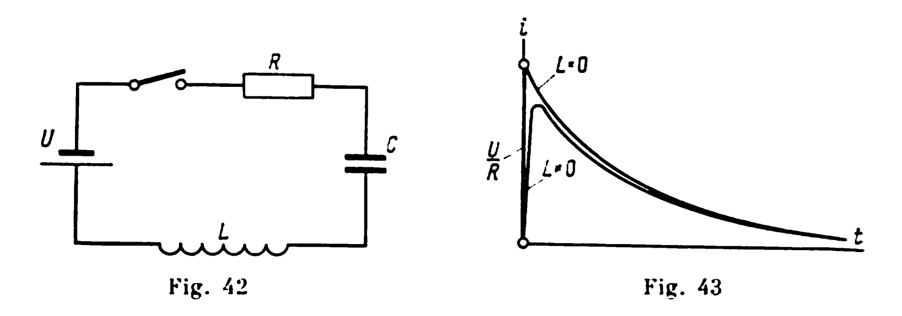


Fig. 42 Fig. 43

(fig. 43), après quoi le courant de charge i circule comme si l'inductance propre du circuit était nulle (fig. 44). Dans ce dernier cas, le phénomène se décrit déjà par une équation du premier ordre dont la résolution n'exige de connaître qu'une seule condition initiale qui est la charge initiale du condensateur (ou la tension initiale entre

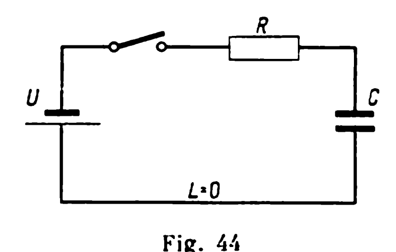


Fig. 44

ses armatures qui est, comme on le sait, proportionnelle à cette charge). Ainsi, dans la plupart des cas, la deuxième condition initiale devient peu importante pour le phénomène considéré. Or, la situation devient différente si le circuit de charge comporte une réactance inductive considérable, par exemple une bobine d'inductance (fig. 42). Dans ce cas, pour une description satisfaisante du phénomène transitoire il faut résoudre une équation différentielle du deuxième ordre et donc utiliser deux conditions initiales.

Dans la théorie des gyroscopes, la prise en compte des termes de

nutation que font intervenir les équations différentielles du mouvement des systèmes gyroscopiques se révèle nécessaire lors de l'étude du comportement des gyroscopes de haute précision et des questions relatives à la stabilité de fonctionnement des stabilisateurs gyroscopiques (v. chap. III, §§ 5 et 6 du présent livre). Les masses à stabiliser possèdent, en règle générale, des moments d'inertie importants. Ces derniers interviennent, comme coefficients, dans les équations du mouvement d'un système gyroscopique. De ce fait, les considérations exposées plus haut sur la possibilité de négliger dans ces équations les dérivées secondes des angles qui déterminent la position de l'axe du rotor, cessent d'être valables. Néanmoins, pour l'étude de la stabilité du mouvement de tels systèmes gyroscopiques, on peut se contenter des équations des petits mouvements autour de la position moyenne de l'axe du rotor et négliger dans les équations du mouvement (2.1.14) les termes contenant les produits des projections de la vitesse

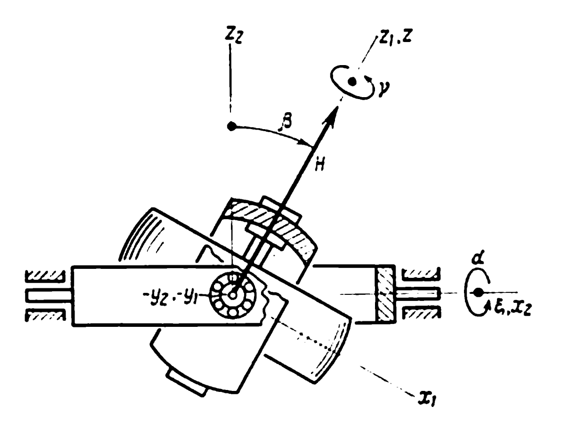


Fig. 45

angulaire du système de coordonnées entraîné. Dans de nombreux cas, on peut également ne pas tenir compte du mouvement de précession de l'axe du gyroscope. Il en résulte que bien souvent l'étude de la stabilité d'un stabilisateur gyroscopique se ramène, après plusieurs simplifications, à la résolution d'un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants (v. chap. III, §§ 5 et 6).

Reportons-nous maintenant au gyroscope suspendu à la cardan (fig. 45) [1]. La suspension à la cardan est constituée par deux anneaux : un anneau extérieur relié par une articulation plane au support et un anneau intérieur [2] qui est relié à son tour, par une autre articulation plane, à l'anneau extérieur. Les axes des deux articulations sont perpendiculaires l'un à l'autre. Les paliers de l'axe du rotor sont incorporés à l'anneau de cardan intérieur.

Désignons par $x_2y_2z_2$ un système de coordonnées lié à l'anneau de cardan extérieur et dirigeons son axe x_2 suivant l'axe de la première articulation et son axe y_2 suivant l'axe de la deuxième articulation. Attachons au support qui est, en règle générale, mobile, un système de coordonnées $\xi\eta\zeta$ en orientant son axe ξ suivant l'axe x_2 de la pre-

[1]) Il existe des gyroscopes qui ne comportent pas de dispositif de suspension à la cardan, par exemple des gyroscopes à bille suspendue dont la toupie tient toute seule en l'air dans son boîtier grâce soit à un « coussinet pneuma-

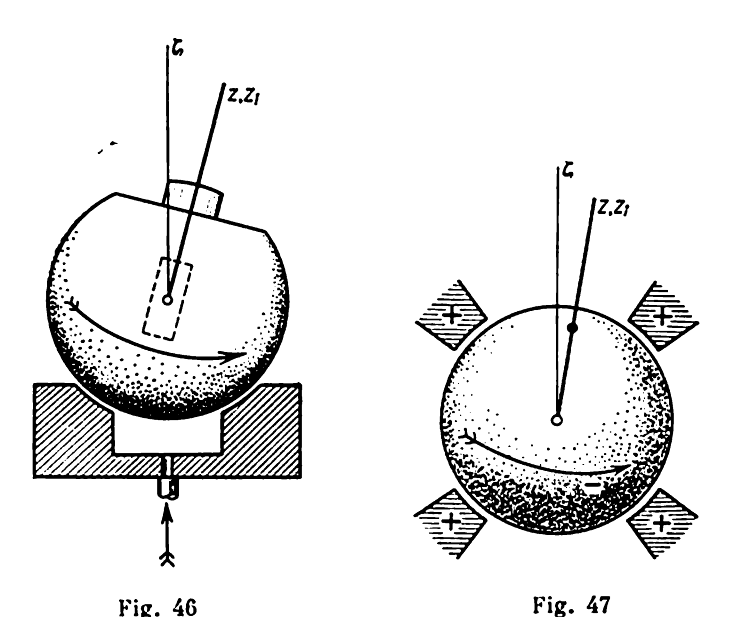


Fig. 46 Fig. 47

tique » (une couche d'air aspiré sous une bille en rotation) (fig. 46), soit à un coussinet magnétique ou électrique réglable (fig. 47). Dans le cas de tels gyroscopes, le système de coordonnées $x''y''z''$ (ou $x_2y_2z_2$) et le système entraîné $x'y'z'$ (ou $x_1y_1z_1$) ne sont liés à aucun corps supplémentaire et sont introduits par une voie purement géométrique.

[2]) Dans certains cas, le rotor de gyroscope est isolé du milieu extérieur. A cet effet, le rotor peut être fermé par deux couvercles rigidement reliés à l'anneau intérieur (fig. 48) ou enfermé dans un boîtier (fig. 49). Il est évident que

mière articulation. Désignons par α (fig. 50) l'angle de rotation du système $x_2y_2z_2$ par rapport au système $\xi\eta\zeta$ ou, ce qui revient au même, de l'anneau extérieur par rapport au support sur lequel est monté le gyroscope suspendu à la cardan. Associons à l'anneau de cardan intérieur un système de coordonnées $x_1y_1z_1$. L'axe y_1 de ce système est confondu avec l'axe y_2 du système $x_2y_2z_2$ (fig. 45) et constitue donc l'axe de la deuxième articulation autour duquel l'anneau intérieur tourne par rapport à l'anneau extérieur. L'angle de cette dernière rotation (fig. 51) sera désigné par β. Lorsque $\alpha = \beta = 0$, les axes correspondants des systèmes de coordonnées $x_1y_1z_1$, $x_2y_2z_2$, $\xi\eta\zeta$ se confondent.

Le plan y_1z_1 constitue généralement ce que l'on appelle le plan mitan de l'anneau intérieur, c'est-à-dire son plan de symétrie le plus près duquel est disposé le centre de masse de l'anneau (fig. 52). L'axe z_1 se confond, en règle générale, avec l'axe z de rotation propre du rotor de gyroscope, c'est-à-dire avec l'axe de sa rotation par rapport à l'anneau intérieur.

Désignons par γ l'angle de rotation du rotor par rapport à l'anneau intérieur. On l'appelle *angle de rotation propre* du rotor de gyroscope. Pour mesurer l'angle γ, il convient d'introduire un système de coordonnées xyz rigidement lié au rotor et tel que son axe z soit

cinématiquement le boîtier et l'anneau intérieur sont identiques. Au point de vue dynamique ils ne sont équivalents que si leurs moments d'inertie sont égaux.

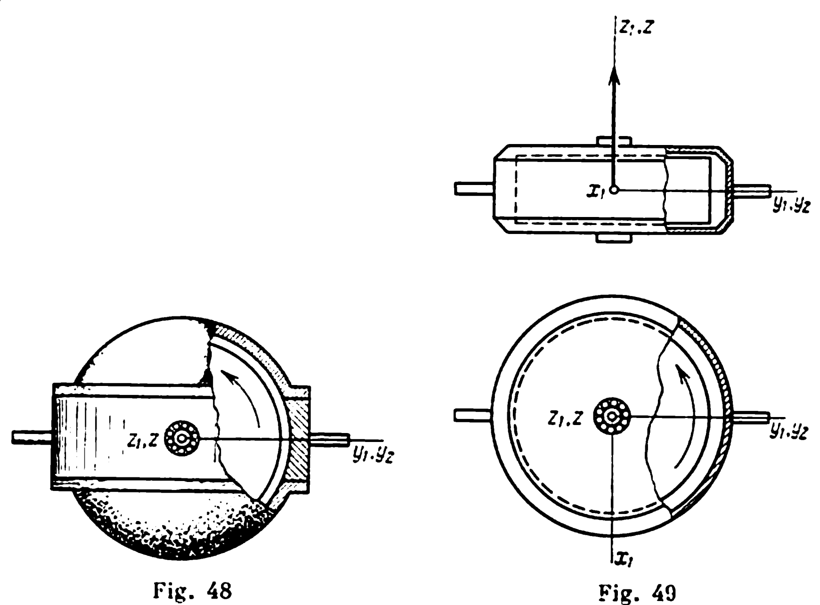
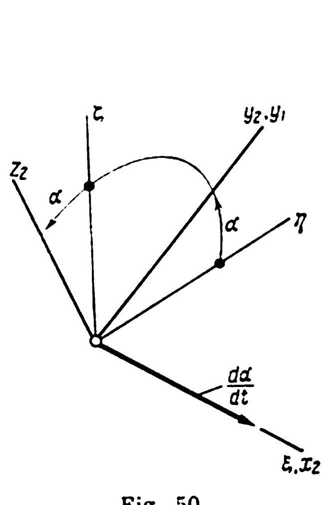
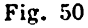


Fig. 48

Fig. 49

confondu avec l'axe z_1 du système $x_1y_1z_1$ (fig. 52). Supposons, pour fixer les idées, que lorsque $\gamma = 0$, les axes correspondants des deux systèmes xyz et $x_1y_1z_1$ se confondent.




Fig. 50

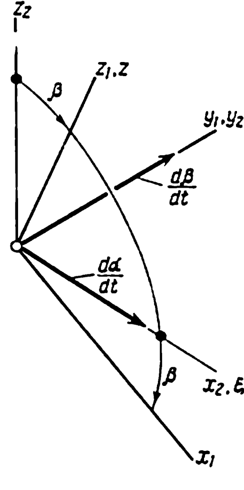


Fig. 51

Il est aisé de vérifier que les angles α, β et γ ainsi introduits sont les angles d'Euler-Krylov (v. fig. 24 et 25) qui caractérisent la position du rotor de gyroscope par rapport au support ou, ce qui revient au même, celle du système de coordonnées xyz par rapport au système $\xi\eta\zeta$. Ceci étant, les angles α et β déterminent l'orientation de l'axe z de symétrie dynamique du rotor par rapport au système de coordonnées $\xi\eta\zeta$.

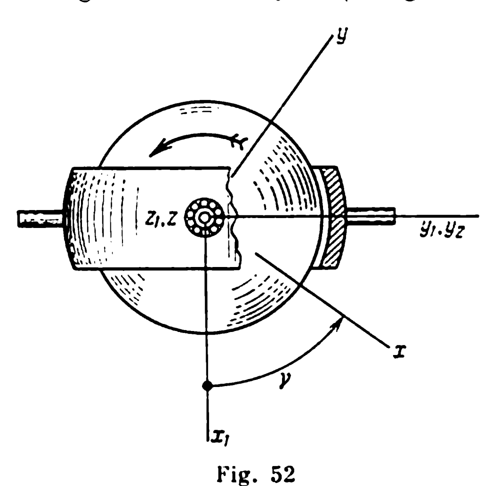


Fig. 52

Si le gyroscope est monté sur un support fixe, la variation des angles α et β, après la disparition de la nutation, est, dans la plupart des cas, assez lente. Ceci nous donne le droit de négliger dans la théorie de précession des gyroscopes l'influence dynamique des anneaux sur le mouvement du rotor due aux moments d'inertie de leurs masses.

Développons des raisonnements qui s'y rapportent. Désignons par A_1, B_1, C_1 les moments d'inertie de l'anneau intérieur respectivement par rapport aux axes x_1, y_1 et z_1. Admettons, pour préciser les idées, que ces axes sont les axes principaux d'inertie de la masse de cet anneau. Le système $x_1y_1z_1$ et le système xyz lié au rotor tournant ont un axe commun qui est l'axe z_1 ou, ce qui revient au même, l'axe z. De ce fait, le système $x_1y_1z_1$, qui ne participe pas à la rotation du rotor, peut être pris pour système de coordonnées entraîné $x'y'z'$ introduit plus haut. Dès lors, le mouvement de l'anneau intérieur rigidement lié au système de coordonnées entraîné $x'y'z'$ sera le même que celui du solide imaginaire examiné plus haut (v. paragraphe précédent), c'est-à-dire d'un solide identique au rotor de gyroscope mais se mouvant avec le système entraîné. Les moments $M'_{x'}$, $M'_{y'}$, $M'_{z'}$ qui pourraient reproduire le mouvement du solide imaginaire représentent, ainsi qu'on l'a dit plus haut, des quantités négligeables dans la théorie de précession des gyroscopes. Si les moments d'inertie A_1, B_1, C_1 de l'anneau intérieur sont de l'ordre de grandeur des moments d'inertie $A = B$ et C du rotor de gyroscope, il est logique de négliger également les moments des forces qui font effectuer à l'anneau intérieur son mouvement réel avec le système de coordonnées $x_1y_1z_1$. Des raisonnements à peu près analogues peuvent se développer dans l'hypothèse où la masse (ou plus exactement les moments d'inertie) de l'anneau de cardan extérieur peut être négligée.

Comme il a été dit précédemment, la prise en compte de la masse (des moments d'inertie) des anneaux de cardan est nécessaire pour l'étude du mouvement des gyroscopes de très haute précision. Elle s'impose surtout dans les cas où il y a une vibration angulaire importante du support mobile du gyroscope ou un déséquilibre dynamique, même minime, du rotor, c'est-à-dire lorsque l'axe de symétrie dynamique du rotor ne coïncide pas avec son axe de rotation propre. Dans les cas mentionnés, la théorie de précession des gyroscopes, sous sa forme habituelle, devient inapplicable pour des études correspondantes qui exigent de passer à la théorie de nutation. Une dérive systématique d'un gyroscope suspendu à la cardan, due à des oscillations non amorties (nutations) du système mécanique « rotor — anneau intérieur — anneau extérieur » sera examinée plus loin au chap. III.

Le rotor, les anneaux de cardan, leurs axes et leurs paliers ne sont pas des solides parfaits. La différence de déformabilité élastique du rotor dans les sens axial et radial explique, en particulier, la dérive du gyroscope en cas des vibrations de translation de son support. Pour déterminer la valeur d'une telle dérive, les équations de la théorie de précession des gyroscopes sont tout à fait suffisantes.

§ 3. Gyroscope suspendu à la cardan

Au cours du présent paragraphe qui fait une suite logique au précédent, nous nous proposons d'établir. dans le cadre de la théorie de précession des gyroscopes, les équations générales du mouvement de l'axe d'un gyroscope dont le rotor est suspendu à la cardan (v. fig. 45). Les paliers dans lesquels tourne l'axe de l'anneau extérieur de cette suspension sont logés dans le corps d'un support mobile. Comme il a été indiqué au paragraphe précédent, l'anneau de cardan intérieur peut être réalisé, par exemple, sous forme de boîtier dans les paliers duquel tourne l'axe du rotor de gyroscope (v. fig. 49).

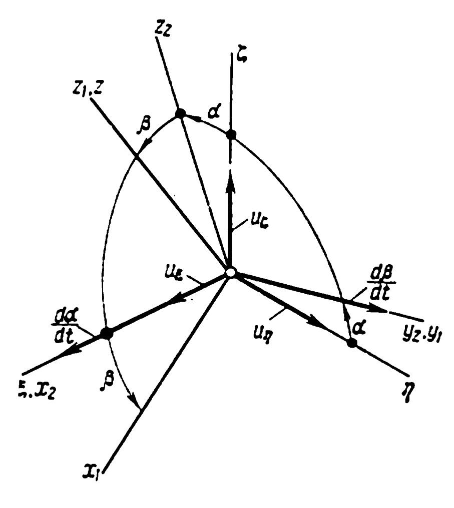


Fig. 53

Attachons, comme précédemment, au support mobile, à l'anneau extérieur et à l'anneau intérieur (boîtier) respectivement trois systèmes de coordonnées $\xi\eta\zeta$, $x_2y_2z_2$, $x_1y_1z_1$ d'origine commune au centre de la suspension à la cardan. Dirigeons les axes ξ et x_2 suivant l'axe de l'anneau extérieur, les axes y_2 et y_1 suivant l'axe de l'anneau intérieur (boîtier) et l'axe z_1 suivant l'axe z du rotor de gyroscope. En outre, introduisons un système de coordonnées xyz lié au rotor de gyroscope et un système non tournant $\xi^*\eta^*\zeta^*$ ayant leurs origines également au centre de la suspension à la cardan.

La vitesse angulaire de tout corps solide, rapportée au système de coordonnées « absolu » (v. chap. I, § 1 du présent livre) est égale, bien entendu, à la vitesse angulaire de ce solide par rapport au système $\xi^*\eta^*\zeta^*$ et représente ainsi sa vitesse angulaire absolue.

Désignons, comme au paragraphe précédent, par α l'angle de rotation de l'anneau extérieur par rapport au support (v. fig. 50). Lorsque $\alpha > 0$, le système $x_2y_2z_2$ est tourné en sens inverse des aiguilles d'une montre par rapport au système de coordonnées $\xi\eta\zeta$, la rotation étant observée du côté de la partie positive de l'axe ξ (x_2). Introduisons de manière analogue l'angle β de rotation de l'anneau intérieur (boîtier) par rapport à l'anneau de cardan extérieur, c'est-à-dire du système de coordonnées $x_1y_1z_1$ par rapport au système $x_2y_2z_2$ (v. fig. 51). Les vitesses angulaires (relatives) $d\alpha/dt$ et $d\beta/dt$ de rotation du système $x_2y_2z_2$ par rapport au système $\xi\eta\zeta$ et du sys-

tème $x_1y_1z_1$ par rapport au système $x_2y_2z_2$ sont dirigées (v. fig. 50 et 51) respectivement suivant les axes x_2 (ξ) et y_2 (y_1).

Désignons par $\bar{\omega}^1$ le vecteur vitesse angulaire de l'anneau intérieur par rapport au système de coordonnées non tournant $\xi^*\eta^*\zeta^*$. Les projections $\omega^1_{x_1}$, $\omega^1_{y_1}$, $\omega^1_{z_1}$ de cette vitesse angulaire sur les axes x_1, y_1, z_1 liés à l'anneau de cardan intérieur s'expriment (fig. 53) par la vitesse angulaire $\bar{u}$ du support et les angles α et β au moyen des formules suivantes:

$$\omega^1_{x_1} = u_\xi \cos\beta + u_\eta \sin\alpha \sin\beta - u_\zeta \cos\alpha \sin\beta + \frac{d\alpha}{dt}\cos\beta,$$

$$\omega^1_{y_1} = u_\eta \cos\alpha + u_\zeta \sin\alpha + \frac{d\beta}{dt}, \tag{2.3.1}$$

$$\omega^1_{z_1} = u_\xi \sin\beta - u_\eta \sin\alpha \cos\beta + u_\zeta \cos\alpha \cos\beta + \frac{d\alpha}{dt}\sin\beta.$$

Ces formules seront établies un peu plus loin. Les grandeurs u_ξ, u_η et u_ζ qui y figurent sont les projections du vecteur vitesse angulaire absolue (c'est-à-dire rapportée au système de coordonnées non tournant $\xi^*\eta^*\zeta^*$) $\bar{u}$ du support sur les axes du système $\xi\eta\zeta$ qui lui est rigidement lié (v. fig. 53).

Désignons par K_{x_2}, K_{y_2} et K_{z_2} les sommes des moments des forces exercées par le support sur l'anneau de cardan extérieur, par rapport aux axes respectifs x_2, y_2 et z_2 liés à cet anneau. Désignons ensuite par L_{x_1}, L_{y_1} et L_{z_1} les sommes des moments, par rapport aux axes x_1, y_1 et z_1, des forces exercées par l'anneau extérieur sur l'anneau intérieur. Enfin, désignons par M_{x_1}, M_{y_1} et M_{z_1} les sommes des moments des forces exercées par l'anneau intérieur (boîtier) sur le rotor du gyroscope [1]), par rapport aux mêmes axes x_1, y_1 et z_1 liés à l'anneau intérieur.

Désignons par k_{x_2}, k_{y_2} et k_{z_2} les sommes des moments, par rapport aux axes correspondants, des forces extérieures [2]) appliquées à l'anneau extérieur; par l_{x_1}, l_{y_1} et l_{z_1} et par m_{x_1}, m_{y_1} et m_{z_1} celles des moments des forces appliquées respectivement à l'anneau intérieur (boîtier) et au rotor.

Parmi les forces qui agissent sur les éléments de masse de l'anneau extérieur, de l'anneau intérieur (boîtier) et du rotor il convient de tenir compte des forces d'inertie (d'entraînement et de Coriolis) dues au déplacement, avec le temps, du système de coordonnées auquel est rapporté le mouvement étudié du gyroscope.

[1]) Dans certains cas (par exemple, dans l'appareil gyroscopique d'Obri) il existe des forces d'interaction entre le rotor et l'anneau de cardan extérieur (que l'on appelle forces de soufflage). La présence de telles forces conduit à une certaine complication des calculs qui suivent.

[2]) C'est-à-dire des forces autres que les forces d'interaction entre les corps solides faisant partie du système mécanique « rotor — anneau intérieur (boîtier) — anneau extérieur de la suspension à la cardan ».

Dans le cas considéré, pour un tel système est choisi le système de coordonnées non tournant $\xi^*\eta^*\zeta^*$ mentionné plus haut qui a son origine au centre de la suspension à la cardan (dans ces conditions les forces d'inertie de Coriolis sont nulles).

Une étude plus poussée se fait dans le cadre de la théorie de précession des gyroscopes. C'est pourquoi, d'après ce qui a été établi au paragraphe précédent, les moments cinétiques des anneaux de cardan lors de leur mouvement par rapport au système de coordonnées non tournant $\xi^*\eta^*\zeta^*$ seront négligés par la suite. Nous considérons donc que le moment résultant du système de forces appliquées à l'anneau extérieur est nul. Le système de forces qui s'exercent sur l'anneau intérieur (boîtier) jouit exactement de la même propriété. Dans les deux cas, le point de réduction des forces est choisi au centre de la suspension à la cardan.

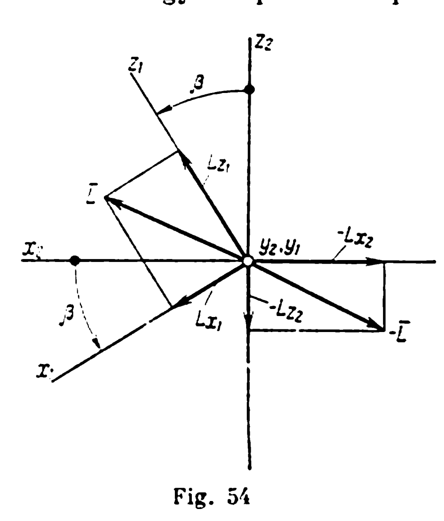


Fig. 54

La condition que les sommes des moments de toutes les forces agissant sur l'anneau extérieur, par rapport à chacun des axes x_2, y_2 et z_2 sont nulles permet d'écrire les équations suivantes:

$$K_{x_2}+k_{x_2}-L_{x_2}=0,$$
$$K_{y_2}+k_{y_2}-L_{y_2}=0, \qquad (2.3.2)$$
$$K_{z_2}+k_{z_2}-L_{z_2}=0.$$

Ces équations font intervenir les sommes des moments, par rapport aux axes x_2, y_2 et z_2, des forces exercées par l'anneau intérieur (boîtier) sur l'anneau extérieur, désignées par $-L_{x_2}$, $-L_{y_2}$ et $-L_{z_2}$. Suivant le principe de Newton sur l'égalité de l'action et de la réaction, ces moments sont liés aux moments L_{x_1}, L_{y_1} et L_{z_1} des forces exercées par l'anneau extérieur sur l'anneau intérieur (boîtier), c'est-à-dire des forces de réaction, par les relations (fig. 54)

$$L_{x_2}=L_{x_1}\cos\beta+L_{z_1}\sin\beta,$$
$$L_{y_2}=L_{y_1}, \qquad (2.3.3)$$
$$L_{z_2}=-L_{x_1}\sin\beta+L_{z_1}\cos\beta.$$

Les équations qui traduisent l'équilibre des forces appliquées à l'anneau intérieur (boîtier) de la suspension à la cardan se pré-

sentent à leur tour sous la forme

$$\begin{aligned} L_{x_1}+l_{x_1}-M_{x_1}&=0,\\ L_{y_1}+l_{y_1}-M_{y_1}&=0,\\ L_{z_1}+l_{z_1}-M_{z_1}&=0. \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Ici $-M_{x_1}$, $-M_{y_1}$ et $-M_{z_1}$ sont les sommes des moments des forces exercées par le rotor de gyroscope sur l'anneau intérieur.

En nous servant des relations (2.3.3), faisons disparaître les quantités L_{x_2}, L_{y_2} et L_{z_2} qui figurent dans les équations (2.3.2). Il vient

$$\begin{aligned} K_{x_2}+k_{x_2}&=L_{x_1}\cos\beta+L_{z_1}\sin\beta,\\ K_{y_2}+k_{y_2}&=L_{y_1},\\ K_{z_2}+k_{z_2}&=-L_{x_1}\sin\beta+L_{z_1}\cos\beta. \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Pour l'analyse qui suit il importe de connaître les expressions de M_{x_1} et M_{y_1} pour les sommes des moments, par rapport aux axes x_1 et y_1, des forces exercées par l'anneau intérieur (boîtier) sur le rotor de gyroscope. On peut les trouver conjointement avec les inconnues K_{y_2}, K_{z_2}, L_{x_1} et L_{z_1} en faisant usage des équations (2.3.4) et (2.3.5).

Les quantités K_{y_2} et K_{z_2} sont les sommes des moments, par rapport aux axes y_2 et z_2, des forces de réaction normales dans les paliers de l'anneau extérieur. D'une manière analogue, les moments L_{x_1} et L_{z_1} sont produits par les réactions normales des paliers de l'anneau intérieur (boîtier). La connaissance des forces de réaction peut s'avérer utile, par exemple pour la détermination des forces de frottement dans les paliers de la suspension.

Résolvons les équations (2.3.4) et (2.3.5) par rapport aux quantités K_{y_2}, K_{z_2}, L_{x_1}, L_{z_1}, M_{x_1} et M_{y_1} en supposant que les autres, c'est-à-dire k_{x_2}, k_{y_2}, k_{z_2}, l_{x_1}, l_{y_1}, l_{z_1}, K_{x_2}, L_{y_1} et M_{z_1} sont données. On obtient

$$\begin{aligned} K_{y_2}&=-k_{y_2}+L_{y_1},\\ K_{z_2}&=-k_{z_2}-(K_{x_2}+k_{x_2})\operatorname{tg}\beta+(M_{z_1}-l_{z_1})\sec\beta,\\ L_{x_1}&=(K_{x_2}+k_{x_2})\sec\beta-(M_{z_1}-l_{z_1})\operatorname{tg}\beta,\\ L_{z_1}&=-l_{z_1}+M_{z_1},\\ M_{x_1}&=l_{x_1}+(K_{x_2}+k_{x_2})\sec\beta-(M_{z_1}-l_{z_1})\operatorname{tg}\beta,\\ M_{y_1}&=l_{y_1}+L_{y_1}. \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Il convient de faire attention à la manière dont interviennent dans l'expression de M_{x_1} la somme k_{x_2} des moments, par rapport à l'axe x_2 de l'anneau extérieur, des forces extérieures appliquées directement à l'anneau extérieur, ainsi que la somme K_{x_2} des moments, par rapport au même axe x_2, des forces de frottement dans les paliers

et des forces exercées par le support sur l'anneau extérieur. En déterminant la valeur de M_{x_1}, on peut ici commettre facilement une erreur si l'on projette K_{x_2} et k_{x_2} directement sur l'axe x_1 en oubliant que ces moments sont appliqués non pas à l'anneau intérieur (boîtier), mais à un autre corps, à savoir à l'anneau de cardan extérieur. Il en résulterait que les quantités K_{x_2} et k_{x_2} interviendraient dans l'expression de M_{x_1} avec le facteur cos β, ce qui serait, bien entendu, erroné.

D'après l'avant-dernière formule (2.3.6), la valeur de M_{x_1} dépend (pour $\beta \neq 0$) tant de la somme l_{z_1} des moments, par rapport à l'axe z_1 (z) du rotor, des forces extérieures appliquées à l'anneau de cardan intérieur, que de la somme M_{z_1} des moments des forces que cet anneau exerce sur le rotor de gyroscope. Ces deux circonstances surprennent au premier abord.

Reportons-nous maintenant aux équations du mouvement du rotor. Suivant la théorie de précession des gyroscopes exposée au paragraphe précédent, le moment cinétique $\bar{G}$ du rotor peut être remplacé, avec une approximation suffisante, par le moment cinétique propre $\bar{H}$ du rotor dirigé suivant l'axe z (z_1) de rotation du rotor par rapport à l'anneau intérieur (boîtier). Le module H de ce moment cinétique est égal au produit du moment polaire d'inertie C du rotor par la projection r de sa vitesse angulaire $\bar{\omega}$ sur l'axe z:

$$H = Cr. \tag{2.3.7}$$

La vitesse angulaire $\bar{\omega}$ du rotor est égale à la somme géométrique de la vitesse angulaire (relative) $\bar{n}$ du rotor par rapport à l'anneau intérieur et de la vitesse angulaire absolue de ce dernier, c'est-à-dire de la vitesse angulaire $\bar{\omega}^1$ par rapport au système de coordonnées non tournant $\xi^*\eta^*\zeta^*$. Pourtant, étant donné que la vitesse angulaire du rotor par rapport à l'anneau intérieur (boîtier), que l'on appelle vitesse angulaire propre n du rotor, est incomparablement plus grande que la vitesse angulaire ω^1 de l'anneau lui-même, on peut ne pas faire de distinction entre les quantités ω, n et r. Par suite, on peut poser dans la formule (2.3.7) que la projection r est égale à la vitesse angulaire propre n du rotor de gyroscope, soit

$$r \simeq n = \frac{d\gamma}{dt}, \tag{2.3.8}$$

où γ est l'angle de rotation du rotor par rapport à l'anneau intérieur (boîtier).

En procédant de la même façon qu'au paragraphe précédent, considérons la vitesse $\bar{V}$ de l'extrémité du vecteur $\bar{H}$ par rapport au système de coordonnées non tournant $\xi^*\eta^*\zeta^*$ en supposant que les origines du vecteur et du système coïncident. Il est facile

de voir (fig. 55) que les projections de la vitesse $\bar{V}$ sur les axes du système $x_1y_1z_1$ ont pour expressions

$$V_{x_1} = \omega^1_{y_1}H, \quad V_{y_1} = -\omega^1_{x_1}H, \quad V_{z_1} = \frac{dH}{dt}, \qquad (2.3.9)$$

où $\omega^1_{x_1}$ et $\omega^1_{y_1}$ sont, comme il a été indiqué précédemment, les projections sur les axes x_1 et y_1 de la vitesse angulaire $\bar{\omega}^1$ de l'anneau intérieur (boîtier) par rapport au système de coordonnées non tournant $\xi^*\eta^*\zeta^*$.

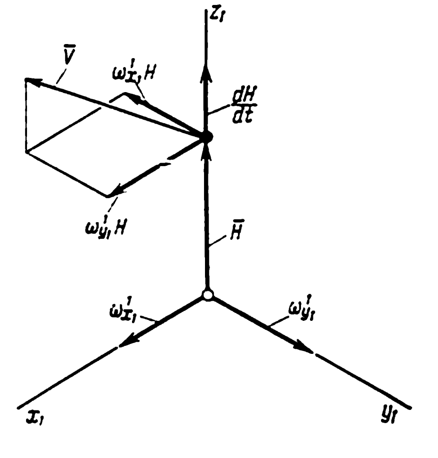


Fig. 55

Suivant les formules (2.1.47) du § 1, les expressions (2.3.9) sont respectivement égales aux sommes des moments, par rapport aux axes x_1, y_1 et z_1, des forces appliquées au rotor, c'est-à-dire que dans le cas considéré on a

$$\begin{aligned} \omega^1_{y_1}H &= m_{x_1} + M_{x_1}, \\ -\omega^1_{x_1}H &= m_{y_1} + M_{y_1}, \qquad (2.3.10) \\ \frac{dH}{dt} &= m_{z_1} + M_{z_1}. \end{aligned}$$

Remarquons que la quantité m_{z_1} représente, en règle générale, le moment des forces de freinage du rotor par l'air environnant (dans le cas, par exemple, où il n'y a pas de boîtier fermé étanche). A son tour, la quantité M_{z_1} est la somme du moment des forces de frottement dans les paliers, du moment engendré par la résistance à la rotation du rotor de la part du milieu remplissant le boîtier et du couple moteur du rotor. Ce dernier est produit le plus souvent par le champ magnétique tournant du stator rigidement relié au boîtier.

En introduisant dans les égalités (2.3.10) les expressions de M_{x_1} et M_{y_1} données par deux dernières formules (2.3.6), on obtient les équations suivantes pour le mouvement du rotor de gyroscope suspendu à la cardan:

$$\begin{aligned} \omega^1_{y_1}H &= m_{x_1} + l_{x_1} + (K_{x_2} + k_{x_2}) \sec\beta - (M_{z_1} - l_{z_1}) \operatorname{tg}\beta, \\ -\omega^1_{x_1}H &= m_{y_1} + l_{y_1} + L_{y_1}, \qquad (2.3.11) \\ \frac{dH}{dt} &= m_{z_1} + M_{z_1}. \end{aligned}$$

Compte tenu des deux premières formules (2.3.1), les relations (2.3.11) représentent un système de trois équations différentielles contenant trois fonctions du temps cherchées $\alpha(t)$, $\beta(t)$ et $H(t)$.

Etablissons les équations (2.3.11) par un autre procédé, à partir du principe des vitesses virtuelles. Commençons par indiquer quelques relations cinématiques supplémentaires.

Il n'est pas difficile de se convaincre (fig. 56) que les projections $\omega^2_{x_2}$, $\omega^2_{y_2}$, $\omega^2_{z_2}$ de la vitesse angulaire de l'anneau de cardan extérieur $\bar{\omega}^2$, par rapport au système de coordonnées non tournant $\xi^*\eta^*\zeta^*$,

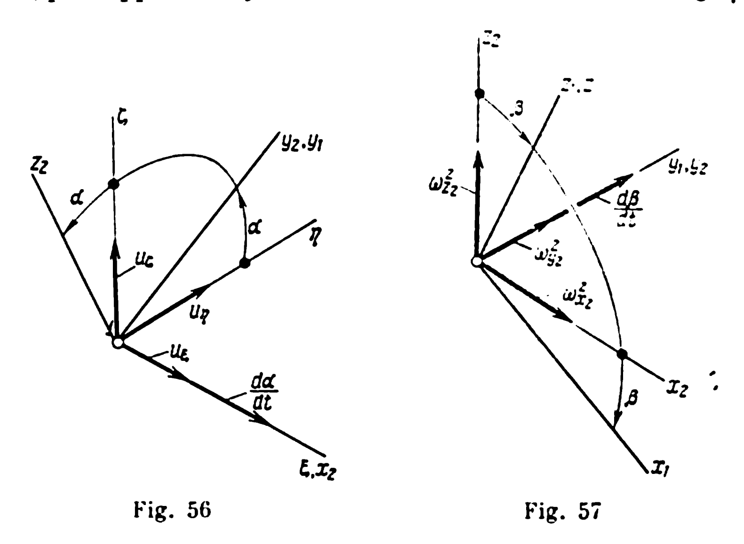


Fig. 56 Fig. 57

sur les axes du système $x_2y_2z_2$ lié à l'anneau s'expriment par les formules suivantes:

$$\begin{aligned} \omega^2_{x_2} &= u_\xi + \frac{d\alpha}{dt}, \\ \omega^2_{y_2} &= u_\eta \cos\alpha + u_\zeta \sin\alpha, \\ \omega^2_{z_2} &= -u_\eta \sin\alpha + u_\zeta \cos\alpha, \end{aligned} \tag{2.3.12}$$

où l'indice supérieur 2 n'est pas, bien entendu, le symbole du carré.

On peut obtenir de même les formules pour les projections sur les axes x_1, y_1, z_1 liés à l'anneau intérieur (boîtier) de la vitesse angulaire $\bar{\omega}^1$ de cet anneau par rapport au système $\xi^*\eta^*\zeta^*$ (fig. 57):

$$\begin{aligned} \omega^1_{x_1} &= \omega^2_{x_2} \cos\beta - \omega^2_{z_2} \sin\beta, \\ \omega^1_{y_1} &= \omega^2_{y_2} + \frac{d\beta}{dt}, \\ \omega^1_{z_1} &= \omega^2_{x_2} \sin\beta + \omega^2_{z_2} \cos\beta. \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

En introduisant dans les seconds membres des dernières égalités les expressions (2.3.12) pour $\omega^2_{x_2}$, $\omega^2_{y_2}$ et $\omega^2_{z_2}$, on obtient les formules (2.3.1) indiquées au début du présent paragraphe.

Enfin, les projections de la vitesse angulaire $\bar{\omega}$ du rotor, par rapport au système de coordonnées $\xi^*\eta^*\zeta^*$, sur les mêmes axes x_1, y_1 et z_1 sont données par les formules évidentes

$$\omega_{x_1} = \omega^1_{x_1}, \quad \omega_{y_1} = \omega^1_{y_1}, \quad \omega_{z_1} = \omega^1_{z_1} + \frac{d\gamma}{dt}, \qquad (2.3.14)$$

où γ est l'angle, mentionné plus haut (v. fig. 52), qui caractérise la rotation du rotor de gyroscope par rapport à l'anneau intérieur (boîtier).

Considérons dans le système de coordonnées mobile en translation $\xi^*\eta^*\zeta^*$ la cinétostatique d'un ensemble mécanique comprenant trois corps solides: l'anneau de cardan extérieur, l'anneau de cardan intérieur (boîtier) et le rotor de gyroscope (v. fig. 45). Comme cela a été dit plus haut, dans la théorie de précession des gyroscopes (théorie simplifiée d l'effet gyroscopique), les moments cinétiques des deux anneaux sont négligés, et pour moment cinétique $\bar{G}$ du rotor on prend son moment cinétique propre $\bar{H}$ dirigé suivant l'axe de rotation propre z (z_1) du rotor. En vertu des formules (2.3.7) et (2.3.8), le module du vecteur $\bar{H}$ sera pris égal au produit du moment d'inertie C du rotor, par rapport à son axe de symétrie dynamique z (z_1), par la valeur de sa vitesse angulaire propre, soit

$$H = Cn = C\frac{d\gamma}{dt}. \qquad (2.3.15)$$

Introduisons dans le système de coordonnées $\xi^*\eta^*\zeta^*$ les forces d'inertie de d'Alembert [1]). Conformément à la théorie de précession des gyroscopes, elles ne doivent se déterminer que par la variation dans ce système du vecteur moment cinétique propre $\bar{H}$. En effet, les équations de précession du mouvement du rotor (2.3.10) peuvent être transformées de telle sorte qu'elles aient la forme des équations d'équilibre de la statique, soit

$$\begin{aligned} m_{x_1} + M_{x_1} + D_{x_1} &= 0, \\ m_{y_1} + M_{y_1} + D_{y_1} &= 0, \\ m_{z_1} + M_{z_1} + D_{z_1} &= 0, \end{aligned} \qquad (2.3.16)$$

où

$$D_{x_1} = -\omega^1_{y_1}H, \quad D_{y_1} = -(-\omega^1_{x_1}H), \quad D_{z_1} = -\frac{dH}{dt}. \quad (2.3.17)$$

[1]) Sous le terme de force d'inertie de d'Alembert élémentaire nous entendons ici un vecteur orienté dans le sens opposé à celui de l'accélération de l'élément de masse considéré, rapporté au système de coordonnées $\xi^*\eta^*\zeta^*$; la valeur de la force d'inertie de d'Alembert est égale au produit de cette accélération par la valeur de la masse (v. chap. I, § 1 du présent livre).

Il est évident que les quantités D_{x_1}, D_{y_1} et D_{z_1} doivent être considérées comme sommes des moments, par rapport aux axes correspondants, des forces d'inertie de d'Alembert. D'autre part, les seconds membres des égalités (2.3.17) représentent, au signe près, les projections de la vitesse de l'extrémité du vecteur moment cinétique propre $\overline{H}$ ou, ce qui revient au même, les projections de sa dérivée par rapport au temps sur les axes du système de coordonnées $x_1y_1z_1$ lié à l'anneau de cardan intérieur (boîtier). Ainsi, en considérant la cinétostatique de l'ensemble mécanique « anneau extérieur — anneau intérieur — rotor », il convient d'ajouter aux forces agissant sur cet ensemble les couples, de moments D_{x_1}, D_{y_1} et D_{z_1}, appliqués au rotor de gyroscope. Ces moments sont définis par les formules (2.3.17) que nous venons d'indiquer.

Les forces qui agissent sur l'ensemble mécanique considéré peuvent se diviser en deux groupes : les forces extérieures et les forces d'interaction : entre le rotor et l'anneau de cardan intérieur, entre les anneaux de cardan intérieur et extérieur et enfin, entre l'anneau extérieur et le support de gyroscope. Le mouvement de tous les corps étant considéré par rapport au système de coordonnées mobile $\xi^*\eta^*\zeta^*$, le système des forces extérieures doit comprendre les forces d'inertie de Coriolis et les forces d'inertie d'entraînement, dues au déplacement du système $\xi^*\eta^*\zeta^*$ par rapport au système de coordonnées « absolu ». Or, le système $\xi^*\eta^*\zeta^*$ ne tourne pas et donc les forces d'inertie de Coriolis sont nulles. Quant aux forces d'inertie d'entraînement, elles sont toutes dirigées dans le sens opposé à l'accélération de l'origine du système $\xi^*\eta^*\zeta^*$ par rapport au système « absolu », parce que le système $\xi^*\eta^*\zeta^*$ est animé d'un mouvement de translation.

Il est évident que les forces d'inertie d'entraînement qui « agissent » sur les éléments d'un corps quelconque faisant partie de l'ensemble mécanique considéré se ramènent en l'occurrence à une résultante passant par le centre de gravité de ce corps (v. chap. I, § 1 du présent livre). L'intensité de cette résultante est égale au produit de la masse du corps par l'accélération de l'origine (et donc, de tout autre point fixe) du système de coordonnées $\xi^*\eta^*\zeta^*$.

Enfin, l'interaction des corps de l'ensemble mécanique « anneau extérieur — anneau intérieur — rotor » se traduit par les forces de réaction normales des liaisons et par les couples dont les vecteurs sont orientés suivant les axes des articulations planes qui relient ces corps. Il en est exactement de même des forces d'interaction entre le support et l'anneau de cardan extérieur. S'il existe d'autres forces d'interaction entre le support et les autres corps de l'ensemble considéré, on peut les ranger dans le groupe de forces extérieures.

En vertu du principe de l'Alembert, l'ensemble de trois solides parfaits, appelé, dans le cas considéré, gyroscope suspendu à la cardan, peut, sous l'action des forces énumérées et des couples de

moments D_{x_1}, D_{y_1} et D_{z_1}, se trouver dans un état d'équilibre par rapport à son support qui est en quelque sorte immobilisé. Le mouvement du support de gyroscope par rapport au système de coordonnées « absolu » doit être considéré comme donné. Pour coordonnées généralisées de l'ensemble mécanique il est le plus naturel de prendre les angles α, β et γ, c'est-à-dire les angles de rotation de l'anneau de cardan extérieur par rapport au support, de l'anneau intérieur par rapport à l'anneau extérieur et du rotor par rapport à l'anneau intérieur.

Soient $\delta(d\alpha/dt)$, $\delta(d\beta/dt)$, $\delta(d\gamma/dt)$ les vitesses virtuelles généralisées de l'ensemble mécanique considéré. Les projections de la vitesse angulaire virtuelle de l'anneau extérieur sur les axes du système de coordonnées qui lui est lié se présentent alors d'après les formules (2.3.12) sous la forme suivante:

$$\delta\omega_{x_2}^2 = \delta\frac{d\alpha}{dt}, \quad \delta\omega_{y_2}^2 = 0, \quad \delta\omega_{z_2}^2 = 0. \qquad (2.3.18)$$

En faisant usage des formules (2.3.1), on obtient pour les projections de la vitesse angulaire virtuelle de l'anneau intérieur (boîtier) sur les axes du système de coordonnées $x_1y_1z_1$ les expressions suivantes:

$$\delta\omega_{x_1}^1 = \cos\beta\,\delta\frac{d\alpha}{dt}, \quad \delta\omega_{y_1}^1 = \delta\frac{d\beta}{dt}, \quad \delta\omega_{z_1}^1 = \sin\beta\,\delta\frac{d\alpha}{dt}. \quad (2.3.19)$$

Enfin, en partant des formules (2.3.14) et (2.3.19), on obtient pour les projections de la vitesse angulaire virtuelle du rotor sur les mêmes axes les expressions

$$\begin{aligned} \delta\omega_{x_1} &= \cos\beta\,\delta\frac{d\alpha}{dt}, \\ \delta\omega_{y_1} &= \delta\frac{d\beta}{dt}, \\ \delta\omega_{z_1} &= \sin\beta\,\delta\frac{d\alpha}{dt} + \delta\frac{d\gamma}{dt}. \end{aligned} \qquad (2.3.20)$$

Proposons-nous maintenant d'établir une expression donnant la puissance virtuelle du système de forces (y compris les couples de moments D_{x_1}, D_{y_1} et D_{z_1}) appliquées à l'ensemble mécanique considéré des corps faisant partie du gyroscope suspendu à la cardan. Rappelons que la puissance développée par les forces appliquées à un corps quelconque ayant un point fixe est égale au produit scalaire du moment résultant par rapport au point mentionné de l'ensemble de ces forces par la vitesse angulaire du corps. En particulier, la puissance des forces extérieures appliquées à l'anneau de cardan intérieur est donc égale au produit

$$\bar{l}\,\bar{\omega}^1 = l_{x_1}\omega_{x_1}^1 + l_{y_1}\omega_{y_1}^1 + l_{z_1}\omega_{z_1}^1. \qquad (2.3.21)$$

Ici, $\bar{l}$ est le moment résultant des forces sus-mentionnées et $\bar{\omega}^1$ le vecteur vitesse angulaire de l'anneau de cardan intérieur.

Dans le cas où deux corps en interaction ont un axe commun, la puissance développée par les forces d'interaction est égale au produit de la somme des moments des forces d'action d'un corps sur l'autre par la vitesse de variation de l'angle formé entre eux. Ainsi, la puissance des forces d'action de l'anneau de cardan extérieur sur l'anneau intérieur constitue avec la puissance des forces de réaction agissant sur l'anneau extérieur la quantité $L_{y_1}\, d\beta/dt$. Dans ce produit, L_{y_1} est la somme des moments des forces d'action de l'anneau extérieur sur l'anneau intérieur, par rapport à l'axe y_1 de ce dernier et β est l'angle formé entre les anneaux, le sens positif du moment L_{y_1} étant celui de l'angle β. La même expression peut être obtenue si l'on considère un cas particulier de la formule donnant la puissance des forces généralisées agissant sur un ensemble mécanique, et si l'on prend l'angle β pour coordonnée généralisée et L_{y_1} pour force généralisée qui lui correspond.

Compte tenu des remarques faites, il n'est pas difficile maintenant d'écrire l'expression cherchée pour la puissance virtuelle de toutes les forces appliquées au gyroscope considéré. On a

$$\delta W = (m_{x_1} + D_{x_1})\, \delta\omega_{x_1} + (m_{y_1} + D_{y_1})\, \delta\omega_{y_1} + \\ + (m_{z_1} + D_{z_1})\, \delta\omega_{z_1} + l_{x_1}\delta\omega^1_{x_1} + l_{y_1}\delta\omega^1_{y_1} + l_{z_1}\delta\omega^1_{z_1} + \\ + k_{x_2}\delta\omega^2_{x_2} + M_{z_1}\delta\,\frac{d\gamma}{dt} + L_{y_1}\delta\,\frac{d\beta}{dt} + K_{x_2}\delta\,\frac{d\alpha}{dt}. \quad (2.3.22)$$

Ici, comme précédemment, K_{x_2} est la somme des moments, par rapport à l'axe x_2 (ξ) de l'anneau extérieur, des forces exercées par le support de gyroscope sur cet anneau, L_{y_1} la somme des moments, par rapport à l'axe y_1 (y_2) de l'anneau intérieur, des forces exercées par l'anneau extérieur sur l'anneau intérieur, M_{z_1} la somme des moments des forces d'action de l'anneau intérieur sur le rotor par rapport à l'axe z (z_1) de rotation propre du rotor; k, l et m munis d'indices inférieurs désignent les sommes des moments, par rapport aux axes indiqués par ces indices, des forces extérieures qui s'exercent respectivement sur l'anneau de cardan extérieur, sur l'anneau intérieur (boîtier) et sur le rotor. Ces dernières comprennent les forces d'inertie d'Euler dues au mouvement du système de coordonnées $\xi^*\eta^*\zeta^*$ et « agissant » sur les anneaux de cardan extérieur et intérieur et sur le rotor de gyroscope.

Les forces de réaction normales des liaisons ne figurent naturellement pas dans les expressions de la puissance virtuelle δW parce qu'elles ne développent aucune puissance.

Remplaçons maintenant, dans la formule définissant δW, les projections des vitesses angulaires virtuelles par leurs expressions (2.3.18), (2.3.19) et (2.3.20). Le second membre de cette formule

prend la forme suivante :

$$[K_{x_2}+k_{x_2}+(l_{x_1}+m_{x_1}+D_{x_1})\cos\beta+(l_{z_1}+m_{z_1}+D_{z_1})\sin\beta]\,\delta\,\frac{d\alpha}{dt}+$$
$$+(l_{y_1}+m_{y_1}+D_{y_1}+L_{y_1})\,\delta\,\frac{d\beta}{dt}+(m_{z_1}+D_{z_1}+M_{z_1})\,\delta\,\frac{d\gamma}{dt}. \quad (2.3.23)$$

Selon le principe des vitesses virtuelles, la puissance δW est nulle quelles que soient les valeurs des vitesses virtuelles généralisées $\delta(d\alpha/dt)$, $\delta(d\beta/dt)$ et $\delta(d\gamma/dt)$. Ceci n'est possible que si chacun des facteurs de ces vitesses dans l'expression (2.3.23) est égal à zéro. D'où les relations suivantes :

$$K_{x_2}+k_{x_2}+(l_{x_1}+m_{x_1}+D_{x_1})\cos\beta+(l_{z_1}+m_{z_1}+D_{z_1})\sin\beta=0,$$
$$L_{y_1}+l_{y_1}+m_{y_1}+D_{y_1}=0,$$
$$M_{z_1}+m_{z_1}+D_{z_1}=0, \quad (2.3.24)$$

qui conduisent aux équations (2.3.11) obtenues précédemment par la méthode de la statique élémentaire. Il suffit, en effet, de remplacer les quantités D_{x_1}, D_{y_1} et D_{z_1} par leurs expressions (2.3.17) et de faire disparaître, dans la première relation (2.3.24), la somme $m_{z_1}+$ $+D_{z_1}$ à l'aide de la troisième relation.

Dans les équations (2.3.11), les projections $\omega^1_{x_1}$ et $\omega^1_{y_1}$ de la vitesse angulaire de l'anneau de cardan intérieur peuvent être remplacées par leurs expressions (2.3.1). Il vient alors comme expression définitive des équations de précession du mouvement du gyroscope suspendu à la cardan

$$\left(u_\eta\cos\alpha+u_\zeta\sin\alpha+\frac{d\beta}{dt}\right)H=$$
$$=m_{x_1}+l_{x_1}+(K_{x_2}+k_{x_2})\sec\beta-(M_{z_1}-l_{z_1})\operatorname{tg}\beta,$$
$$-\left(u_\xi\cos\beta+u_\eta\sin\alpha\sin\beta-u_\zeta\cos\alpha\sin\beta+\frac{d\alpha}{dt}\cos\beta\right)H=$$
$$=m_{y_1}+l_{y_1}+L_{y_1},$$
$$\frac{dH}{dt}=m_{z_1}+M_{z_1}. \quad (2.3.25)$$

Les équations (2.3.25) trouvent de nombreuses applications. Considérons deux exemples. Le premier d'entre eux se rapporte à l'étude du comportement du gyroscope suspendu à la cardan, dans le cas où la vitesse angulaire de rotation du rotor est variable, c'est-à-dire dans le cas où la valeur du moment cinétique propre H du rotor est variable, et le second, au cas où il y a l'action des forces extérieures de résistance aérodynamique à la rotation du rotor (de la part du milieu environnant le rotor).

Examinons le premier exemple. Il a été constaté que l'angle β que l'axe de rotation propre du rotor fait avec la perpendiculaire au plan de l'anneau extérieur (fig. 58) diminue lorsque la vitesse angulaire de rotation du rotor augmente (lors de la mise en vitesse) et, au contraire, augmente lorsque le rotor ralentit sa rotation (en particulier, lors de la marche par inertie). Pour ne pas compliquer l'étude de ce phénomène, négligeons pour l'instant l'influence qu'ont sur le mouvement du gyroscope les moments K_{x_1} et L_{y_1} des forces de frottement dans les axes de sa suspension, ainsi que les moments k_{x_2}, l_{x_1}, l_{y_1}, l_{z_1}, m_{x_1}, m_{y_1}, m_{z_1} de toutes les forces extérieures possibles. Nous négligerons également la rotation de la Terre, en supposant par là même que dans les équations (2.3.25) la vitesse angulaire $\bar{u}$ du support et du système de coordonnées $\xi\eta\zeta$ qui lui est lié est nulle. Nous supposerons notamment que le rotor est abrité à l'intérieur d'un boîtier fermé étanche et entraîné en mouvement par le champ électromagnétique tournant du stator. Ce dernier est placé à l'intérieur du boîtier auquel il est rigidement relié. Avec les hypothèses simplificatrices adoptées, les équations (2.3.25) du mouvement du gyroscope suspendu à la cardan deviennent

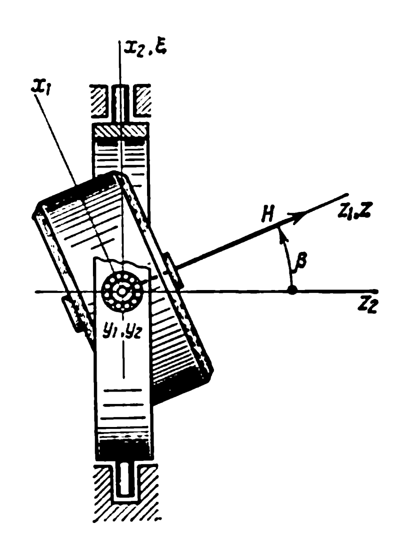


Fig. 58

$$H\frac{d\beta}{dt} = -M_{z_1}\operatorname{tg}\beta,$$
$$-H\frac{d\alpha}{dt}\cos\beta = 0, \qquad (2.3.26)$$
$$\frac{dH}{dt} = M_{z_1}.$$

La deuxième équation de ce système d'équations différentielles montre que pour $\beta \neq \pm\pi/2$

$$\alpha = \text{const.} \qquad (2.3.27)$$

Ainsi, d'après la théorie de précession des gyroscopes, l'anneau de cardan extérieur doit dans ce cas rester immobile, lorsque la vitesse de rotation du rotor varie.

Eliminons dans la première équation, à l'aide de la troisième, le moment M_{z_1} des forces exercées par le stator sur le rotor de gyro-

scope et séparons les variables, il vient

$$\frac{\cos\beta\, d\beta}{\sin\beta} = -\frac{dH}{H}. \qquad (2.3.28)$$

D'où, après intégration

$$H \sin\beta = H_0 \sin\beta_0 = \text{const}, \qquad (2.3.29)$$

où H_0 et β_0 sont les valeurs respectives du moment cinétique propre H et de l'angle β à l'instant initial $t = 0$.

Or, d'après la formule (2.3.15), $H = Cn$, où n est la vitesse angulaire de rotation propre du rotor, c'est-à-dire sa vitesse angulaire par rapport au boîtier (anneau de cardan intérieur). C'est pourquoi, en vertu de la relation (2.3.29) et de la formule (2.3.15), l'angle β doit diminuer lorsque la vitesse angulaire propre n du rotor augmente et inversement. Remarquons qu'il serait incorrect de prendre pour instant de départ un des instants t pour lequel la vitesse angulaire propre du rotor n'est pas suffisamment grande (par exemple, au cours du démarrage du rotor). Lorsque la vitesse angulaire du rotor est petite, son mouvement est fortement influencé par les forces de frottement dans les axes de la suspension, qui ont été négligées plus haut. De plus, le recours à la théorie de précession des gyroscopes devient non fondé.

Lorsque la vitesse angulaire du rotor diminue, la relation (2.3.29) ne reste valable que jusqu'à l'instant où l'angle β atteint, en croissant, la valeur de $\pi/2$. A cet instant, le moment cinétique H prend, d'après la relation (2.3.29), la valeur

$$H_{\min} = H_0 \sin\beta_0. \qquad (2.3.30)$$

Pour $\beta = \pi/2$, les anneaux de cardan « se joignent » et l'axe de rotation propre du rotor se confond avec l'axe de rotation de l'anneau extérieur par rapport au support immobile. Pourtant, on doit avoir en vue que la théorie de précession des gyroscopes cesse d'être valable aussi pour des valeurs de l'angle β peu différentes de $\pi/2$.

La relation (2.3.29) peut s'obtenir beaucoup plus simplement si l'on applique directement le théorème du moment cinétique au système de trois corps solides: le rotor de gyroscope et les deux anneaux de cardan. En vertu de ce théorème, on a trois égalités suivantes:

$$\frac{dG_\xi}{dt} = N_\xi, \quad \frac{dG_\eta}{dt} = N_\eta, \quad \frac{dG_\zeta}{dt} = N_\zeta, \qquad (2.3.31)$$

où G_ξ, G_η et G_ζ sont les projections du moment cinétique total du gyroscope suspendu à la cardan sur les axes correspondants du système de coordonnées $\xi\eta\zeta$ qui est dans ce cas immobile, et N_ξ, N_η et N_ζ sont les sommes des moments, par rapport aux mêmes axes, de toutes les forces extérieures agissant sur les anneaux de cardan

extérieur et intérieur, ainsi que sur le rotor. Ces forces extérieures peuvent être représentées par les forces exercées sur les anneaux de cardan et sur le rotor, les forces de frottement dans l'axe de l'anneau de cardan extérieur et les forces de réaction normales dans les paliers du même axe.

Faisons coïncider l'axe ξ avec l'axe x_2 de l'anneau de cardan extérieur. Compte tenu de ce que les forces de réaction normales dans les paliers de l'axe de l'anneau extérieur ne possèdent que des

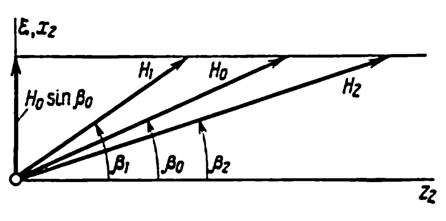


Fig. 59

moments par rapport aux axes η et ζ et que les forces extérieures et les forces de frottement sont par hypothèse nulles, nous concluons que

$$N_\xi = 0. \tag{2.3.32}$$

Il s'ensuit que la première des équations (2.3.31) donne dans ce cas

$$G_\xi = \text{const.} \tag{2.3.33}$$

Ainsi qu'on l'a dit plus haut, dans la théorie de précession des gyroscopes, les moments cinétiques des anneaux de cardan sont totalement négligés et le moment cinétique du rotor se réduit au moment cinétique propre $\bar{H}$. Ce dernier est dirigé, comme il est indiqué précédemment, suivant l'axe z du rotor et est égal, d'après la formule (2.3.15), au produit de son moment d'inertie polaire C par la vitesse angulaire n de rotation du rotor par rapport à l'anneau de cardan intérieur. Par conséquent, la projection G_ξ de la somme des moments cinétiques des deux anneaux et du rotor doit être considérée dans la théorie de précession des gyroscopes comme étant égale à la projection, sur le même axe, du seul vecteur moment cinétique propre du rotor, c'est-à-dire du vecteur $\bar{H}$. Le vecteur $\bar{H}$, orienté selon l'axe z de rotation propre du rotor, fait avec l'axe ξ un angle $\pi/2 - \beta$ (fig. 58). Par suite,

$$G_\xi = H_\xi = H \sin \beta, \tag{2.3.34}$$

d'où, en tenant compte de l'intégrale première (2.3.33), on est conduit de nouveau à la relation (2.3.29).

Du point de vue géométrique, la relation (2.3.29) exprime la constance de la projection du vecteur $\bar{H}$ sur l'axe ξ (fig. 59). Il

est évident qu'à une plus grande longueur du vecteur $\bar{H}$, c'est-à-dire à une plus grande vitesse angulaire du rotor, correspond un plus petit angle β et inversement.

Examinons maintenant le second exemple. Supposons que le rotor ne soit pas enfermé dans un boîtier (fig. 60) et que sa vitesse de rotation propre soit maintenue constante, par exemple grâce à un champ magnétique tournant ou à l'effet de turbine du jet

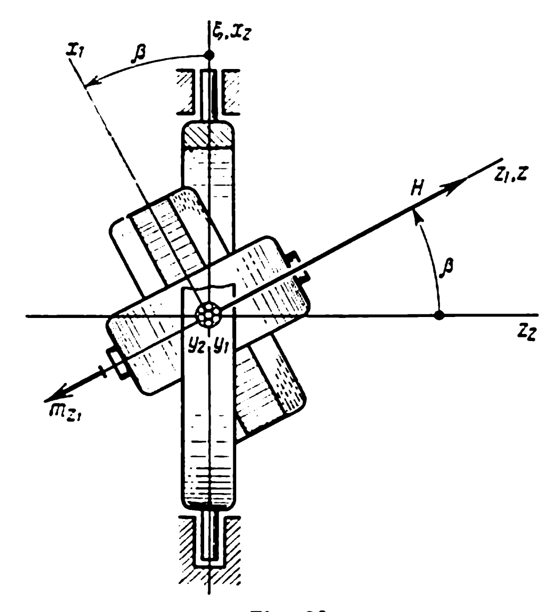


Fig. 60

d'air comprimé actionnant des aubages spécialement fraisés dans le corps du rotor. Supposons comme précédemment que le frottement dans les paliers des axes de la suspension à la cardan du gyroscope est nul, de même que sont nulles les forces extérieures qui pourraient agir sur les anneaux de cardan extérieur et intérieur. Quant aux forces extérieures exercées sur le rotor, elles existent, bien entendu, parce que n'étant pas placé dans un boîtier fermé, le rotor en rotation subit une résistance de la part du milieu (air) qui l'entoure. Il est naturel d'admettre que ces forces ne produisent qu'un moment m_{z_1} autour de l'axe du rotor. Par suite, compte tenu de la constance supposée de la valeur du moment cinétique propre $\bar{H}$ du rotor et des hypothèses adoptées ci-dessus, la troisième équation du système (2.3.25) prend la forme

$$0 = m_{z_1} + M_{z_1}. \qquad (2.3.35)$$

La quantité positive $M_{z_1}^*$ est égale à la différence entre le couple moteur du rotor et le moment résistant à la rotation, dû au frottement dans les paliers du rotor et aux forces aérodynamiques développées dans l'espace entre l'anneau de cardan intérieur et le rotor. En conséquence, m_{z_1} est une quantité négative.

Substituons maintenant à la valeur de M_{z_1} dans la première équation (2.3.25) son expression par l'intermédiaire de m_{z_1} conformément à l'égalité (2.3.35). Compte tenu de ce que, par hypothèse, tous les autres moments (K_{x_2}, k_{x_2}, l_{x_1}, m_{x_1}, l_{z_1}) que fait intervenir le second membre de cette équation sont nuls, on obtient

$$H\frac{d\beta}{dt}=m_{z_1}\operatorname{tg}\beta. \qquad (2.3.36)$$

La rotation du rotor étant uniforme, le moment m_{z_1} dû à la résistance de la part de l'air environnant le gyroscope, doit être considéré ici comme constant, de même que le moment cinétique propre H du rotor.

Intégrons l'équation différentielle (2.3.36). Il vient

$$\sin\beta=\sin\beta_0\exp\left(\frac{m_{z_1}}{H}t\right), \qquad (2.3.37)$$

où β_0 est la valeur de l'angle β à l'instant initial $t=0$.

Puisque $m_{z_1}<0$, la valeur absolue de l'angle β doit, d'après la formule (2.3.37), diminuer dans le temps de façon monotone, en tendant vers zéro. Un tel comportement du gyroscope suspendu à la cardan a été remarqué depuis longtemps par les spécialistes de réglage des appareils gyroscopiques et a été vérifié en laboratoire (de même qu'on a constaté une variation de l'angle β lorsque la vitesse angulaire n de rotation du rotor augmente ou diminue). L'angle β est parfois appelé par les techniciens « *inclinaison de la toupie* ».

On peut indiquer deux causes qui empêchent le gyroscope de conserver une direction assignée dans le plan horizontal. Ce sont le frottement dans les axes de sa suspension à la cardan et le mouvement apparent du gyroscope par suite de la rotation de la Terre. Dans le cas considéré, la dernière cause peut être pratiquement éliminée si l'axe de l'anneau extérieur du gyroscope est dirigé suivant la verticale et l'axe de rotation propre de son rotor est placé dans le plan de méridien du lieu. Dans ce cas, en utilisant un poids placé sur l'anneau intérieur (ou par un autre procédé), on peut provoquer une précession du gyroscope qui élimine sa dérive apparente.

En effet, orientons le système de coordonnées $\xi\eta\zeta$ lié au support de gyroscope (et donc, cette fois, tournant avec la Terre) de manière que l'axe ξ soit dirigé verticalement vers le haut, l'axe η vers l'est et l'axe ζ vers le nord (fig. 61). Désignons comme toujours par φ

la latitude du lieu. Alors, les projections du vecteur vitesse angulaire de la Terre sur ces axes, c'est-à-dire les quantités

$$U_\xi = U \sin \varphi, \quad U_\eta = 0, \quad U_\zeta = U \cos \varphi \qquad (2.3.38)$$

représenteront respectivement les projections u_ξ, u_η, u_ζ de la vitesse angulaire $\bar{u}$ du support sur les axes ξ, η et ζ du même système de

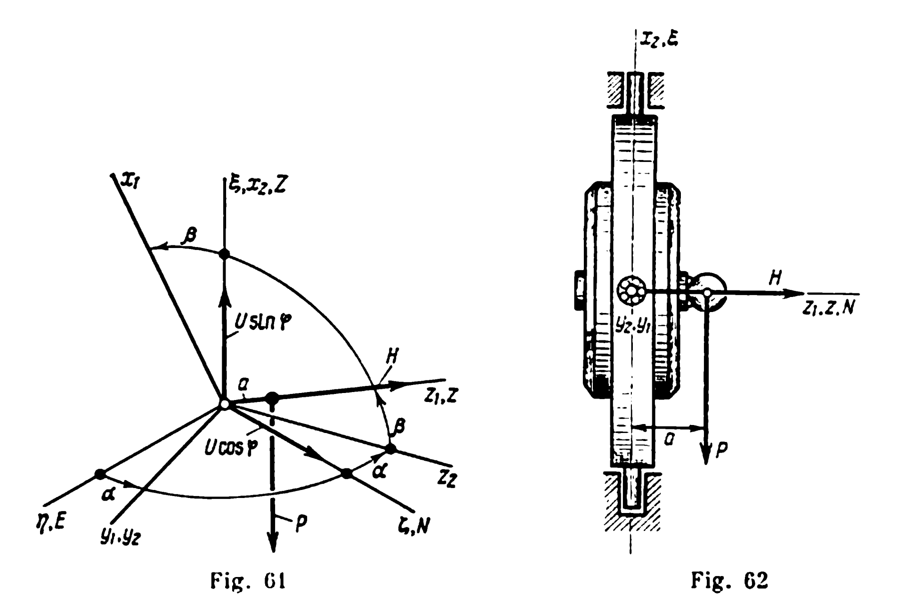


Fig. 61 Fig. 62

coordonnées. Deux premières équations du système (2.3.25) deviennent maintenant

$$\left(U \cos \varphi \sin \alpha + \frac{d\beta}{dt}\right) H = (K_{x_2} + k_{x_2}) \sec \beta + l_{x_1} + \\ + m_{x_1} - (M_{z_1} - l_{z_1}) \operatorname{tg} \beta, \qquad (2.3.39)$$

$$-\left(U \sin \varphi \cos \beta - U \cos \varphi \cos \alpha \sin \beta + \frac{d\alpha}{dt} \cos \beta\right) H = \\ = L_{y_1} + l_{y_1} + m_{y_1}.$$

Soit $\alpha = \beta = 0$ dans la position initiale. Donc, les axes de même nom (c'est-à-dire les axes des abscisses, des ordonnées et des cotes) des systèmes $\xi\eta\zeta$, $x_2y_2z_2$ et $x_1y_1z_1$ liés respectivement au support, à l'anneau de cardan extérieur et à l'anneau de cardan intérieur sont confondus. Supposons que

$$K_{x_2} = L_{y_1} = M_{z_1} = 0, \qquad k_{x_2} = l_{x_1} = l_{z_1} = m_{x_1} = 0. \quad (2.3.40)$$

Dans ce cas, le système d'équations différentielles (2.3.39) admet pour solution

$$\alpha(t) = 0, \quad \beta(t) = 0, \tag{2.3.41}$$

si seulement

$$l_{y_1} + m_{y_1} = -HU \sin \varphi. \tag{2.3.42}$$

La solution (2.3.41) correspond au mouvement stationnaire du gyroscope avec la Terre au cours duquel le moment cinétique propre $\bar{H}$ du rotor et, par conséquent, son axe z sont dirigés vers le nord. Le moment $l_{y_1} + m_{y_1}$ qui élimine le mouvement apparent (c'est-à-dire par rapport à la Terre) du gyroscope peut être créé, conformément à la formule (2.3.42), au moyen d'un petit poids P fixé sur l'anneau de cardan intérieur de son côté nord (fig. 62). Il faut seulement assurer (dans le cas où le système « anneau intérieur — rotor » est libre de balourd) que

$$P = \frac{HU}{a} \sin \varphi, \tag{2.3.43}$$

où a est la distance du centre de masse du poids à l'axe de l'anneau de cardan intérieur du gyroscope.

Le moment cinétique propre $\bar{H}$ doit, bien entendu, être constant lorsque la valeur de a reste inchangée.

On peut s'assurer que pour de faibles valeurs des angles α et β la dérive apparente du gyroscope due à la rotation de la Terre sera, en cas d'emploi du poids mentionné, de l'ordre du produit $U \cos \varphi \times \times \beta_0 t$ en angle α et de $-U \cos \varphi \cdot \alpha_0 t$ en angle β, où t caractérise un intervalle de temps, pas trop long, qui s'est écoulé après l'instant où les angles α et β avaient pour valeurs respectives α_0 et β_0. En effet, compte tenu des égalités (2.3.40) et (2.3.42), les équations (2.3.39) peuvent s'écrire, à des termes du premier ordre en variables α et β près, sous la forme suivante:

$$\frac{d\beta}{dt} + U \cos \varphi \cdot \alpha = 0, \qquad \frac{d\alpha}{dt} - U \cos \varphi \cdot \beta = 0. \tag{2.3.44}$$

Posons ici $t = 0$, il vient

$$\left.\frac{d\beta}{dt}\right|_{t=0} = \dot{\beta}_0 = -U \cos \varphi \cdot \alpha_0, \qquad \left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_{t=0} = \dot{\alpha}_0 = U \cos \varphi \cdot \beta_0. \tag{2.3.45}$$

Etant donné que les variables cherchées α et β se présentent, pour de faibles valeurs de l'argument, sous la forme approchée suivante

$$\alpha = \alpha_0 + \dot{\alpha}_0 t, \quad \beta = \beta_0 + \dot{\beta}_0 t, \tag{2.3.46}$$

on déduit, compte tenu des égalités (2.3.45), les conclusions données plus haut sur l'ordre de la dérive du gyroscope. Les fonctions

$\alpha(t)$ et $\beta(t)$ obtenues par intégration des équations (2.3.44) sont des fonctions harmoniques de période $2\pi/U \cos\varphi$ et d'amplitude $(\alpha_0^2 + \beta_0^2)^{1/2}$.

En faisant usage des équations (2.3.39) après avoir précisé leurs seconds membres, on peut également tenir compte de la dérive du gyroscope provoquée par le frottement dans les axes de sa suspension.

§ 4. Pendule gyroscopique imperturbable

Au chap. I, § 2, nous avons montré que les paramètres d'un pendule composé et les conditions initiales de son mouvement peuvent être choisis de telle sorte que la droite joignant le point de suspension de ce pendule et son centre de gravité passe constamment par le centre de la Terre supposée sphérique à répartition radiale de la densité. Le déplacement du point de suspension du pendule peut être, dans ce cas, absolument quelconque. Conformément à la théorie de précession des gyroscopes, l'élément sensible d'un gyrohorizon-compas de Geckeler que l'on appelle encore compas gyroscopique spatial, jouit, on le montrera plus loin au § 6 du présent chapitre, exactement de la même propriété. Il faut seulement choisir, de façon convenable, les conditions initiales de son mouvement. Le moment cinétique propre total de l'élément sensible d'un tel compas est dans ce cas constamment perpendiculaire à la direction de la vitesse v de mouvement du point de suspension par rapport à une sphère immobile S ayant le même centre et le même rayon R que la Terre (fig. 63); la valeur de la vitesse v mentionnée est liée par une relation trigonométrique simple (2.6.36) à l'angle $2\sigma = 2\varepsilon$ formé entre les axes de rotation propre des gyroscopes.

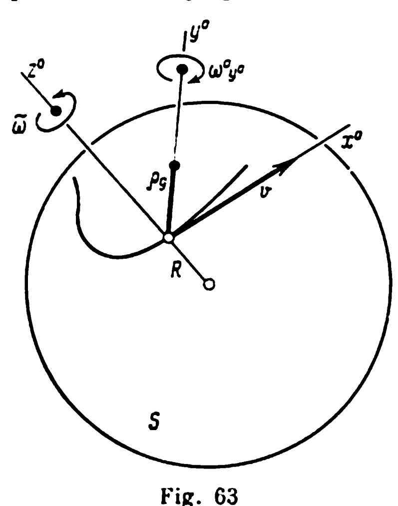


Fig. 63

Les propriétés physiques sus-indiquées du pendule composé et du compas gyroscopique spatial ne se manifestent, bien entendu, que lorsqu'il n'y a pas de frottement dans le dispositif de leur suspension et, dans le cas du compas gyroscopique, encore dans les axes des boîtiers des gyroscopes.

Au cours du présent paragraphe, nous allons montrer qu'un pendule gyroscopique à point de suspension mobile, se déplaçant

de façon arbitraire sur la sphère terrestre, possède des propriétés semblables si certaines conditions sont réalisées. Pour l'étude du comportement d'un tel pendule il est commode de considérer le mouvement de son point de suspension par rapport à la sphère immobile S déjà mentionnée et le mouvement du pendule gyroscopique lui-même par rapport à un système de coordonnées $\xi^*\eta^*\zeta^*$ ayant son origine au point de suspension du pendule et animé d'un mouvement de translation. Ceci permet, de même que dans le cas du pendule composé, de simplifier fortement l'établissement des équations du mouvement et la prise en compte des forces d'inertie d'Euler (v. chap. I, § 1). En même temps, le caractère de la résolution du problème devient plus clair parce qu'on n'a pas à tenir compte de la rotation de la Terre. L'étude, qui suit, se fait en partant des équations de la théorie de précession des gyroscopes exposée au cours de deux paragraphes précédents.

En considérant le problème de mouvement d'un pendule gyroscopique à point de suspension mobile, nous supposerons nulles les forces de frottement dans les axes de sa suspension à la cardan, ainsi que les forces qui tendent à faire tourner l'anneau intérieur (boîtier) par rapport à l'anneau extérieur. Ainsi, dans les équations (2.3.11) du paragraphe précédent il convient de poser

$$K_{x_2} = 0, \quad L_{y_2} = 0. \tag{2.4.1}$$

Si, de plus, on considère que le rotor tourne à une vitesse angulaire constante dans un boîtier fermé, il est naturel de supposer que

$$m_{z_1} = 0, \quad M_{z_1} = 0. \tag{2.4.2}$$

Enfin, admettons que les forces extérieures appliquées à l'anneau de cardan extérieur développent le moment résultant nul autour de l'axe x_2 (ξ) de cet anneau et que les forces appliquées à l'anneau intérieur ne créent pas de moment autour de l'axe z_1 (z), c'est-à-dire

$$k_{x_2} = 0, \quad l_{z_1} = 0. \tag{2.4.3}$$

A cet effet, il suffit en règle générale que l'anneau de cardan extérieur soit équilibré et que le centre de gravité de l'anneau intérieur se situe sur l'axe z_1 (z), c'est-à-dire sur l'axe de rotation propre du rotor de gyroscope.

Avec les hypothèses adoptées, les équations (2.3.11) prennent une forme beaucoup plus simple suivante:

$$\begin{aligned} \omega^1_{y_1} H &= l_{x_1} + m_{x_1}, \\ -\omega^1_{x_1} H &= l_{y_1} + m_{y_1}, \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

où H est une constante.

Pour la suite de cette analyse, il est essentiel de noter que la forme de ces équations se conserve dans un système de coordonnées

$x'y'z'$ quelconque si l'origine de ce système est placée au centre de la suspension à la cardan et son axe z' coïncide avec l'axe z_1 (z) du système $x_1y_1z_1$ rigidement lié à l'anneau de cardan intérieur (boîtier). En effet (fig. 64), les projections $\omega'_{x'}$, $\omega'_{y'}$ et $\omega'_{z'}$ de la vitesse angulaire $\overline{\omega}'$ d'un tel système $x'y'z'$ sur ses propres axes sont liées aux projections $\omega^1_{x_1}$, $\omega^1_{y_1}$ et $\omega^1_{z_1}$ de la vitesse angulaire $\overline{\omega}^1$ du système de coordonnées $x_1y_1z_1$ sur ses axes par les relations

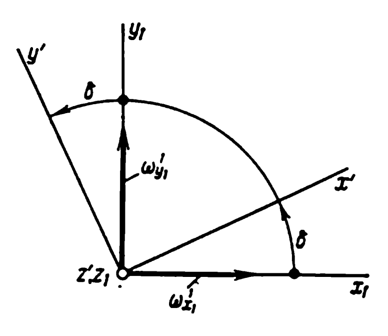


Fig. 64

$$\begin{aligned} \omega'_{x'} &= \omega^1_{x_1}\cos\delta + \omega^1_{y_1}\sin\delta, \\ \omega'_{y'} &= -\omega^1_{x_1}\sin\delta + \omega^1_{y_1}\cos\delta, \quad (2.4.5) \\ \omega'_{z'} &= \omega^1_{z_1} + \frac{d\delta}{dt}. \end{aligned}$$

Ici δ est l'angle des axes x' et x_1 ; pour $\delta > 0$ le système de coordonnées $x'y'z'$ est tourné en sens inverse des aiguilles d'une montre par rapport au système $x_1y_1z_1$, la rotation étant observée du côté de la partie positive de l'axe z_1 (z').

Introduisons dans les deux premières relations (2.4.5) les valeurs de $\omega^1_{x_1}$ et $\omega^1_{y_1}$ tirées des égalités (2.4.4). En remarquant que les expressions

$$\begin{aligned} (l_{x_1} + m_{x_1})\cos\delta + (l_{y_1} + m_{y_1})\sin\delta &= l_{x'} + m_{x'}, \\ -(l_{x_1} + m_{x_1})\sin\delta + (l_{y_1} + m_{y_1})\cos\delta &= l_{y'} + m_{y'} \end{aligned} \qquad (2.4.6)$$

représentent les sommes des moments, par rapport aux axes x' et y', des forces appliquées à l'anneau intérieur et au rotor de gyroscope, on obtient les équations [1])

$$\begin{aligned} \omega'_{y^*}H &= l_{x^*} + m_{x^*}, \\ -\omega'_{x^*}H &= l_{y^*} + m_{y^*}. \end{aligned} \qquad (2.4.7)$$

Passons maintenant à la question principale, c'est-à-dire à l'étude du comportement d'un pendule gyroscopique dont le point de suspension se déplace de façon quelconque sur la surface de la Terre et donc sur la surface de la sphère non tournante S. A cet effet, établissons tout d'abord les équations différentielles du mouvement de l'axe du gyropendule par rapport au système de coordonnées en mouvement de translation $\xi^*\eta^*\zeta^*$ dont les axes ne changent pas

[1]) Les équations (2.4.7) peuvent, bien entendu, s'obtenir sans procéder aux calculs indiqués si l'on remarque que d'après les relations (2.4.4) le vecteur de composantes $\omega^1_{x_1}$ et $\omega^1_{y_1}$ est perpendiculaire au vecteur de composantes $l_{x_1} + m_{x_1}$ et $l_{y_1} + m_{y_1}$ et que les modules de ces vecteurs sont proportionnels.

d'orientation par rapport aux étoiles fixes. Quant au centre de la sphère S, il est considéré comme « absolument fixe ».

Les équations (2.4.7) ne font intervenir que les forces extérieures appliquées à l'anneau de cardan intérieur (boîtier) et au rotor de gyroscope. Suivant les lois de la mécanique du mouvement relatif, le système des forces exercées sur l'anneau intérieur (boîtier) et sur le rotor doit contenir, en plus des forces de gravitation, encore les forces d'inertie d'entraînement et les forces d'inertie de Coriolis, dues au mouvement du système de référence $\xi^*\eta^*\zeta^*$ (c'est-à-dire les forces d'inertie d'Euler, v. § 1 du chapitre précédent). Or, les forces d'inertie de Coriolis sont nulles parce que le système $\xi^*\eta^*\zeta^*$ se meut en translation. Les forces d'inertie d'entraînement élémentaires qui sont pour la même raison parallèles se réduisent à une force unique P. Cette dernière passe par le centre de gravité commun de l'anneau intérieur (boîtier) et du rotor de gyroscope et est dirigée dans le sens opposé à l'accélération absolue de l'origine du système $\xi^*\eta^*\zeta^*$, c'est-à-dire du centre de la suspension à la cardan.

Désignons par $w_{x'}$, $w_{y'}$ et $w_{z'}$ les projections sur les axes x', y' et z' du vecteur accélération du centre de la suspension du gyroscope et notons m la masse totale de l'anneau intérieur (boîtier) et du rotor. Suivant les théorèmes de la mécanique du mouvement relatif, exposés au § 1 du chapitre précédent, les projections sur les mêmes axes de la résultante cherchée des forces d'inertie d'entraînement « appliquées » aux masses élémentaires de l'anneau intérieur (boîtier) et du rotor sont définies par les formules

$$P_{x'} = -mw_{x'}, \quad P_{y'} = -mw_{y'}, \quad P_{z'} = -mw_{z'}. \qquad (2.4.8)$$

Admettons que les forces de gravitation exercées par la Terre sur les éléments du système « anneau intérieur — rotor » se ramènent à une seule force F dirigée vers le centre de la Terre et passant par leur centre de gravité commun. Posons que ce dernier se situe dans la partie négative de l'axe z' (z) (c'est-à-dire sur l'axe du rotor) à une distance a de l'origine des coordonnées. Suivant les formules bien connues de la statique (v. aussi fig. 65) on a alors

$$\begin{aligned} l_{x'} + m_{x'} &= a\,(P_{y'} + F_{y'}), \\ l_{y'} + m_{y'} &= -a\,(P_{x'} + F_{x'}). \end{aligned} \qquad (2.4.9)$$

Dans ces formules $F_{x'}$ et $F_{y'}$ désignent les projections de la force F sur les axes x' et y'.

En introduisant les seconds membres des formules (2.4.9) dans les égalités (2.4.7), on obtient les équations initiales du mouvement du pendule gyroscopique:

$$\begin{aligned} \omega'_{x'} H &= a\,(P_{x'} + F_{x'}), \\ \omega'_{y'} H &= a\,(P_{y'} + F_{y'}). \end{aligned} \qquad (2.4.10)$$

D'après ce qui précède, ces équations sont valables quelque soit le système de coordonnées $x'y'z'$ ayant son origine au centre de la suspension à la cardan et son axe z' dirigé suivant l'axe z du rotor. Ceci étant, doivent être nulles les forces de frottement dans les axes de la suspension et les forces qui tendent à faire tourner l'anneau extérieur par rapport au support, c'est-à-dire doivent être satisfaites les conditions (2.4.1), ainsi que les conditions (2.4.2) et (2.4.3) concernant les autres forces exercées sur le système mécanique « anneau extérieur — anneau intérieur — rotor », c'est-à-dire sur le gyroscope suspendu à la cardan.

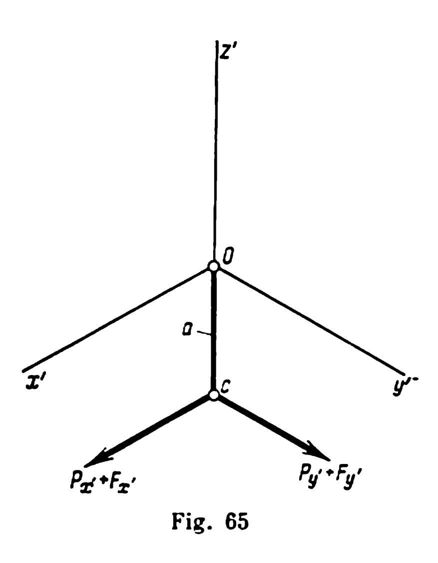


Fig. 65

Introduisons un trièdre $x^0y^0z^0$ connu sous le nom de trièdre naturel de Darboux (cas particulier du trièdre de Darboux utilisé au chap. I, § 2), de sommet au centre de la suspension à la cardan, dont l'arête z^0 est normale à la sphère S et l'arête x^0 est dirigée suivant le vecteur vitesse $\bar{v}$ du centre de la suspension (par là même la position du trièdre est définie de façon univoque). Il n'est pas difficile de se convaincre en utilisant les formules (1.2.11) du chap. I, § 2 (v. aussi fig. 63) que les projections de la vitesse angulaire $\bar{\omega}^0$ du trièdre $x^0y^0z^0$ par rapport au système de coordonnées $\xi^*\eta^*\zeta^*$ (ou, ce qui revient au même, par rapport à la sphère non tournante S) sur ses arêtes x^0 et y^0 sont définies par les égalités

$$\omega^0_{x^0}=0, \quad \omega^0_{y^0}=\frac{v}{R}. \tag{2.4.11}$$

A cet effet, il suffit de poser dans les formules (1.2.11) $v_x = v$ et $v_y = 0$, ainsi que $p = \omega^0_{x^0}$ et $q = \omega^0_{y^0}$. Pour ce qui est de la projection $\omega^0_{z^0}$ de la vitesse angulaire mentionnée sur l'arête z^0, elle dépend de la courbure géodésique de la courbe que décrit sur la sphère S le point de suspension du pendule gyroscopique, ainsi que du module de la vitesse v avec laquelle ce point se déplace sur sa trajectoire. La relation correspondante est de la forme

$$\omega^0_{z^0}=\frac{v}{\rho_g}. \tag{2.4.12}$$

Ici ρ_g est le rayon de courbure géodésique de la courbe sphérique au point où se trouve à l'instant considéré le point de suspension.

Si l'on introduit la désignation

$$\omega^0_{z^0} = \tilde{\omega}, \tag{2.4.13}$$

les projections de l'accélération du sommet du trièdre $x^0y^0z^0$ sur ses arêtes x^0, y^0 et z^0 seront exprimées, conformément aux formules générales (1.2.13) du chap. I, § 2, par

$$w^0_{x^0} = \frac{dv}{dt}, \quad w^0_{y^0} = \tilde{\omega} v, \quad w^0_{z^0} = -\frac{v^2}{R} \tag{2.4.14}$$

Pour s'en assurer, il suffit de remplacer dans les formules (1.2.13) les désignations des axes x, y, z par x^0, y^0, z^0 et de poser, compte

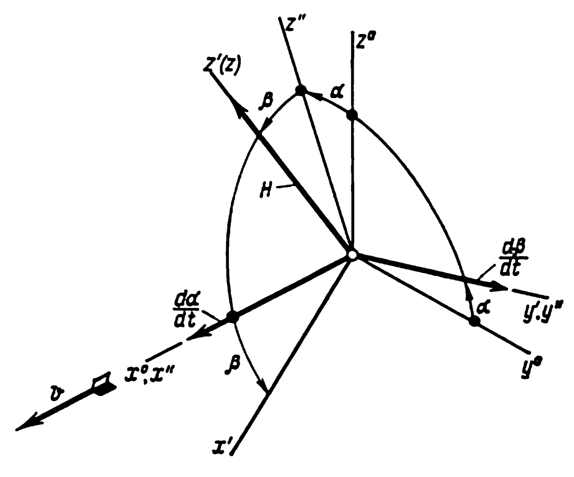


Fig. 66

tenu des égalités (2.4.11) et (2.4.13), $p = \omega^0_{x^0} = 0$, $q = \omega^0_{y^0} = v/R$, $r = \omega^0_{z^0} = \tilde{\omega}$.

Le choix des directions des axes x' et y' du système $x'y'z'$ introduit plus haut étant arbitraire, l'axe x' de ce système peut être dirigé (fig. 66) de telle sorte qu'il se situe dans le plan $z'x^0$ contenant l'axe z (z') du rotor et l'arête x^0 du trièdre naturel de Darboux. Comme il a été indiqué précédemment, cette arête est le support du vecteur vitesse du point de suspension du pendule gyroscopique (fig. 66). De ce fait, l'axe y' qui est perpendiculaire à l'arête x^0 (parce que l'arête x^0, l'axe x' et l'axe z' appartiennent à un même plan) sera contenu dans le plan y^0z^0.

Désignons par β l'angle formé entre l'axe x' et l'arête x^0 et par α l'angle que l'axe y' fait avec l'arête y^0. La vitesse angulaire (relative) du système de coordonnées $x'y'z'$ par rapport au trièdre $x^0y^0z^0$ est égale à la somme géométrique de la vitesse angulaire relative $d\alpha/dt$

dirigée suivant l'arête x^0 et de la vitesse angulaire relative $d\beta/dt$ orientée suivant l'axe y'.

Il n'est pas difficile de construire la table des cosinus des angles que forment les axes du système $x'y'z'$ avec les arêtes du trièdre $x^0y^0z^0$. Elle est de la forme

$$\begin{array}{cccc} & x^0 & y^0 & z^0 \\ x' & \cos\beta & \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta \\ y' & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ z' & \sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta. \end{array} \qquad (2.4.15)$$

Pour construire cette table, il s'avère utile d'introduire un système de coordonnées auxiliaire $x''y''z''$ (fig. 66) dont l'axe x'' coïncide avec l'arête x^0 du trièdre naturel de Darboux et l'axe y'' avec l'axe y' du système $x'y'z'$ (comme il a été indiqué plus haut, l'arête x^0 est perpendiculaire à l'axe y'). Aux valeurs positives de l'angle α correspond la rotation du système de coordonnées auxiliaire $x''y''z''$ en sens inverse des aiguilles d'une montre autour de l'arête x^0 ou, ce qui revient au même, autour de l'axe x'', la rotation étant observée de la partie positive de ce dernier axe. Pour $\beta > 0$, le système de coordonnées $x'y'z'$ est tourné d'une manière analogue par rapport au système auxiliaire $x''y''z''$ autour de l'axe y' confondu avec l'axe y''. Ainsi, les vitesses angulaires relatives $d\beta/dt$ et $d\alpha/dt$ mentionnées plus haut représentent respectivement les vitesses angulaires du système $x'y'z'$ par rapport au système $x''y''z''$ et de ce dernier par rapport au système $x^0y^0z^0$.

En utilisant la table (2.4.15) et en tenant compte des formules (2.4.11), (2.4.13) et des remarques faites sur les directions des vitesses angulaires relatives $d\alpha/dt$ et $d\beta/dt$, nous obtenons les formules suivantes

$$\begin{aligned} \omega'_{x'} &= \frac{v}{R}\sin\alpha\sin\beta - \tilde{\omega}\cos\alpha\sin\beta + \frac{d\alpha}{dt}\cos\beta, \\ \omega'_{y'} &= \frac{v}{R}\cos\alpha + \tilde{\omega}\sin\alpha + \frac{d\beta}{dt}, \\ \omega'_{z'} &= -\frac{v}{R}\sin\alpha\cos\beta + \tilde{\omega}\cos\alpha\cos\beta + \frac{d\alpha}{dt}\sin\beta. \end{aligned} \qquad (2.4.16)$$

Ici, $\omega'_{x'}$, $\omega'_{y'}$ et $\omega'_{z'}$ sont, comme précédemment, les projections sur les axes x', y' et z' de la vitesse angulaire $\bar{\omega}'$ du système de coordonnées $x'y'z'$ par rapport à la sphère non tournante S.

Ainsi que nous l'avons vu plus haut, la ligne d'action de la force de gravitation F passe par le centre de gravité commun du rotor et de l'anneau intérieur et par le centre de la Terre (confondu avec le centre de la sphère S). La distance a entre ce centre de gravité

et le point de suspension du pendule gyroscopique étant infiniment petite devant le rayon R de la Terre, on peut admettre avec une grande précision que la force F et l'axe z^0 sont parallèles et de sens contraires. Maintenant, compte tenu de la table (2.4.15), on obtient les formules suivantes:

$$F_{x^0} = F\cos\alpha\sin\beta,$$
$$F_{y^0} = -F\sin\alpha, \qquad (2.4.17)$$
$$F_{z^0} = -F\cos\alpha\cos\beta$$

qui donnent les projections de la force de gravitation F sur les axes du système de coordonnées $x'y'z'$.

En faisant usage de la même table (2.4.15) et des formules (2.4.14), on obtient pour les projections du vecteur accélération du centre de la suspension sur les axes du système de coordonnées $x'y'z'$ les expressions suivantes:

$$w_{x^0} = \frac{dv}{dt}\cos\beta + \tilde{\omega}v\sin\alpha\sin\beta + \frac{v^2}{R}\cos\alpha\sin\beta,$$
$$w_{y^0} = \tilde{\omega}v\cos\alpha - \frac{v^2}{R}\sin\alpha, \qquad (2.4.18)$$
$$w_{z^0} = \frac{dv}{dt}\sin\beta - \tilde{\omega}v\sin\alpha\cos\beta - \frac{v^2}{R}\cos\alpha\cos\beta.$$

Puis, en utilisant les formules (2.4.8), on trouve les projections sur les mêmes axes de la résultante P des forces d'inertie d'entraînement. Introduisons ces projections, de même que les expressions (2.4.17) dans les seconds membres des équations (2.4.10). Remplaçons dans les premiers membres de ces équations les quantités $\omega'_{x'}$ et $\omega'_{y'}$ par leurs expressions (2.4.16). On obtient ainsi un système de deux équations différentielles permettant de déterminer les fonctions inconnues du temps $\alpha = \alpha(t)$ et $\beta = \beta(t)$ qui définissent la position de l'axe z' (z) du rotor de gyropendule par rapport au trièdre naturel de Darboux $x^0y^0z^0$:

$$\left(\frac{v}{R}\sin\alpha\sin\beta - \tilde{\omega}\cos\alpha\sin\beta + \frac{d\alpha}{dt}\cos\beta\right)H =$$
$$= a\left[\left(F - \frac{mv^2}{R}\right)\cos\alpha\sin\beta - m\left(\frac{dv}{dt}\cos\beta + \tilde{\omega}v\sin\alpha\sin\beta\right)\right],$$
$$(2.4.19)$$
$$\left(\frac{v}{R}\cos\alpha + \tilde{\omega}\sin\alpha + \frac{d\beta}{dt}\right)H = a\left[-\left(F - \frac{mv^2}{R}\right)\sin\alpha - m\tilde{\omega}v\cos\alpha\right].$$

Les équations (2.4.19) contiennent les fonctions du temps

$$v = v(t), \quad \tilde{\omega} = \tilde{\omega}(t), \qquad (2.4.20)$$

qu'il convient de considérer comme connues. En effet, si le mouvement du point de suspension du gyropendule sur la sphère S est donné, le mouvement du trièdre naturel de Darboux devient par là même connu et les fonctions (2.4.20) s'avèrent entièrement définies.

Les relations (2.4.19) constituent les équations initiales de précession du mouvement de l'axe z' (z) du rotor de pendule gyroscopique. Elles sont valables si les conditions (2.4.1) à (2.4.3) sont satisfaites. Leur résolution pour des fonctions arbitraires données $v\,(t)$ et $\tilde{\omega}\,(t)$ et des valeurs finies (c'est-à-dire non infiniment petites) des angles cherchés α et β se heurte à des difficultés considérables. Le problème se simplifie, si, en tenant compte du faible écart de l'axe z' (z) de la verticale, on ne garde dans les équations (2.4.19) que les termes du premier ordre dans les développements des fonctions trigonométriques suivant les puissances des variables α et β. Les équations différentielles

$$\begin{aligned} &\frac{d\alpha}{dt} - \left[\tilde{\omega} + \frac{a}{H}\left(F - \frac{mv^2}{R}\right)\right]\beta = -\frac{am}{H}\frac{dv}{dt}, \\ &\frac{d\beta}{dt} + \left[\tilde{\omega} + \frac{a}{H}\left(F - \frac{mv^2}{R}\right)\right]\alpha = -\frac{am}{H}\tilde{\omega}v - \frac{v}{R} \end{aligned} \qquad (2.4.21)$$

qui en résultent sont des équations linéaires à coefficients variables. Comme il sera montré plus loin, elles peuvent s'intégrer par des quadratures.

Commençons par effectuer dans les équations (2.4.21) une substitution

$$\alpha = -\frac{am}{H}v + \vartheta. \qquad (2.4.22)$$

Il en résulte le système d'équations suivant

$$\begin{aligned} &\frac{d\vartheta}{dt} - p\,(t)\,\beta = 0, \\ &\frac{d\beta}{dt} + p\,(t)\,\vartheta = q\,(t), \end{aligned} \qquad (2.4.23)$$

dans lequel

$$\begin{aligned} &p\,(t) = \tilde{\omega} + \frac{a}{H}\left(F - \frac{mv^2}{R}\right), \\ &q\,(t) = \left[\frac{a^2m}{H^2}\left(F - \frac{mv^2}{R}\right) - \frac{1}{R}\right]v. \end{aligned} \qquad (2.4.24)$$

En effectuant sur les équations (2.4.23) l'opération de « compression » (v. § 1 du présent chapitre), on obtient une seule équation

$$\frac{d\chi}{dt} + ip\,(t)\,\chi = iq\,(t) \qquad (2.4.25)$$

dans laquelle $\chi\,(t)$ est une fonction du temps à valeurs complexes inconnue. Elle est liée aux fonctions cherchées $\vartheta(t)$ et $\beta(t)$ par

la relation

$$\chi(t) = \vartheta(t) + i\beta(t). \tag{2.4.26}$$

La solution générale de l'équation (2.4.25) est de la forme:

$$\chi(t) = C \exp\left[-i \int_0^t p(t)\,dt\right] +$$

$$+ i\left\{\int_0^t \left[q(t) \exp\left(i \int_0^t p(t)\,dt\right)\right] dt\right\} \exp\left[-\int_0^t p(t)\,dt\right]. \tag{2.4.27}$$

La constante complexe arbitraire C qui figure dans la solution (2.4.27) se détermine par la position initiale de l'axe du gyropendule et par la valeur initiale de la vitesse de son point de suspension par rapport à la sphère S. En effet, compte tenu des relations (2.4.26) et (2.4.22), on tire de la formule (2.4.27)

$$C = \chi(0) = \vartheta(0) + i\beta(0) = \alpha(0) + i\beta(0) + \frac{am}{H} v(0). \tag{2.4.28}$$

C'est le cas de

$$q(t) \equiv 0, \tag{2.4.29}$$

qui présente un intérêt particulier. En effet, l'expression de la fonction complexe $\chi(t)$ se simplifie alors fortement et le comportement du pendule gyroscopique devient particulièrement simple. Suivant la deuxième égalité (2.4.24), ce cas se présente si les paramètres a, m, H sont convenablement choisis et la vitesse v du mouvement du point de suspension du gyropendule sur la sphère S est constante.

Remarquons que si la vitesse de mouvement du point de suspension par rapport à la Terre est petite devant, par exemple, la vitesse circonférentielle des points d'équateur, on peut poser avec une certaine approximation que

$$F - \frac{mv^2}{R} \simeq mg = \text{const}, \tag{2.4.30}$$

où g est l'accélération de la pesanteur.

La condition (2.4.29) se réduit en vertu de l'égalité approchée (2.4.30) et de la deuxième égalité (2.4.24) à la *condition de Schüler* pour le pendule gyroscopique, bien connue,

$$\frac{amg}{H} = \sqrt{\frac{g}{R}} = n_s \tag{2.4.31}$$

dans laquelle la vitesse v ne figure pas. Ici n_s est la *pulsation de Schüler*.

Supposons que l'identité (2.4.29) est réalisée et que de plus les conditions initiales du mouvement sont telles que

$$\vartheta(0) = 0, \quad \beta(0) = 0. \tag{2.4.32}$$

Alors, suivant la formule (2.4.27) et l'égalité (2.4.28), on a pour un t quelconque

$$\chi(t) = 0. \tag{2.4.33}$$

Il en résulte, en vertu de l'égalité (2.4.26), les identités

$$\vartheta(t) \equiv 0, \quad \beta(t) \equiv 0. \tag{2.4.34}$$

La deuxième identité (2.4.34) permet de conclure (fig. 66 et 67) que dans le cas considéré l'axe x' du système de coordonnées $x'y'z'$ et l'arête x^0 du trièdre de Darboux $x^0y^0z^0$ sont constamment confondus. Le vecteur vitesse du sommet du trièdre $x^0y^0z^0$ (ou, ce qui revient au même, du point de suspension du pendule gyroscopique) par rapport à la sphère S est dirigé suivant l'arête x^0. Il s'ensuit que l'axe z' (z) (axe du rotor de gyroscope) se trouve dans le plan y^0z^0 perpendiculaire à la vitesse $\bar{v}$.

Suivant la première identité (2.4.34) et l'égalité (2.4.22), on a pour les mêmes conditions initiales (2.4.32) la relation suivante, valable pour tout instant t:

$$\alpha = -\frac{am}{H} v(t). \tag{2.4.35}$$

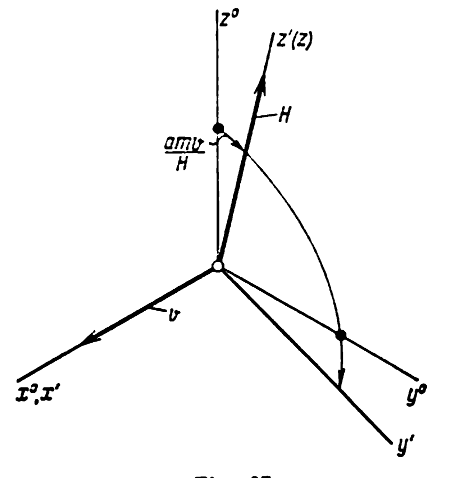


Fig. 67

Elle signifie que l'axe z (z') de rotation propre du rotor s'écarte de l'arête z^0, c'est-à-dire de la verticale géocentrique (prolongement du rayon de la Terre mené par le point de suspension du pendule gyroscopique) dans le sens de la partie positive de l'axe y^0 (v. fig. 67). Il apparaît que cet écart est proportionnel à la vitesse v du point de suspension par rapport à la sphère S. Cette propriété dont jouit l'axe du rotor se conserve quel que soit le mouvement du point de suspension sur la sphère S (et par conséquent, sur la surface terrestre). On s'explique ainsi le nom de « *pendule imperturbable* » que l'on donne quelquefois au pendule gyroscopique dont les paramètres satisfont à la condition (2.4.31) et qui est appelé le plus souvent *pendule gyroscopique de Schüler*.

Lorsque la vitesse $\bar{v}$ du point de suspension par rapport à la sphère S est connue en grandeur et en direction, la verticale géocen-

trique à bord d'un mobile, porteur du pendule gyroscopique, peut être construite assez facilement. C'est le cas, par exemple, d'un phare flottant, où la vitesse v est égale à la vitesse circonférentielle des points situés sur le parallèle correspondant de la Terre et est dirigée vers l'est.

Si le pendule gyroscopique est monté à bord d'un navire, la construction de la verticale exige que l'on connaisse, en plus de la position et du cap du navire, encore sa vitesse par rapport à la Terre. On sait que cette vitesse se mesure à l'aide d'un loch mais à la vitesse du courant près.

Considérons le cas où l'égalité (2.4.31) est vérifiée et donc $q(t) = 0$, mais les conditions initiales (2.4.32) du mouvement de l'axe du rotor de pendule gyroscopique ne sont pas satisfaites. Dans ce cas, suivant la formule (2.4.27), l'axe z' (z) du rotor sera animé, par rapport au trièdre naturel de Darboux, d'un mouvement conique à une vitesse angulaire de parcours[1] $-p(t)$, autour d'une droite qui fait avec les faces x^0z^0 et y^0z^0 les angles respectifs

$$\alpha = -\frac{am}{H}v, \quad \beta = 0. \tag{2.4.36}$$

Compte tenu de l'égalité approchée (2.4.30), on peut représenter, dans le cas considéré, la quantité $p(t)$ d'après la première formule (2.4.24), sous la forme suivante:

$$p(t) = \tilde{\omega}(t) + n_s. \tag{2.4.37}$$

Supposons que le trièdre naturel de Darboux $x^0y^0z^0$ et donc le point de suspension du pendule gyroscopique soient immobiles par rapport à la Terre. La quantité $-p(t)$ représentera alors la vitesse angulaire apparente (c'est-à-dire par rapport à la Terre) du parcours de l'axe du rotor de pendule gyroscopique autour de la droite dont la position est déterminée par les angles (2.4.36). La droite est écartée de la verticale géométrique, c'est-à-dire de l'arête z^0, exactement vers le nord. La valeur de $\tilde{\omega}$ à la latitude φ est égale à la projection verticale $U \sin\varphi$ de la vitesse angulaire U de la Terre. Dans ce cas particulier, la vitesse v du point de suspension par rapport à la sphère S est égale à $RU \cos\varphi$ et est orientée, de même que l'arête x^0, vers l'est, suivant la tangente au parallèle terrestre (v. § 6 du présent chapitre).

---

[1] Par vitesse angulaire de parcours, il convient d'entendre ici la composante, le long de la droite indiquée, du vecteur vitesse angulaire d'un corps imaginaire enfoncé sur cette droite comme sur un axe et entraîné par l'axe z' (z) jouant en quelque sorte le rôle de « guide ». Notons que pour $q = 0$ l'angle formé par la droite (2.4.36) avec l'axe z' (z) reste constant en vertu de la formule (2.4.27). On peut donc considérer que l'axe z' (z) est invariablement lié au corps imaginaire.

De ce qui précède nous pouvons conclure que pour la construction réelle de la verticale géocentrique (de la perpendiculaire à la sphère S) il est nécessaire de connaître à chaque instant non seulement la direction de l'axe du pendule gyroscopique de Schüler mais également la valeur et la direction de la vitesse $\bar{v}$ du point de suspension du pendule par rapport à la sphère S. Pourtant, il se trouve que la verticale géocentrique peut se construire sans avoir recours à des renseignements préliminaires sur la valeur et la direction de la vitesse $\bar{v}$. A cet effet, il est nécessaire de disposer de deux pendules gyroscopiques dont les gyroscopes tournent dans des sens opposés. Alors, si les conditions initiales correspondantes et la condition (2.4.31) sont réalisées, l'axe de l'un des gyroscopes sera écarté de la verticale géocentrique d'un angle défini par la formule (2.4.36), et l'axe de l'autre le sera de l'angle égal en grandeur mais de signe opposé. D'après ce qui précède, les deux axes seront situés dans un plan perpendiculaire au vecteur vitesse $\bar{v}$. Par suite, la bissectrice de l'angle formé entre les axes des rotors sera dirigée suivant la verticale géocentrique, et l'angle, lui, représentera à une certaine échelle la valeur de la vitesse v. Un tel dispositif à deux gyroscopes jouit des mêmes propriétés que le gyrohorizon-compas de Geckeler (v. plus loin § 6 du présent chapitre). En effet, lorsque le point de suspension se meut suivant un parallèle de la Terre, le plan contenant les axes des deux rotors se confond avec le plan méridien. On montre que pour un autre mouvement quelconque du point de suspension ce plan s'écarte du plan méridien d'un angle égal à la déviation de vitesse classique d'un compas gyroscopique (v. de nouveau § 6 du présent chapitre).

Les conclusions faites ci-dessus sont tirées de l'étude des équations différentielles linéaires (2.4.23) et ne sont donc valables qu'avec une certaine approximation, pourtant suffisante pour la pratique. C'est ce qui distingue le pendule gyroscopique de Schüler du gyrohorizon-compas spatial de Geckeler dont les propriétés analogues sont réalisées en principe de façon exacte.

§ 5. Systèmes gyroscopiques complexes

La méthode que l'on applique de préférence lors de l'étude des dispositifs gyroscopiques complexes, pour établir les équations de leur mouvement est la seconde méthode de Lagrange [1]). Tout en rendant justice à cette méthode, qui conduit au but en quelque sorte automatiquement, il est impossible de ne pas reconnaître qu'elle comporte des calculs très encombrants qui cachent parfois

---

[1]) Voir plus loin chap. III, § 1, où, à l'aide de la seconde méthode de Lagrange, sont établies les équations différentielles complètes (de nutation) du mouvement du gyroscope suspendu à la cardan.

le sens cinématique des équations obtenues. Or, si l'on a une certaine habitude, les équations du mouvement des dispositifs gyroscopiques complexes peuvent s'obtenir beaucoup plus simplement par application répétée du théorème du moment cinétique à l'ensemble mécanique entier représenté par le dispositif considéré et à ses parties constitutives. La description de la méthode correspondante, sur l'exemple d'étude d'un stabilisateur gyroscopique concret, constitue le contenu principal du présent paragraphe. Un autre exemple de dispositif gyroscopique complexe est fourni par l'élément sensible d'un gyrohorizon-compas dont la théorie est développée au cours du paragraphe suivant.

Le mouvement des dispositifs gyroscopiques (v. § 1 du présent chapitre) se ramène, après un certain phénomène transitoire, à un changement lent de l'orientation des axes de rotation propre des gyroscopes par rapport aux étoiles fixes. Un tel mouvement est généralement appelé mouvement de précession. Comme il a été indiqué à la fin du § 2 du présent chapitre, en étudiant le mouvement de précession on peut ne pas tenir compte des moments cinétiques des éléments de suspension du dispositif gyroscopique et des boîtiers de ses gyroscopes, ainsi que des composantes équatoriales des moments cinétiques des rotors des gyroscopes ; il en est de même pour les moments cinétiques des rotors des moteurs auxiliaires et des détecteurs d'angles. Quant aux composantes dirigées suivant l'axe de rotation propre du gyroscope correspondant (que l'on appelle composantes polaires), chacune d'elles peut être posée égale au produit du moment d'inertie axial (polaire) du rotor de gyroscope par sa vitesse angulaire par rapport à son boîtier.

Ces hypothèses simplificatrices conduisent à une théorie dite de précession (ou encore élémentaire ou simplifiée) des phénomènes gyroscopiques (v. § 2 du présent chapitre). Avec ces hypothèses, les équations qui décrivent le mouvement d'un dispositif gyroscopique prennent une forme beaucoup plus simple. En particulier, leur ordre se trouve réduit. En même temps, la précision des résultats des études obtenus dans le cadre de la théorie de précession des gyroscopes se révèle parfaitement suffisante, sauf dans des cas particuliers où on est amené à tenir compte de l'influence due à l'inertie des anneaux de cardan. Quant à l'étude des phénomènes transitoires intervenant dans les dispositifs gyroscopiques, étude qui s'impose par exemple lorsqu'on cherche à établir les conditions de stabilité du mouvement, elle ne peut être réalisée qu'en tenant compte des moments cinétiques de toutes les parties du dispositif ; les équations de la théorie de précession sont dans ce cas inapplicables [1])

---

[1]) Voir plus loin chap. III, § 5, où sont étudiées les conditions de stabilité d'un stabilisateur gyroscopique à un axe, ainsi que le § 6 du même chapitre où l'on compare les conditions de stabilité des stabilisateurs à deux axes et à un axe.

En utilisant le théorème du moment cinétique pour établir les équations différentielles du mouvement d'un dispositif gyroscopique, il convient avant tout de préciser la composition de l'ensemble mécanique dont on étudie la dérivée du vecteur moment cinétique. Dans ces conditions, le moment cinétique et sa dérivée doivent être rapportés à un système de coordonnées en mouvement de translation, c'est-à-dire non tournant, qui doit être nettement défini. Par la suite, ce système sera appelé *système de référence* et désigné par $\xi^*\eta^*\zeta^*$. C'est précisément par rapport à ce système que doivent être calculées les forces d'inertie d'Euler « agissant » sur l'ensemble mécanique considéré. Comme le système de référence n'est animé que d'un mouvement de translation (v. chap. I, § 1), les forces d'inertie d'Euler ne sont représentées dans ce cas que par les forces d'inertie d'entraînement possédant une résultante. La ligne d'action de cette dernière passe par le centre de gravité de l'ensemble mécanique. Cette résultante est orientée dans le sens opposé à l'accélération de l'origine du système $\xi^*\eta^*\zeta^*$, laquelle est rapportée à un système non tournant $\xi^s\eta^s\zeta^s$ d'origine au centre de la Terre, qui peut être considéré comme une sorte de système « absolu » (v. chap. I, fin du § 1). En grandeur, la résultante est égale au produit de la masse de l'ensemble mécanique considéré par l'accélération du système de référence $\xi^*\eta^*\zeta^*$ que nous venons de mentionner.

Pour système de référence on peut prendre, dans le cas général, un système de coordonnées $\xi\eta\zeta$ arbitraire, non nécessairement en mouvement de translation. Pourtant, si le système de référence $\xi\eta\zeta$ tourne par rapport au système de coordonnées « absolu » $\xi^s\eta^s\zeta^s$, la prise en compte des forces d'inertie devient plus difficile à réaliser. Dans ce cas les forces d'inertie de Coriolis ne seront pas nulles et on devra les faire entrer en ligne de compte dans les équations du mouvement de l'ensemble mécanique rapporté au système de coordonnées $\xi\eta\zeta$.

Soit $\xi^*\eta^*\zeta^*$ un système de coordonnées choisi comme celui de référence et soit G le moment cinétique de l'ensemble mécanique considéré par rapport à ce système. Ce dernier est en mouvement de translation. Par suite, en vertu du théorème du moment cinétique, on a les relations

$$\frac{dG_{\xi^*}}{dt} = M_{\xi^*}, \qquad \frac{dG_{\eta^*}}{dt} = M_{\eta^*}, \qquad \frac{dG_{\zeta^*}}{dt} = M_{\zeta^*}. \qquad (2.5.1)$$

Les premiers membres de ces relations sont les dérivées par rapport au temps des projections du vecteur moment cinétique $\bar{G}$ respectivement sur les axes ξ^*, η^* et ζ^*, alors que leurs seconds membres représentent les sommes des moments, par rapport aux mêmes axes, de toutes les forces extérieures et des moments des forces d'inertie d'entraînement.

Les relations (2.5.1) ne sont pas toujours commodes pour les applications parce que les équations obtenues sont très encombrantes. Bien souvent, on arrive à simplifier de façon notable les calculs, en déterminant les projections de la dérivée du moment cinétique sur les axes d'un système de coordonnées mobile, spécialement choisi, dont le mouvement est lié d'une manière ou d'une autre au mouvement de l'ensemble mécanique étudié. Désignons par xyz un de tels systèmes de coordonnées ; nous l'appellerons système auxiliaire ou *système de calcul*. Soit $\bar{\omega}$ la vitesse angulaire absolue de ce nouveau système, c'est-à-dire sa vitesse angulaire par rapport au système de référence non tournant $\xi^*\eta^*\zeta^*$. Admettons que les origines de ces deux systèmes sont confondues. Les projections, sur les axes x, y et z, de la dérivée du vecteur moment cinétique de l'ensemble mécanique considéré, en cas de sa variation par rapport au système de référence $\xi^*\eta^*\zeta^*$, peuvent être représentées par les expressions connues suivantes :

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\bar{G}}{dt}\right)_x &= \frac{dG_x}{dt} + \omega_y G_z - \omega_z G_y,\\ \left(\frac{d\bar{G}}{dt}\right)_y &= \frac{dG_y}{dt} + \omega_z G_x - \omega_x G_z,\\ \left(\frac{d\bar{G}}{dt}\right)_z &= \frac{dG_z}{dt} + \omega_x G_y - \omega_y G_x,\end{aligned} \tag{2.5.2}$$

où G_x, G_y, G_z sont les projections du vecteur moment cinétique sur les mêmes axes et ω_x, ω_y, ω_z les composantes de la vitesse angulaire $\bar{\omega}$ du système de coordonnées xyz par rapport au système de référence $\xi^*\eta^*\zeta^*$ ou, ce qui revient au même, par rapport au système « absolu ».

D'après le théorème du moment cinétique, les expressions (2.5.2) sont égales respectivement aux sommes des moments, par rapport aux axes x, y et z, de toutes les forces extérieures appliquées à l'ensemble mécanique considéré, y compris les forces d'inertie d'entraînement dues au mouvement du système de référence $\xi^*\eta^*\zeta^*$ et non du système auxiliaire xyz. L'objet du système de coordonnées xyz est purement cinématique : le calcul de la dérivée du moment cinétique, lors de la variation de celui-ci par rapport au système de référence $\xi^*\eta^*\zeta^*$, peut s'avérer plus simple dans ce système que dans le système $\xi^*\eta^*\zeta^*$. En désignant les sommes mentionnées des moments de forces extérieures par M_x, M_y et M_z, on obtient les relations

$$\begin{aligned}\frac{dG_x}{dt} + \omega_y G_z - \omega_z G_y &= M_x,\\ \frac{dG_y}{dt} + \omega_z G_x - \omega_x G_z &= M_y,\\ \frac{dG_z}{dt} + \omega_x G_y - \omega_y G_x &= M_z,\end{aligned} \tag{2.5.3}$$

dont l'ensemble est équivalent aux relations (2.5.1) traduisant le théorème du moment cinétique.

Le système des forces extérieures exercées sur les corps d'un ensemble mécanique comprend également les forces de réaction inconnues des liaisons de ces corps avec le support (généralement mobile) sur lequel ils sont montés. Dans la plupart des cas, les dispositifs gyroscopiques sont liés à leur support au moyen de suspensions à la cardan. Par conséquent, si l'ensemble mécanique de corps considéré est constitué par plusieurs éléments d'un dispositif gyroscopique donné, par exemple par tout l'ensemble sans anneau extérieur ou par un gyroscope avec son boîtier et son rotor, la liaison extérieure d'un tel ensemble est constituée, en règle générale, par une articulation plate. Dans certains cas, on peut considérer avec une certaine approximation que le couple de frottement dans l'articulation ne dépend pas des réactions normales des paliers de son axe. Si l'axe de l'articulation coïncide avec un des axes du système de coordonnées xyz, une des relations (2.5.3) devient l'équation du mouvement du dispositif gyroscopique, qui ne contient pas de réactions normales inconnues des liaisons. Dans le cas plus général où l'axe de l'articulation ne coïncide avec aucun des axes x, y et z et le frottement revêt le même caractère, l'équation du mouvement du dispositif gyroscopique, sans réactions normales, prend la forme

$$\left(\frac{dG_x}{dt}+\omega_y G_z-\omega_z G_y\right)\cos(\widehat{x,\nu})+\left(\frac{dG_y}{dt}+\omega_z G_x-\omega_x G_z\right)\cos(\widehat{y,\nu})+\left(\frac{dG_z}{dt}+\omega_x G_y-\omega_y G_x\right)\cos(\widehat{z,\nu})=M_\nu. \quad (2.5.4)$$

Ici $\cos(\widehat{x,\nu})$, $\cos(\widehat{y,\nu})$, $\cos(\widehat{z,\nu})$ sont les cosinus des angles faits par l'axe ν de l'articulation avec les axes x, y et z, et M_ν est la somme des moments, par rapport à l'axe ν, du système de forces extérieures agissant sur l'ensemble mécanique considéré des corps du dispositif gyroscopique. Le moment M_ν comprend également: le couple de frottement dans l'axe de l'articulation, le couple moteur qui peut être appliqué à cet axe au moyen d'un moteur électrique par exemple, et les moments, par rapport à l'axe ν, des forces d'inertie d'entraînement dues au mouvement de translation du système de référence $\xi^*\eta^*\zeta^*$.

L'équation (2.5.4) résulte de l'égalité évidente

$$M_\nu=M_x\cos(\widehat{x,\nu})+M_y\cos(\widehat{y,\nu})+M_z\cos(\widehat{z,\nu}), \quad (2.5.5)$$

si l'on y introduit à la place des moments M_x, M_y et M_z les premiers membres des relations (2.5.3).

Si le couple de frottement dans l'axe de l'articulation dépend des réactions normales, l'établissement de l'équation du mouvement ne contenant pas ces réactions inconnues devient un problème plus difficile à résoudre et exige que l'on utilise toutes les trois relations (2.5.3). Remarquons que le problème visant à obtenir, par la première méthode de Lagrange (méthode des multiplicateurs), les équations du mouvement d'un dispositif gyroscopique, lesquelles tiennent compte du frottement dépendant des valeurs des réactions normales, est encore assez difficile.

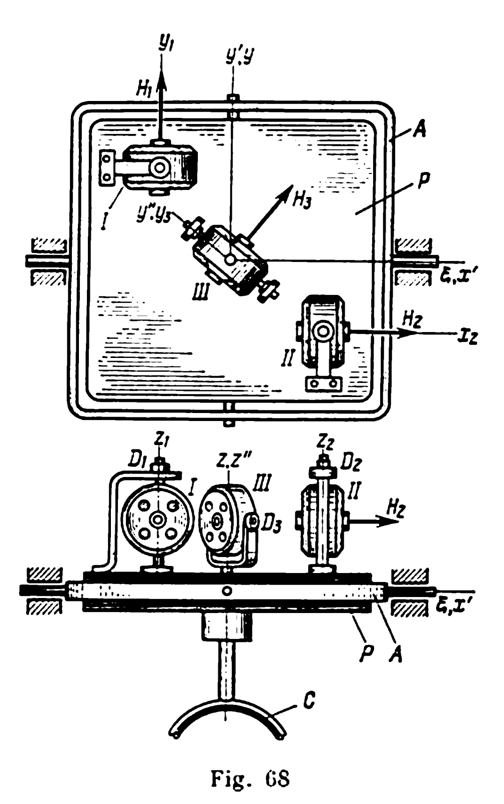


Fig. 68

Illustrons l'application de la méthode exposée ci-dessus sur l'exemple d'établissement des équations du mouvement d'un dispositif gyroscopique complexe, à savoir d'un stabilisateur à trois axes (fig. 68) [1]).

Sur un support mobile, portant ce dispositif, sont fixés les paliers dans lesquels tourne l'axe ξ (x') de l'anneau A de la suspension à la cardan de la plate-forme P. La plate-forme P peut tourner par rapport à l'anneau de cardan A autour de l'axe y' (y) situé dans le plan mitan de l'anneau A et faisant un angle droit avec l'axe ξ (x'). Sur la plate-forme P sont montés deux gyroscopes I et II dont les boîtiers peuvent tourner par rapport à la plate-forme respectivement autour des axes z_1 et z_2 perpendiculaires au plan de la plate-forme.

Le corps C à stabiliser, lui, peut tourner avec le gyroscope III par rapport à la plate-forme P autour d'un axe z (z'') qui est perpendiculaire au plan de cette plate-forme. L'axe y_3 du boîtier du gyroscope III est parallèle au plan de la plate-forme P.

[1]) Un stabilisateur gyroscopique réalisant le schéma exposé ci-dessous, a été mis au point en 1957 à Kiev (à l'Académie des sciences de l'Ukraine), pour la stabilisation des appareils de mesure à bord des hélicoptères. Un stabilisateur conçu suivant un autre schéma a été décrit au chap. IV, § 4 du tome I.

Introduisons des systèmes de coordonnées directs $\xi\eta\zeta$, $x'y'z'$, xyz et $x''y''z''$ liés respectivement au support mobile, à l'anneau A, à la plate-forme P et au corps C à stabiliser. Le système xyz sera pris par la suite pour système de calcul. Les axes x' et y' du système $x'y'z'$ se situent dans le plan de l'anneau A ; l'axe x' se confond avec l'axe ξ et constitue l'axe de rotation de l'anneau A par rapport au support (fig. 69). L'angle de rotation de l'anneau par rapport

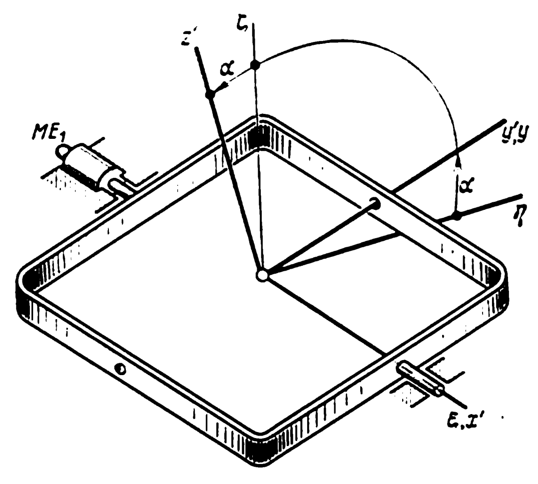


Fig. 69

au support sera désigné par α. Lorsque $\alpha = 0$, les axes des systèmes de coordonnées $x'y'z'$ et $\xi\eta\zeta$ se confondent. Pour $\alpha > 0$ l'anneau est tourné par rapport au support en sens inverse des aiguilles d'une montre si la rotation est observée du côté de la partie positive de l'axe ξ (x').

Le système de coordonnées xyz est attaché à la plate-forme P (fig. 70). L'axe y de ce système se confond avec l'axe y'. C'est autour de cet axe que la plate-forme P tourne par rapport à l'anneau A. L'angle de cette rotation sera désigné par β. L'axe x du système xyz se trouve dans le plan de la plate-forme et l'axe z lui est perpendiculaire. Si $\beta = 0$. les plans de la plate-forme P et de l'anneau A sont confondus, de même que les axes correspondants des systèmes de coordonnées xyz et $x'y'z'$. Lorsque $\beta > 0$, la plate-forme P est tournée en sens inverse des aiguilles d'une montre par rapport à l'anneau A, la rotation étant observée du côté de la partie positive de l'axe y (y').

Enfin, associons au corps C le système de coordonnées $x''y''z''$ dont l'axe z'' est confondu avec l'axe z du système xyz lié à la plate-forme P. L'angle de rotation de ces systèmes l'un par rapport à l'autre sera désigné par γ (fig. 71). Si $\gamma = 0$, les axes x et x'', ainsi que les axes

y et y'', se confondent. Lorsque $\gamma > 0$, le corps C est tourné par rapport à sa position de départ en sens inverse des aiguilles d'une montre si la rotation est observée du côté de la partie positive de l'axe z (z'').

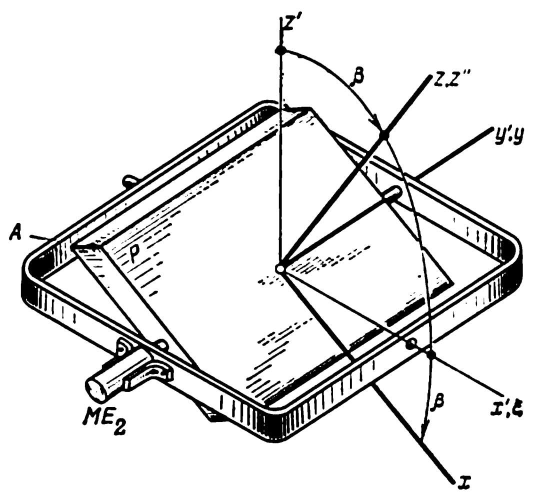


Fig. 70

Les angles de rotation des boîtiers des gyroscopes I et II par rapport à la plate-forme P seront désignés par δ_1 et δ_2 (fig. 72).

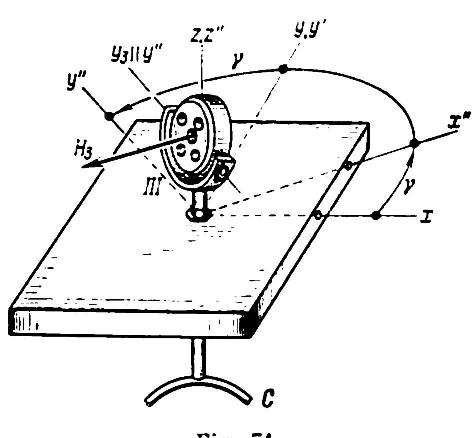


Fig. 71

Pour $\delta_1 = 0$, l'axe de rotation propre du gyroscope I est parallèle à l'axe y. De même, pour $\delta_2 = 0$, l'axe de rotation propre du gyroscope II est parallèle à l'axe x. Pour sens de rotation correspondant aux valeurs positives des angles δ_1 et δ_2 nous adopterons le même que celui pris pour l'angle γ.

Enfin, désignons par ε l'angle formé par l'axe de rotation propre du gyroscope III avec le plan de la plate-forme (fig. 73). L'angle ε sera considéré comme positif si pour $0 < \varepsilon < \pi/2$ la projection du moment cinétique propre du gyroscope III sur l'axe z (z'') est positive.

Pour assurer une stabilisation continue du corps C, le dispositif examiné doit comporter, en plus des gyroscopes, encore des éléments

auxiliaires permettant d'appliquer à l'anneau A, à la plate-forme P et au corps C des moments dont la grandeur et le sens sont déterminés par les angles δ_1, δ_2 et ε. Ces éléments peuvent, en particulier, être représentés par les moteurs électriques ME_1, ME_2 et ME_3 (fig. 69, 70, 73). Le boîtier du moteur ME_1 est fixé sur le support mobile; ce moteur développe un moment $M'_{x'}$ de rotation autour de l'axe ξ (x'), appliqué à l'anneau de cardan A. Le moteur est

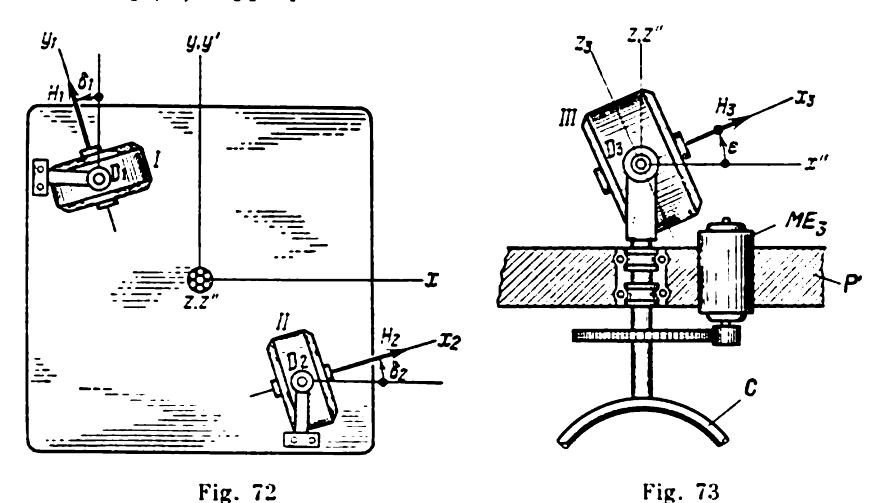


Fig. 72 Fig. 73

commandé par un amplificateur dont la tension d'entrée est fournie par le détecteur D_1 (fig. 72) monté sur l'axe du boîtier du gyroscope I. Le moment développé par le moteur ME_1 fait précessionner le gyroscope I dans le sens de diminution de l'angle δ_1. Si ce moment est suffisamment élevé, on évite ainsi le danger que l'angle δ_1 atteigne la valeur de $\pi/2$ pour laquelle la stabilisation se trouve troublée. Celle-ci peut être dérangée, en particulier, par la rotation du dispositif avec le support mobile autour de l'axe z, ou par une autre cause (action de la pesanteur, frottement, charges d'inertie et de vent, etc.).

Le moteur électrique ME_2 destiné à appliquer à la plate-forme P un moment M_y par rapport à l'axe y (y') est monté sur l'anneau de cardan A. Il est commandé à l'aide du détecteur D_2 qui enregistre l'angle de rotation δ_2 du boîtier du gyroscope II (fig. 72).

Enfin, le moteur électrique ME_3 installé sur la plate-forme P tend à faire tourner le corps C autour de l'axe z (z'') en développant à cet effet un moment dont la grandeur et le sens sont déterminés par l'angle ε (fig. 73) introduit plus haut.

Comme il sera montré plus loin, le corps C ne pourra changer d'orientation que par suite de l'action des forces appliquées aux

boîtiers des gyroscopes I, II et III et engendrant des moments par rapport à leurs axes. De telles forces peuvent être représentées, en particulier, par les forces de frottement dans les paliers de la suspension des boîtiers, dont l'action provoque un changement de l'orientation donnée du corps C. Pour rétablir l'orientation assignée, on produit artificiellement, au moyen d'électro-aimants et dans certains cas à l'aide de la force de pesanteur, des moments [1]) par rapport aux axes des boîtiers des gyroscopes I, II et III, qui provoquent une précession des gyroscopes et par suite un mouvement angulaire du corps C dans le sens voulu.

Pour établir les équations qui décrivent le comportement de ce dispositif gyroscopique complexe, nous allons considérer successivement six ensembles mécaniques:

1) l'ensemble du dispositif tout entier, c'est-à-dire comprenant l'anneau A, la plate-forme P, le corps C, les trois boîtiers et trois rotors des gyroscopes I, II et III avec des éléments auxiliaires qui leur sont cinématiquement liés;
2) le même dispositif mais sans l'anneau A;
3) le corps C avec le boîtier et le rotor du gyroscope III;
4) le boîtier et le rotor du gyroscope I;
5) le boîtier et le rotor du gyroscope II;
6) le boîtier et le rotor du gyroscope III.

Chacun des ensembles mécaniques des corps énumérés ci-dessus est lié à d'autres ensembles, ou au support, par une articulation plate. L'angle de rotation du tourillon de chacune de ces articulations par rapport à son palier constitue une des coordonnées généralisées du dispositif. C'est ce qui détermine en fait la composition des ensembles mécaniques mentionnés. Le moment, par rapport à l'axe de l'articulation, des forces extérieures exercées sur un ensemble mécanique correspondant sera considéré comme donné.

---

[1]) Les moments créés par de petits poids supplémentaires peuvent, par exemple, amener la plate-forme dans le plan de l'horizon et faire précessionner le gyroscope III de telle sorte que le corps C ne tourne pas par rapport à la Terre. A cet effet, il convient de placer sur le boîtier du gyroscope III un poids convenablement choisi qui produit un moment par rapport à l'axe de son boîtier (v. § 3 du présent chapitre). Pour ramener la plate-forme dans la position horizontale, il suffit de fixer des poids supplémentaires sur l'un des côtés des boîtiers des gyroscopes I et II. Lorsque la plate-forme s'incline, les poids supplémentaires produisent des moments par rapport aux axes des boîtiers, en provoquant ainsi la précession des gyroscopes I et II. Si le côté pour l'installation des poids sur les boîtiers des gyroscopes est choisi correctement et les moteurs de stabilisation ME_1 et ME_2 fonctionnent normalement, la plate-forme reprend la position horizontale. Le système de correction que nous venons de décrire est dit *mécanique*. Il est plus simple que le système de correction électrique dans lequel les moments à appliquer aux axes des boîtiers des gyroscopes I et II sont obtenus au moyen d'électro-aimants. La grandeur et le sens de ces moments sont déterminés, en correction électrique, par l'écart de pendules spéciaux montés sur la plate-forme P.

Comme système de référence adoptons pour les trois premiers ensembles mécaniques le système de coordonnées $\xi^*\eta^*\zeta^*$ ayant son origine au centre géométrique de la suspension de tout le dispositif gyroscopique, c'est-à-dire à l'origine commune des systèmes $\xi\eta\zeta$, $x'y'z'$, xyz et $x''y''z''$ liés respectivement au support mobile, à l'anneau A, à la plate-forme P et au corps C. Pour chacun des trois derniers ensembles mécaniques, le système de référence sera pris avec une origine située au point d'intersection des axes du boîtier et du rotor du gyroscope correspondant.

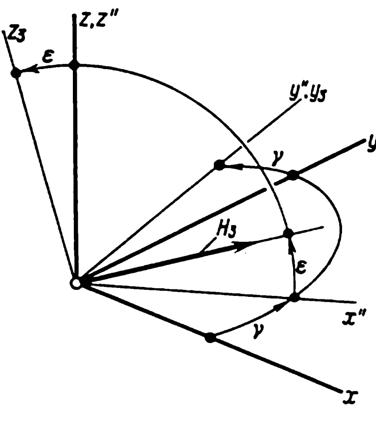


Fig. 74

Comme il a été dit au début du présent paragraphe, le système de calcul sera dans tous les six cas le système de coordonnées xyz lié à la plate-forme P. La vitesse angulaire absolue de ce système ou, ce qui revient au même, de la plate-forme P, par rapport au système de référence $\xi^*\eta^*\zeta^*$ sera désignée comme précédemment par $\bar{\omega}$ et ses projections sur les axes x, y et z par ω_x, ω_y et ω_z. Les valeurs des projections ω_x et ω_y sont déterminées par la précession des gyroscopes I et II et doivent donc être petites; quant à la composante de la vitesse angulaire de la plate-forme P le long de l'axe z (z''), c'est-à-dire ω_z, sa valeur est déterminée par le mouvement du support sur lequel est monté le stabilisateur étudié. Cela signifie que dans le cas général la projection ω_z peut prendre une valeur arbitraire.

Désignons par $\overline{M'}$ le moment résultant du système des forces extérieures exercées sur le premier des ensembles mécaniques énumérés ci-dessus. Le moment cinétique de cet ensemble sera désigné par $\overline{G'}$. Comme cela a été dit plus haut, d'après la théorie de précession des gyroscopes ce moment cinétique doit être égal à la somme géométrique des seuls moments cinétiques propres des gyroscopes I, II et III.

Les projections du moment cinétique $\overline{G'}$ sur les axes du système de calcul xyz sont données par les expressions

$$\begin{aligned} G'_x &= H(-\sin\delta_1 + \cos\delta_2 + \cos\gamma\cos\varepsilon), \\ G'_y &= H(\cos\delta_1 + \sin\delta_2 + \sin\gamma\cos\varepsilon), \\ G'_z &= H\sin\varepsilon, \end{aligned} \tag{2.5.6}$$

comme on peut s'en assurer facilement en examinant les fig. 72 et 74. Les modules des moments cinétiques propres des gyroscopes I, II et III sont ici pris égaux à une même constante H, ce qui signifie que les gyroscopes sont supposés identiques.

Etant appliquées au premier ensemble mécanique, les relations (2.5.3) prennent la forme

$$\begin{aligned}
&\frac{dG'_x}{dt} + \omega_y G'_z - \omega_z G'_y = M'_x,\\
&\frac{dG'_y}{dt} + \omega_z G'_x - \omega_x G'_z = M'_y, \qquad (2.5.7)\\
&\frac{dG'_z}{dt} + \omega_x G'_y - \omega_y G'_x = M'_z.
\end{aligned}$$

Par analogie avec la formule (2.5.5), on peut écrire dans ce cas (fig. 70)

$$M'_x \cos\beta + M'_z \sin\beta = M'_{x'}, \qquad (2.5.8)$$

où $M'_{x'}$ est la somme des moments, par rapport à l'axe x' (ξ) de l'anneau de cardan A, des forces agissant sur le premier ensemble mécanique, c'est-à-dire sur tout le stabilisateur. Ainsi, l'égalité

$$\left(\frac{dG'_x}{dt} + \omega_y G'_z - \omega_z G'_y\right)\cos\beta + \\ + \left(\frac{dG'_z}{dt} + \omega_x G'_y - \omega_y G'_x\right)\sin\beta = M'_{x'}, \qquad (2.5.9)$$

que l'on obtient en remplaçant les moments M'_x et M'_y dans la formule (2.5.8) par leurs expressions (2.5.7), représente l'équation du mouvement du stabilisateur gyroscopique. Cette équation ne contient pas de moments des forces de réaction normales inconnues des paliers dans lesquels tourne l'axe de l'anneau A [1]).

En utilisant dans l'égalité (2.5.9) les formules (2.5.6), on obtient l'équation suivante:

$$\begin{aligned}
&\cos\beta \frac{d}{dt}(-\sin\delta_1 + \cos\delta_2) - \cos\beta\sin\gamma\cos\varepsilon\left(\omega_z + \frac{d\gamma}{dt}\right) + \\
&\quad + \omega_y[\cos\beta\sin\varepsilon - \sin\beta(-\sin\delta_1 + \cos\delta_2 + \cos\gamma\cos\varepsilon)] + \\
&\quad + (\omega_x\sin\beta - \omega_z\cos\beta)(\cos\delta_1 + \sin\delta_2) + \omega_x\sin\beta\sin\gamma\cos\varepsilon - \\
&\quad - (\cos\beta\cos\gamma\sin\varepsilon - \sin\beta\cos\varepsilon)\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{H}M'_{x'}. \qquad (2.5.10)
\end{aligned}$$

Notons que le moment $M'_{x'}$ est composé, en plus des couples de frottement et du moment développé par le moteur électrique ME_1, encore des moments des forces d'attraction gravitationnelle de la

[1]) On suppose ici comme précédemment que les couples de frottement dans tous les axes de la suspension du stabilisateur gyroscopique ne dépendent pas de la valeur des réactions normales dans les paliers de ces axes.

Terre appliquées à toutes les parties mobiles du dispositif et des moments des forces d'inertie d'entraînement dues au mouvement de translation du système de référence $\xi^*\eta^*\zeta^*$ ayant son origine au centre géométrique de la suspension.

L'équation (2.5.10) est une des six équations différentielles qui décrivent le mouvement du stabilisateur gyroscopique. Pour obtenir une équation suivante, considérons l'ensemble mécanique comprenant, de même que l'ensemble précédent, tous les éléments du stabilisateur excepté l'anneau A. Le moment cinétique de l'anneau A n'étant pas pris en compte dans la théorie de précession des gyroscopes, il convient de poser que le moment cinétique total $\overline{G}$ de ce nouvel ensemble mécanique est le même que le moment cinétique $\overline{G}'$ de l'ensemble précédent, c'est-à-dire de poser

$$G_x = G'_x, \quad G_y = G'_y, \quad G_z = G'_z. \tag{2.5.11}$$

Ici, G_x, G_y et G_z sont les projections du moment cinétique du nouvel ensemble mécanique sur les axes x, y et z, et les quantités G'_x, G'_y et G'_z sont définies par les formules (2.5.6).

Les réactions de liaison intervenant entre la plate-forme P et l'anneau A représentent dans ce cas des forces extérieures et doivent donc être prises en compte dans les relations qui découlent du théorème du moment cinétique. Ces relations ont la même forme que celle des égalités (2.5.3). Les composantes normales des réactions ne sont absentes que dans la deuxième des équations (2.5.3) car l'axe y (y') est à la fois l'axe de la plate-forme P; les paliers de cet axe sont rigidement reliés à l'anneau A. En utilisant les égalités (2.5.11) et les formules (2.5.6), on obtient finalement l'équation

$$\frac{d}{dt}(\cos\delta_1+\sin\delta_2)-\sin\gamma\sin\varepsilon\frac{d\varepsilon}{dt}+\left(\omega_z+\frac{d\gamma}{dt}\right)\cos\gamma\cos\varepsilon+ \\ +\omega_z(-\sin\delta_1+\cos\delta_2)-\omega_x\sin\varepsilon=\frac{1}{H}M_y. \tag{2.5.12}$$

Dans le second membre de cette équation, c'est-à-dire dans l'expression de M_y, doivent figurer: le couple de frottement dans l'axe de suspension de la plate-forme, le couple du moteur ME_2, rapporté à l'axe y, ainsi que les moments des forces de gravitation et des forces d'inertie d'entraînement, appliquées aux éléments du stabilisateur, excepté l'anneau A de sa suspension.

Considérons maintenant le troisième ensemble mécanique, c'est-à-dire le corps C avec le boîtier et le rotor du gyroscope III (fig. 71). Son moment cinétique $\overline{G}''$ est constitué par le seul moment cinétique propre $\overline{H}_3$ du gyroscope III ($H_3 = H$). Par suite, les projections du vecteur $\overline{G}''$ sur les axes du système de calcul xyz (v. fig. 74) sont données par les formules

$$G''_x = H\cos\gamma\cos\varepsilon, \quad G''_y = H\sin\gamma\cos\varepsilon, \quad G''_z = H\sin\varepsilon. \tag{2.5.13}$$

Des trois équations du type (2.5.3) il convient dans ce cas d'utiliser la dernière, étant donné que les autres feront intervenir des réactions normales inconnues des paliers de l'axe du corps à stabiliser, lesquelles sont des forces extérieures par rapport à l'ensemble mécanique considéré. Ainsi, compte tenu des formules (2.5.13), nous obtenons l'équation

$$H\left(\cos\varepsilon\frac{d\varepsilon}{dt}+\omega_x\sin\gamma\cos\varepsilon-\omega_y\cos\gamma\cos\varepsilon\right)=M_z''. \qquad (2.5.14)$$

Ici, M_z'' est la somme des moments par rapport à l'axe $z\,(z'')$ de toutes les forces extérieures agissant sur le troisième ensemble mécanique, c'est-à-dire sur le corps C, le boîtier et le rotor du gyroscope III. Notons que M_z'' comprend le couple de frottement, le moment imposé par le moteur ME_3, ainsi que les moments des forces d'inertie d'Euler et des forces de gravitation. Les forces d'inertie d'Euler se réduisent comme précédemment aux seules forces d'inertie d'entraînement dues au mouvement de translation du système de référence $\xi^*\eta^*\zeta^*$ ayant son origine au centre géométrique de la suspension du stabilisateur.

Pour l'examen des trois ensembles mécaniques suivants, à savoir des ensembles comprenant les boîtiers et les rotors des gyroscopes I, II et III, introduisons des systèmes de référence respectifs $\xi_1^*\eta_1^*\zeta_1^*$, $\xi_2^*\eta_2^*\zeta_2^*$ et $\xi_3^*\eta_3^*\zeta_3^*$. Comme il a été dit plus haut, l'origine de chacun d'eux doit être choisie de manière qu'elle coïncide avec le point d'intersection des axes du boîtier et du rotor du gyroscope correspondant. Ces systèmes de coordonnées sont animés d'un mouvement de translation. Leurs accélérations par rapport au système de coordonnées « absolu » sont différentes. Cette différence tient à la vitesse angulaire $\bar{\omega}$ de la plate-forme P et dans le cas du système de référence $\xi_3^*\eta_3^*\zeta_3^*$ parfois encore à la vitesse angulaire (relative) $d\gamma/dt$ du corps C par rapport à la plate-forme P. Comme les dimensions d'un stabilisateur gyroscopique sont petites et les valeurs des ω_x, ω_y, ω_z, $d\gamma/dt$ et de leurs dérivées par rapport au temps sont généralement bornées, la différence mentionnée entre les accélérations des origines de ces systèmes et l'accélération du système de référence $\xi^*\eta^*\zeta^*$ n'est pas grande et, en règle générale, peut être négligée.

En appliquant le théorème du moment cinétique à l'ensemble mécanique constitué par le boîtier et le rotor du gyroscope I, on obtient, conformément à la troisième relation (2.5.3), l'égalité

$$\frac{d}{dt}G_z^{\mathrm{I}}+\omega_x G_y^{\mathrm{I}}-\omega_y G_x^{\mathrm{I}}=M_{z_1}^{\mathrm{I}}, \qquad (2.5.15)$$

qui ne contient pas de réactions normales inconnues de l'axe du boîtier. Ici (fig. 72)

$$G_x^{\mathrm{I}}=-H\sin\delta_1,\quad G_y^{\mathrm{I}}=H\cos\delta_1,\quad G_z^{\mathrm{I}}=0 \qquad (2.5.16)$$

sont les projections sur les axes du système de calcul xyz du moment cinétique $\overline{G}^{\rm I}$ de cet ensemble mécanique ou, ce qui revient au même, du moment cinétique propre $\overline{H}_1$ du gyroscope I ($H_1 = H$).

La quantité $M_{z_1}^{\rm I}$ est la somme des moments, par rapport à l'axe z_1 du boîtier du gyroscope I, des forces agissant sur le boîtier et le rotor de ce gyroscope. Ces forces sont représentées, en particulier, par les forces de frottement dans les axes de la suspension du boîtier, les forces de gravitation, les forces d'inertie d'entraînement, les forces élastiques des conducteurs de courant et les réactions des rotors des détecteurs.

En faisant usage des formules (2.5.16), on peut mettre l'égalité (2.5.15) sous la forme suivante:

$$H(\omega_x \cos\delta_1 + \omega_y \sin\delta_1) = M_{z_1}^{\rm I}. \qquad (2.5.17)$$

C'est une quatrième équation du mouvement du stabilisateur gyroscopique.

En procédant de la même façon, on obtient une cinquième équation. Elle concerne le gyroscope II. On a

$$H(\omega_x \sin\delta_2 - \omega_y \cos\delta_2) = M_{z_2}^{\rm II}. \qquad (2.5.18)$$

Le moment $M_{z_2}^{\rm II}$ est analogue au moment $M_{z_1}^{\rm I}$ et vaut la somme des moments des forces exercées sur le boîtier et le rotor du gyroscope II par rapport à l'axe z_2 de son boîtier. Une chose importante est que les équations (2.5.17) et (2.5.18) ne contiennent pas de réactions normales inconnues des paliers dans lesquels tournent les axes des boîtiers des gyroscopes I et II.

Enfin, considérons le sixième ensemble mécanique constitué par le boîtier et le rotor du gyroscope III (fig. 73). Les projections[1]) du moment cinétique propre du gyroscope III sur les axes x, y, z sont

$$G_x^{\rm III} = H\cos\gamma\cos\varepsilon, \quad G_y^{\rm III} = H\sin\gamma\cos\varepsilon, \quad G_z^{\rm III} = H\sin\varepsilon. \qquad (2.5.19)$$

Substituons-les respectivement à G_x, G_y, G_z dans les relations (2.5.3), lesquelles prennent alors la forme suivante:

$$\begin{aligned} &H\left[\frac{d}{dt}(\cos\gamma\cos\varepsilon) + \omega_y \sin\varepsilon - \omega_z \sin\gamma\cos\varepsilon\right] = M_x^{\rm III}, \\ &H\left[\frac{d}{dt}(\sin\gamma\cos\varepsilon) + \omega_z \cos\gamma\cos\varepsilon - \omega_x \sin\varepsilon\right] = M_y^{\rm III}, \qquad (2.5.20) \\ &H\left[\frac{d}{dt}\sin\varepsilon + (\omega_x \sin\gamma - \omega_y \cos\gamma)\cos\varepsilon\right] = M_z^{\rm III}. \end{aligned}$$

[1]) Les formules (2.5.19) coïncident, à des désignations de leurs premiers membres près, avec les formules (2.5.13) dans lesquelles les projections du moment cinétique propre du gyroscope III représentent, en vertu des hypothèses simplificatrices adoptées dans la théorie de précession des gyroscopes, les projections, sur les mêmes axes, du moment cinétique de l'ensemble mécanique « corps C — boîtier — rotor du gyroscope III ».

Ici, M_x^{III}, M_y^{III}, M_z^{III} sont les sommes des moments des forces appliquées au boîtier et au rotor du gyroscope III, par rapport aux axes respectivement parallèles à x, y et z et passant par le centre géométrique de la suspension du gyroscope III. Ces forces comprennent également des réactions normales inconnues des paliers de l'axe du boîtier du gyroscope III logés dans le corps C. Ecrivons l'expression

$$-M_x^{III}\sin\gamma + M_y^{III}\cos\gamma = M_{y_3}^{III}. \tag{2.5.21}$$

Il n'est pas difficile de voir qu'elle représente la somme des moments des forces appliquées au gyroscope III, par rapport à l'axe y_3 de son boîtier et que les réactions normales mentionnées n'y figurent pas. En introduisant dans cette expression les valeurs des moments M_x^{III} et M_y^{III} données par les égalités (2.5.20), on obtient, après quelques transformations simples [1])

$$H\left[\left(\omega_z + \frac{d\gamma}{dt}\right)\cos\varepsilon - (\omega_x\cos\gamma + \omega_y\sin\gamma)\sin\varepsilon\right] = M_{y_3}^{III}. \tag{2.5.22}$$

L'équation (2.5.22) est la dernière du système de six équations différentielles qui décrivent le comportement du stabilisateur gyroscopique et de ses parties constitutives tant l'un par rapport à l'autre, que par rapport aux directions liées aux étoiles fixes (plus exactement, par rapport au système de référence non tournant $\xi^*\eta^*\zeta^*$).

Pour la commodité des conclusions qui seront tirées par la suite, réunissons les équations (2.5.10), (2.5.12), (2.5.14), (2.5.17), (2.5.18) et (2.5.22). On obtient (après quelques transformations simples) le système d'équations décrivant le mouvement du stabilisateur gyroscopique à trois axes:

$$\cos\beta\left[\frac{d}{dt}(-\sin\delta_1 + \cos\delta_2) - \sin\gamma\cos\varepsilon\left(\omega_z + \frac{d\gamma}{dt}\right) + \omega_y\sin\varepsilon\right] -$$
$$-(\cos\beta\cos\gamma\sin\varepsilon - \sin\beta\cos\varepsilon)\frac{d\varepsilon}{dt} +$$
$$+\sin\beta\,[\omega_x\sin\gamma\cos\varepsilon - \omega_y(-\sin\delta_1 + \cos\delta_2 + \cos\gamma\cos\varepsilon)] +$$
$$+(\omega_x\sin\beta - \omega_z\cos\beta)(\cos\delta_1 + \sin\delta_2) = \frac{1}{H}M'_{x'},$$

$$\frac{d}{dt}(\cos\delta_1 + \sin\delta_2) - \sin\gamma\sin\varepsilon\frac{d\varepsilon}{dt} + \cos\gamma\cos\varepsilon\left(\omega_z + \frac{d\gamma}{dt}\right) +$$
$$+\omega_z(-\sin\delta_1 + \cos\delta_2) - \omega_x\sin\varepsilon = \frac{1}{H}M_y, \tag{2.5.23}$$

$$H\left(\cos\varepsilon\frac{d\varepsilon}{dt} + \omega_x\sin\gamma\cos\varepsilon - \omega_y\cos\gamma\cos\varepsilon\right) = M''_z,$$

---

[1]) Remarquons que pour obtenir les équations (2.5.17), (2.5.18) et (2.5.22) on peut utiliser au lieu du système xyz d'autres systèmes de calcul et, notamment, pour obtenir l'équation (2.5.22) on peut se servir du système $x''y''z''$ lié au corps C (v. fig. 71).

$$H(\omega_x \cos\delta_1 + \omega_y \sin\delta_1) = M^{\rm I}_{z_1},$$
$$H(\omega_x \sin\delta_2 - \omega_y \cos\delta_2) = M^{\rm II}_{z_2},$$
$$H\left[\left(\omega_z + \frac{d\gamma}{dt}\right)\cos\varepsilon - (\omega_x \cos\gamma + \omega_y \sin\gamma)\sin\varepsilon\right] = M^{\rm III}_{y_3}.$$

Considérons quelques conséquences importantes qui résultent de ces équations. Soient

$$M^{\rm I}_{z_1} = 0, \qquad M^{\rm II}_{z_2} = 0, \qquad M^{\rm III}_{y_3} = 0, \tag{2.5.24}$$

c'est-à-dire que les axes des boîtiers des gyroscopes ne subissent pas de moments.

Dans ce cas, la quatrième et la cinquième équation (2.5.23) donnent les égalités

$$\begin{aligned} \omega_x \cos\delta_1 + \omega_y \sin\delta_1 &= 0, \\ \omega_x \sin\delta_2 - \omega_y \cos\delta_2 &= 0. \end{aligned} \tag{2.5.25}$$

Il en résulte que

$$\omega_x = \omega_y = 0 \tag{2.5.26}$$

dans tous les cas, sauf pour

$$\delta_2 = \delta_1 \pm \frac{\pi}{2}\,[1], \tag{2.5.27}$$

lorsque les axes de rotation propre des gyroscopes I et II sont parallèles et la stabilisation est perturbée. Pourtant, si, grâce à l'action des moteurs électriques ME_1 et ME_2, les angles δ_1 et δ_2 restent petits ou, en tout cas, inférieurs en module à 45°, la réalisation de la relation (2.5.27) devient impossible.

Ainsi, lorsque les deux premières conditions (2.5.24) sont satisfaites, le plan de la plate-forme P se trouve stabilisé, en vertu des égalités (2.5.26). C'est dire que la perpendiculaire (axe z) à ce plan ne change pas son orientation par rapport aux étoiles fixes. En même temps, la projection de la vitesse angulaire de la plate-forme sur l'axe z qui lui est lié, c'est-à-dire la quantité ω_z, peut être, dans le cas général, non nulle; elle dépend du mouvement du support sur lequel est monté le stabilisateur gyroscopique.

Reportons-nous maintenant à la sixième équation du système (2.5.23). Compte tenu de la troisième condition (2.5.24) et de l'égalité (2.5.26), on obtient

$$\omega_z + \frac{d\gamma}{dt} = 0, \tag{2.5.28}$$

---

[1]) Comparer avec la condition d'annulation simultanée des projections ω_x, ω_y, ω_z de la vitesse angulaire de la plate-forme d'un stabilisateur gyroscopique à trois axes qui a été examiné au chap. IV, § 4 (tome I).

si, certes, seulement

$$\varepsilon \neq \pm \frac{\pi}{2}. \tag{2.5.29}$$

Le premier membre de l'égalité (2.5.28) représente la projection sur l'axe z (z'') de la vitesse angulaire du corps C par rapport au système de référence $\xi^*\eta^*\zeta^*$. Les projections de cette vitesse angulaire sur les axes x et y sont les mêmes que les projections correspondantes de la vitesse angulaire $\bar{\omega}$ de la plate-forme P et, en vertu de l'égalité (2.5.26), elles sont égales à zéro. Ainsi, lorsque les moments par rapport aux axes des boîtiers des trois gyroscopes sont nuls, c'est-à-dire lorsque les conditions (2.5.24) sont réalisées, le corps C est stabilisé par rapport aux étoiles fixes.

Compte tenu des égalités (2.5.26) et (2.5.28), les trois premières équations du système (2.5.23) deviennent maintenant

$$\begin{gathered}
-H\cos\beta\left[\frac{d}{dt}(\sin\delta_1-\cos\delta_2)+(\cos\gamma\sin\varepsilon-\operatorname{tg}\beta\cos\varepsilon)\frac{d\varepsilon}{dt}+\right.\\
\left.+\omega_z(\cos\delta_1+\sin\delta_2)\right]=M'_{x'},\\
H\left[\frac{d}{dt}(\cos\delta_1+\sin\delta_2)-\sin\gamma\sin\varepsilon\frac{d\varepsilon}{dt}+\omega_z(-\sin\delta_1+\cos\delta_2)\right]=M_y,\\
H\cos\varepsilon\frac{d\varepsilon}{dt}=M''_z.
\end{gathered} \tag{2.5.30}$$

Supposons maintenant que les moments des forces appliquées à l'anneau A, à la plate-forme P et au corps C sont tous nuls et que dans les axes de ces derniers il n'y a pas de frottement, c'est-à-dire que

$$M'_{x'}=M_y=M''_z=0. \tag{2.5.31}$$

Si les conditions (2.5.24) sont encore réalisées et que de plus la vitesse angulaire du support est telle que

$$\omega_z=0, \tag{2.5.32}$$

les équations (2.5.30) sont satisfaites, lorsque les valeurs des angles δ_1, δ_2 et ε sont constantes.

Supposons que les moteurs électriques ME_1, ME_2 et ME_3 sont commandés de façon telle que les moments qu'ils engendrent par rapport aux axes de l'anneau A, de la plate-forme P et du corps C soient proportionnels aux angles de rotation des boîtiers des gyroscopes correspondants. Supposons également que les couples de frottement sont nuls, ainsi que tout autre moment par rapport aux axes de la suspension. Admettons que

$$M'_{x'}=k\delta_1,\qquad M_y=-k\delta_2,\qquad M''_z=-k\varepsilon, \tag{2.5.33}$$

où k est un facteur de proportionnalité (pente de caractéristique du couple de stabilisation).

Dans ce cas, l'équation (2.5.30) admet pour solution

$$\delta_1 = 0, \quad \delta_2 = 0, \quad \varepsilon = 0. \tag{2.5.34}$$

On peut s'assurer que la position d'équilibre du stabilisateur gyroscopique considéré, définie par la solution (2.5.34) est stable (dans le cadre de la théorie de précession des gyroscopes). En effet, les angles δ_1, δ_2 et ε étant petits, les équations (2.5.30) se mettent, si on ne garde que des termes du premier ordre par rapport à ces angles et à leurs dérivées par rapport au temps et qu'on tient compte des égalités (2.5.32) et (2.5.33), sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} -H\cos\beta\frac{d\delta_1}{dt} &= k\delta_1 - H\sin\beta\frac{d\varepsilon}{dt}, \\ H\frac{d\delta_2}{dt} &= -k\delta_2, \\ H\frac{d\varepsilon}{dt} &= -k\varepsilon. \end{aligned} \tag{2.5.35}$$

Il n'est pas difficile de voir qu'en vertu de ces équations les valeurs des angles δ_1, δ_2 et ε tendent vers zéro, quelle que soit la loi de variation de l'angle β des plans de l'anneau A et de la plate-forme P. La valeur de l'angle β est déterminée par le mouvement du support; il faut certes supposer que $\beta < 90°$ [1]).

Dans le cas plus général, les seconds membres des équations (2.5.30), c'est-à-dire les moments $M_{x'}^{*}$, M_y et M_z^{*}, comprendront en plus des couples moteurs encore des couples de frottement dans les axes de la suspension: x' (ξ), y (y') et z (z'') respectivement de l'anneau A, de la plate-forme P et du corps C. Le sens de ces derniers couples est déterminé par les vitesses angulaires relatives $d\alpha/dt$, $d\beta/dt$ et $d\gamma/dt$. En outre, si l'ensemble mécanique ou ses éléments quelconques ne sont pas suffisamment équilibrés, les moments $M_{x'}^{*}$, M_y et M_z^{*} doivent encore inclure les moments des forces d'inertie d'entraînement et des forces de gravitation.

---

[1]) Dans certains cas, les moteurs électriques étant en marche, les phénomènes transitoires intervenant dans le stabilisateur gyroscopique ne s'amortissent pas mais conduisent à des auto-oscillations du corps à stabiliser (avant tout, en règle générale, autour de l'axe x' (ξ) de la suspension de l'anneau A). Pour l'étude de ces oscillations et celle des moyens permettant de les supprimer, on doit tenir compte des moments d'inertie des parties constitutives du dispositif gyroscopique et des phénomènes transitoires se déroulant dans les circuits électriques des moteurs et dans les circuits de réaction des amplificateurs. D'un autre côté, la fréquence des auto-oscillations étant assez élevée, l'influence que le mouvement du support lui-même exerce sur ces oscillations est, en règle générale, peu importante (v. chap. III, § 5, où sont étudiées les questions concernant la stabilité d'un stabilisateur gyroscopique à un axe).

Soit $\omega_z \neq 0$. Alors, les angles δ_1, δ_2 et ε étant supposés petits, les équations (2.5.30) peuvent s'écrire sous la forme

$$
\begin{aligned}
-H\cos\beta\left[\frac{d\delta_1}{dt}-\operatorname{tg}\beta\frac{d\varepsilon}{dt}+\omega_z(1+\delta_2)\right] &= M_{x'}^{\prime *}+M_{x'}^{\prime}(\delta_1),\\
H\left[\frac{d\delta_2}{dt}+\omega_z(1-\delta_1)\right] &= M_y^{*}+M_y(\delta_2), \qquad (2.5.36)\\
H\frac{d\varepsilon}{dt} &= M_z^{\prime\prime *}+M_z^{\prime\prime}(\varepsilon).
\end{aligned}
$$

Ici, $M_{x'}^{\prime *}$, M_y^{*} et $M_z^{\prime\prime *}$ sont les sommes, mentionnées précédemment, des moments des forces de frottement, des forces d'inertie, des forces de

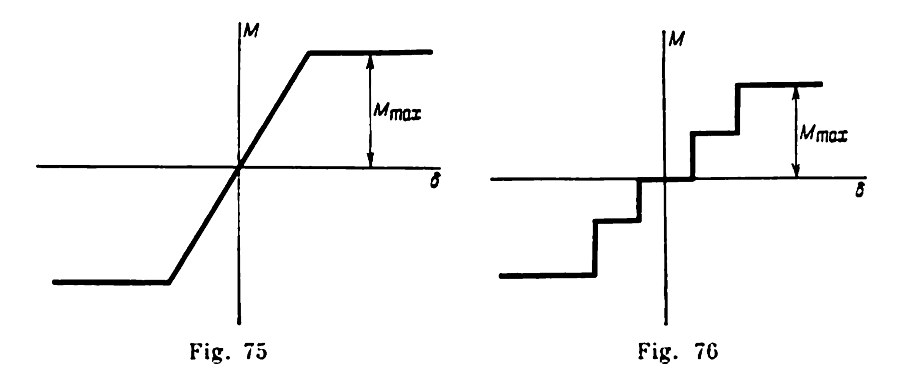


Fig. 75 Fig. 76

gravitation et des autres forces, appliquées respectivement aux ensembles mécaniques: 1) l'anneau A, la plate-forme P, le corps C, les boîtiers et les rotors des gyroscopes I, II, III ; 2) la plate-forme P, le corps C, les boîtiers et les rotors des gyroscopes I, II, III ; 3) le corps C, le boîtier et le rotor du gyroscope III. $M_{x'}^{\prime}(\delta_1)$, $M_y(\delta_2)$, $M_z^{\prime\prime}(\varepsilon)$ sont les couples moteurs imposés à ces ensembles mécaniques respectivement par ME_1, ME_2 et ME_3.

Le couple développé par chacun des moteurs électriques ne peut pas dépasser une certaine limite déterminée par les paramètres du moteur lui-même et de l'organe de transmission qui relie l'arbre du moteur à l'axe correspondant. La figure 75 montre un diagramme, de forme souvent rencontrée, qui traduit la variation du couple moteur M (régime de court-circuit, c'est-à-dire à rotor complètement calé) en fonction de l'angle δ d'écart du boîtier du gyroscope correspondant par rapport à la position moyenne. Un autre diagramme, de forme dite en escalier, est représenté à la figure 76.

Pour assurer un bon fonctionnement du stabilisateur, il est impératif que pour tout mouvement du véhicule le couple moteur maximal $M_{\max}$ soit supérieur au couple « déstabilisant » correspondant $M_{x'}^{\prime *}$, M_y^{*} ou $M_z^{\prime\prime *}$. En outre, le couple moteur maximal de ME_1 et de ME_2

doit dépasser par excès le produit $(\omega_z)_{max} H$, où $(\omega_z)_{max}$ est la valeur maximale attendue de la vitesse angulaire de rotation de la plate-forme P, autour de l'axe z, due à un mouvement en giration du véhicule. Dans le cas contraire, les boîtiers des gyroscopes I et II seront en retard sur la plate-forme en rotation, et les angles δ_1 et δ_2 commenceront à croître.

Pour s'en assurer il suffit de considérer le cas le plus simple où le mouvement du support est tel que l'angle β des plans de l'anneau A et de la plate-forme P est nul. Admettons également que l'angle ε est, lui aussi, nul grâce au couple de stabilisation $M_z^{*}(\varepsilon)$. Les deux premières équations (2.5.36) peuvent alors s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} -H\left(\frac{d\delta_1}{dt}+\omega_z\delta_2\right) &= M'_{x'}(\delta_1)+\omega_z H+M'^{*}_{x'}, \\ H\left(\frac{d\delta_2}{dt}-\omega_z\delta_1\right) &= M_y(\delta_2)-\omega_z H+M_y^{*}. \end{aligned} \tag{2.5.37}$$

L'analyse de ces équations montre que les termes $\omega_z H$ et $-\omega_z H$ figurant respectivement dans leurs seconds membres jouent le même rôle que les couples déstabilisants $M'^{*}_{x'}$ et M_y^{*}. Il en résulte que pour assurer un fonctionnement normal du stabilisateur il faut que les couples de stabilisation $M'_{x'}(\delta_1)$ et $M_y(\delta_2)$ choisis, par exemple, d'après le diagramme de la fig. 75 soient dominants, donc supérieurs à tous les autres termes intervenant dans les seconds membres des équations (2.5.37).

Plus haut, nous avons établi les conditions (2.5.24) dont la réalisation assure la stabilisation du corps par rapport aux étoiles fixes. Elles se ramenaient à ce que les sommes des moments des forces exercées sur chacun des trois ensembles mécaniques « boîtier — rotor » par rapport à l'axe du boîtier correspondant devaient être toutes nulles. Pour la réalisation de ces conditions en pratique, il faut chercher à réduire, autant que possible, les couples de frottement dans les paliers des axes des boîtiers. Il est également nécessaire que le centre de gravité de l'ensemble « boîtier — rotor » se situe aussi exactement que possible sur l'axe du boîtier et que les autres couples perturbateurs et, notamment, les couples dits de tension des conducteurs de courant électrique soient réduits.

Dans certains cas, on demande de stabiliser le corps C par rapport au système de coordonnées lié à la verticale du lieu et aux points cardinaux, que l'on appelle généralement système de coordonnées géographique ENZ; les axes de ce système sont dirigés reprectivement vers l'est, le nord et le zénith. Si le support est immobile, la vitesse angulaire du corps C doit être égale à la vitesse angulaire de la Terre. Si le support est en mouvement, la vitesse angulaire du corps C doit être égale à la somme de la vitesse angulaire de la Terre et de la vitesse angulaire du mouvement (relatif) du système de coordonnées géogra-

phique *ENZ* par rapport à la Terre. Dans de tels cas, on doit avoir, en vertu des trois dernières équations (2.5.23), les moments par rapport aux axes des boîtiers des gyroscopes I, II et III, soit $M^{I}_{z_1}$, $M^{II}_{z_2}$ et $M^{III}_{y_3}$, qui provoquent la précession voulue des gyroscopes et, comme conséquence, assurent la vitesse angulaire nécessaire du corps [1]).

Un autre exemple de dispositif gyroscopique complexe est fourni par une plate-forme dont la stabilisation est assurée par trois gyroscopes qu'elle porte. Une telle plate-forme est souvent utilisée dans les systèmes de navigation par inertie. Les équations du mouvement d'un tel dispositif peuvent être établies dans le cadre de la théorie de précession des gyroscopes, en procédant de la même manière que dans le présent paragraphe. Dans certaines hypothèses particulières, ceci a été fait au chap. IV, § 4 du tome I.

§ 6. Compas gyroscopique de Geckeler

Un exemple de système gyroscopique complexe est fourni par l'élément sensible, la gyrosphère, utilisé tant dans les compas gyroscopiques à deux rotors « Anschütz » (en Allemagne) ou « Kourse » (en U.R.S.S.) que dans le compas spatial de Geckeler que l'on appelle souvent « gyrohorizon-compas ». Le paragraphe actuel se propose d'exposer tout d'abord la théorie de la gyrosphère, commune aux deux compas, et d'établir ensuite des conditions dont la réalisation transforme le compas gyroscopique en un compas spatial. On indique ensuite les propriétés remarquables du gyrohorizon-compas et la possibilité de son utilisation comme élément d'un système de navigation par inertie (v. aussi chap. V, §§ 5 et 6 du présent tome). A la fin du paragraphe, on étudie les petites oscillations angulaires de la gyrosphère autour d'un mouvement stationnaire.

En examinant au chap. I, § 6 (tome I), les questions relatives à la lecture des indications d'un compas gyroscopique installé à bord d'un navire en roulis et en tangage, nous avons déjà décrit la construction de la gyrosphère flottant dans un liquide conducteur de l'électricité et le dispositif permettant d'amener le courant électrique triphasé nécessaire pour la mise en vitesse et le maintien de la rotation des rotors des gyroscopes (v. tome I, fig. 19). Un cadre (fig. 77) monté à l'intérieur de cette sphère sert d'anneau de cardan extérieur commun à deux gyroscopes identiques I et II dont les axes des boîtiers (ou, ce qui revient au même au point de vue cinématique, les axes des anneaux de cardan intérieurs) sont parallèles l'un à l'autre. Grâce à l'emploi de deux secteurs dentés rigidement reliés aux boîtiers des gyroscopes, ou d'un autre dispositif cinématique quelconque, les boîtiers peuvent tourner, à partir de la position dans laquelle les axes des rotors sont parallèles, d'un même angle

[1]) Voir note au bas de la page 128.

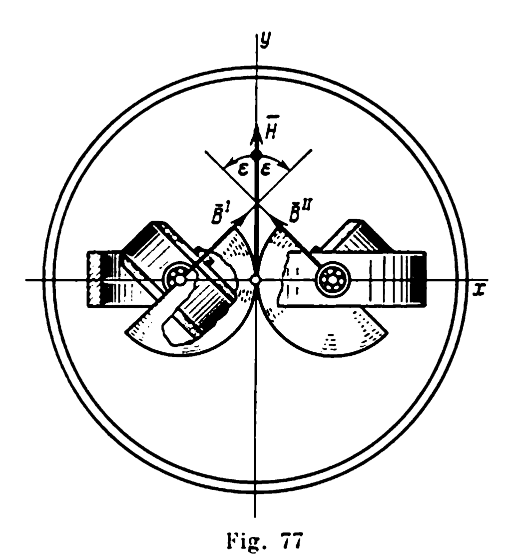


Fig. 77

mais dans des sens opposés. Dans le cas où les boîtiers sont reliés entre eux par une bielle de connexion (fig. 78), ceci n'est valable que lorsque les angles d'écart des gyroscopes par rapport à leur position nominale sont petits.

Associons à l'enveloppe de la gyrosphère et donc à l'anneau de cardan extérieur des deux gyroscopes un trièdre xyz, en plaçant son

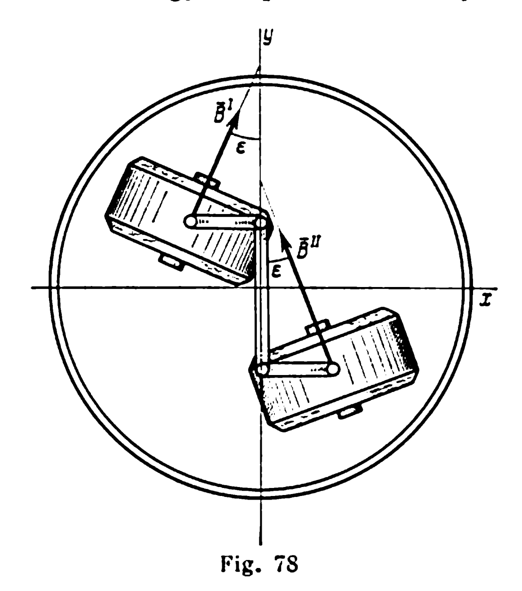


Fig. 78

sommet au centre géométrique de la gyrosphère. Dirigeons son arête z parallèlement aux axes des boîtiers, verticalement vers le haut, et son arête y le long de la somme géométrique des moments cinétiques propres des gyroscopes (fig. 77, 79). Le module H du vecteur moment cinétique propre total de la gyrosphère aura pour expression

$$H = 2B \cos \varepsilon, \qquad (2.6.1)$$

où B est la valeur, supposée constante, du moment cinétique propre de chacun des gyroscopes et ε la moitié de l'angle que font entre eux les axes de leurs rotors.

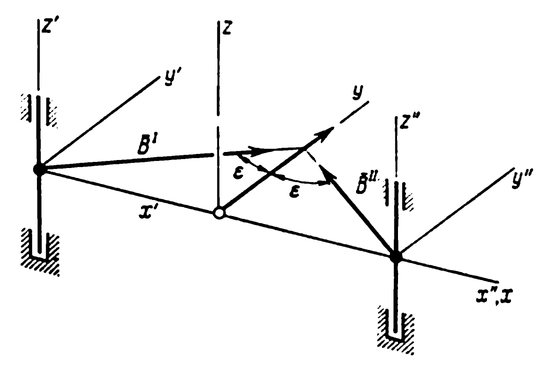


Fig. 79

Les projections du vecteur $\bar{H}$ sur les arêtes x, y, z ont respectivement pour valeurs

$$H_x = 0, \quad H_y = 2B \cos \varepsilon, \quad H_z = 0. \qquad (2.6.2)$$

Le mouvement de la gyrosphère sera considéré par rapport au système de référence $\xi^*\eta^*\zeta^*$ ayant son origine au centre géométrique de la gyrosphère et animé d'un mouvement de translation. En vertu du théorème du moment cinétique, on a

$$\frac{d\bar{G}}{dt} = \bar{M}, \qquad (2.6.3)$$

où $\bar{G}$ est le vecteur moment cinétique total de la gyrosphère par rapport à l'origine de $\xi^*\eta^*\zeta^*$, et $\bar{M}$ le moment résultant (aussi par rapport à l'origine du système $\xi^*\eta^*\zeta^*$) de toutes les forces extérieures s'exerçant sur la gyrosphère, y compris les forces d'inertie d'Euler dues au mouvement de translation du système $\xi^*\eta^*\zeta^*$.

Pour système de calcul prenons le système xyz dont les axes sont confondus avec les arêtes du trièdre de même nom, lié à l'enveloppe de la gyrosphère. Compte tenu des considérations développées au

cours du paragraphe précédent, nous obtenons trois relations

$$\begin{aligned} \frac{dG_x}{dt}+\omega_y G_z-\omega_z G_y&=M_x,\\ \frac{dG_y}{dt}+\omega_z G_x-\omega_x G_z&=M_y,\\ \frac{dG_z}{dt}+\omega_x G_y-\omega_y G_x&=M_z \end{aligned} \qquad (2.6.4)$$

dans lesquelles ω_x, ω_y et ω_z sont les projections de la vitesse angulaire de la gyrosphère sur les axes x, y et z qui lui sont liés et G_x, G_y et G_z les projections, sur les mêmes axes, de son moment cinétique total.

En nous plaçant toujours dans le cadre de la théorie de précession des gyroscopes, admettons que le moment cinétique total $\overline{G}$ de la gyrosphère coïncide pratiquement avec son moment cinétique propre total $\overline{H}$, si bien que dans les relations (2.6.4) les quantités G_x, G_y et G_z peuvent être remplacées respectivement par H_x, H_y et H_z. En tenant compte des formules (2.6.2), mettons ces relations sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} -\omega_z 2B\cos\varepsilon&=M_x,\\ \frac{d}{dt}(2B\cos\varepsilon)&=M_y,\\ \omega_x 2B\cos\varepsilon&=M_z. \end{aligned} \qquad (2.6.5)$$

Si les moments cinétiques propres des gyroscopes sont constants, le mouvement de la gyrosphère, considérée en tant qu'ensemble mécanique, est décrit par quatre paramètres [1]). Trois d'entre eux caractérisent la position du trièdre xyz, lié à la gyrosphère, par rapport au système de référence $\xi^*\eta^*\zeta^*$, et le quatrième est un angle appelé *angle de décalage des gyroscopes*, c'est-à-dire l'angle 2ε des axes de rotation propre de leurs rotors. Il est donc naturel que le système d'équations différentielles décrivant le mouvement de la gyrosphère contienne quatre équations d'après le nombre de degrés de liberté.

Dans la première et la troisième équation du système (2.6.5), les projections ω_z et ω_x de la vitesse angulaire de la gyrosphère peuvent être exprimées par les angles qui caractérisent l'orientation de la gyrosphère par rapport au système de référence $\xi^*\eta^*\zeta^*$ et, bien entendu, par leurs dérivées par rapport au temps. La deuxième équation du système (2.6.5) fait intervenir la dérivée de l'angle ε. Ainsi, le système (2.6.5) ne contient que trois des quatre équations nécessaires

[1]) Un ou deux degrés de liberté (suivant la construction du compas) sont encore introduits par un dispositif destiné à amortir les oscillations propres de la gyrosphère (système d'amortissement). Pourtant, un tel dispositif est automatiquement mis à l'arrêt dès que le navire commence une giration ou fait varier sa vitesse. Ici et plus loin le système d'amortissement est supposé absent (ou à l'arrêt).

pour la description du mouvement de la gyrosphère. La quatrième équation qui manque peut s'obtenir si l'on tient compte, d'une part, des forces d'interaction de deux gyroscopes utilisés dans l'élément sensible, et d'autre part, des forces d'interaction de ces gyroscopes avec leur anneau de cardan extérieur commun, c'est-à-dire avec le cadre qui est rigidement relié à l'enveloppe de la gyrosphère. A cet effet, introduisons tout d'abord deux nouveaux systèmes de coordonnées $x'y'z'$ et $x''y''z''$ (fig. 79) dont les axes z' et z'' sont dirigés suivant les axes respectifs des boîtiers des gyroscopes I et II et sont donc parallèles à l'arête z; les axes y' et y'' sont parallèles à l'arête y et, par conséquent, les axes x' et x'' sont parallèles à l'arête x du trièdre xyz lié à la gyrosphère.

Considérons un ensemble mécanique constitué uniquement par le boîtier et le rotor du gyroscope I. Appliquons à cet ensemble le théorème du moment cinétique, en prenant le système de coordonnées $x'y'z'$ pour celui de calcul. La vitesse angulaire de ce système est la même que celle du trièdre xyz. Aussi, le théorème du moment cinétique permet-il d'écrire trois relations suivantes:

$$\begin{aligned} \frac{dG_{x'}^{\mathrm{I}}}{dt} + \omega_y G_{z'}^{\mathrm{I}} - \omega_z G_{y'}^{\mathrm{I}} &= M_{x'}^{\mathrm{I}}, \\ \frac{dG_{y'}^{\mathrm{I}}}{dt} + \omega_z G_{x'}^{\mathrm{I}} - \omega_x G_{z'}^{\mathrm{I}} &= M_{y'}^{\mathrm{I}}, \\ \frac{dG_{z'}^{\mathrm{I}}}{dt} + \omega_x G_{y'}^{\mathrm{I}} - \omega_y G_{x'}^{\mathrm{I}} &= M_{z'}^{\mathrm{I}}, \end{aligned} \qquad (2.6.6)$$

qui sont analogues aux égalités (2.6.4). Dans ces relations, $G_{x'}^{\mathrm{I}}$, $G_{y'}^{\mathrm{I}}$ et $G_{z'}^{\mathrm{I}}$ sont les projections du moment cinétique total de l'ensemble mécanique «boîtier—rotor» du gyroscope I sur les axes x', y', z' et $M_{x'}^{\mathrm{I}}$, $M_{y'}^{\mathrm{I}}$, $M_{z'}^{\mathrm{I}}$ les sommes des moments, par rapport aux mêmes axes, de toutes les forces extérieures qui s'exercent sur cet ensemble mécanique.

Conformément à la théorie de précession des gyroscopes, dans les relations (2.6.6) on peut utiliser les égalités approchées

$$G_{x'}^{\mathrm{I}} = B_{x'}^{\mathrm{I}} = B \sin \varepsilon, \qquad G_{y'}^{\mathrm{I}} = B_{y'}^{\mathrm{I}} = B \cos \varepsilon, \qquad G_{z'}^{\mathrm{I}} = 0, \qquad (2.6.7)$$

où $B_{x'}^{\mathrm{I}}$ et $B_{y'}^{\mathrm{I}}$ sont les projections du vecteur moment cinétique propre du gyroscope I sur les axes x' et y' ($B^{\mathrm{I}} = B$ est le module de ce vecteur, le même pour les deux gyroscopes).

Pour obtenir la quatrième équation manquante, faisons usage de la dernière relation (2.6.6). Elle prend la forme

$$\omega_x B \cos \varepsilon - \omega_y B \sin \varepsilon = M_{z'}^{\mathrm{I}}. \qquad (2.6.8)$$

La projection $B_{x''}^{\mathrm{II}}$ du moment cinétique propre du gyroscope II sur l'axe x'' (v. fig. 79) ne diffère de la projection $B_{x'}^{\mathrm{I}}$ que par le si-

gne, et les projections $B_{y''}^{II}$ et $B_{y'}^{I}$ sont égales. Il est aisé de s'assurer que les raisonnements exactement les mêmes mais se rapportant au gyroscope II conduisent à la relation

$$\omega_x B \cos \varepsilon + \omega_y B \sin \varepsilon = M_{z''}^{II}. \qquad (2.6.9)$$

Cette dernière peut s'obtenir également à partir de la relation (2.6.8) si l'on y inverse le signe de l'angle ε et remplace $M_{z'}^{I}$ par $M_{z''}^{II}$, c'est-à-dire par la somme des moments, par rapport à l'axe z'', des forces exercées sur l'ensemble mécanique « boîtier—rotor » du gyroscope II.

Remarquons qu'en additionnant membre à membre les relations (2.6.8) et (2.6.9) on est conduit à la relation

$$\omega_x 2B \cos \varepsilon = M_{z'}^{I} + M_{z''}^{II}. \qquad (2.6.10)$$

Le rapprochement entre la dernière relation et la troisième relation (2.6.5) donne une égalité presque évidente

$$M_{z'}^{I} + M_{z''}^{II} = M_z. \qquad (2.6.11)$$

En effet, $\overline{M}^{I}$ et $\overline{M}^{II}$ sont les moments des forces appliquées respectivement aux ensembles mécaniques « boîtier — rotor » des gyroscopes I et II lesquelles sont des forces intérieures agissant dans l'ensemble mécanique comprenant l'enveloppe de la gyrosphère (avec le cadre qui lui est rigidement relié), les éléments de transmission mécanique entre les gyroscopes et les deux rotors mentionnés avec leurs boîtiers [1]). C'est pourquoi, $\overline{M}^{I}$ et $\overline{M}^{II}$ peuvent être considérés comme moments des forces exercées respectivement sur les sous-ensembles mécaniques « boîtier — rotor » des gyroscopes I et II de la part d'un troisième sous-ensemble comprenant tous les autres organes constitutifs de la gyrosphère. A leur tour, les moments de même intensité mais de sens inverse, à savoir $-\overline{M}^{I}$ et $-\overline{M}^{II}$, sont ceux des réactions des deux sous-ensembles précédents sur le troisième. Ce dernier est encore soumis à l'action des forces extérieures de moment $\overline{M}$ mentionné plus haut. Ce sous-ensemble (c'est-à-dire l'enveloppe de la gyrosphère, le cadre ou l'anneau extérieur des deux gyroscopes, les éléments de transmission mécanique entre eux, d'autres organes sauf les rotors et les boîtiers) ne possède pas de moment cinétique propre. Aussi, en établissant les équations du mouvement, convient-il de poser, d'après la théorie de précession des gyroscopes, que son moment cinétique total est également nul. Par conséquent, les forces qui lui sont appli-

[1]) On suppose, bien entendu, que les centres de masse de ces ensembles sont situés sur les axes des boîtiers correspondants et qu'il n'y a aucune force exercée par des champs extérieurs (par exemple, des champs magnétiques) environnant l'élément sensible du compas gyroscopique.

10—01247

quées doivent faire équilibre, d'où résulte la relation

$$-\overline{M}^{\mathrm{I}} - \overline{M}^{\mathrm{II}} + \overline{M} = 0, \tag{2.6.12}$$

dont un cas particulier est représenté par l'égalité (2.6.11).

Retranchons maintenant membre à membre la relation (2.6.9) de (2.6.8). Il vient

$$-\omega_y\, 2B \sin \varepsilon = N, \tag{2.6.13}$$

où

$$N = M_{z'}^{\mathrm{I}} - M_{z''}^{\mathrm{II}} \tag{2.6.14}$$

est la différence des moments résultants, par rapport aux axes z' et z'', des forces appliquées respectivement aux ensembles mécaniques « boîtier — rotor » des gyroscopes I et II.

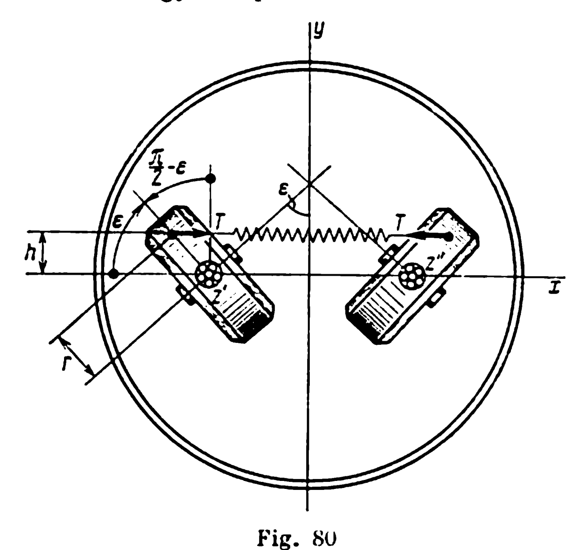


Fig. 80

C'est la relation (2.6.13) qui fournit justement la quatrième équation différentielle qui manquait. Cette dernière et les trois équations (2.6.5) forment un système de quatre équations contenant quatre paramètres cherchés qui déterminent l'orientation de la gyrosphère et l'angle de décalage de ses gyroscopes.

Il est utile de considérer un « jeu» de forces qui provoquent à l'intérieur de la gyrosphère une différence des moments $M_{z'}^{\mathrm{I}}$ et $M_{z''}^{\mathrm{II}}$. Si les boîtiers sont reliés entre eux par un ressort, on a d'après la fig. 80

$$M_{z'}^{\mathrm{I}} = -M_{z''}^{\mathrm{II}} = -Th, \tag{2.6.15}$$

où T est la tension du ressort et h sa distance au plan contenant les axes des deux boîtiers.

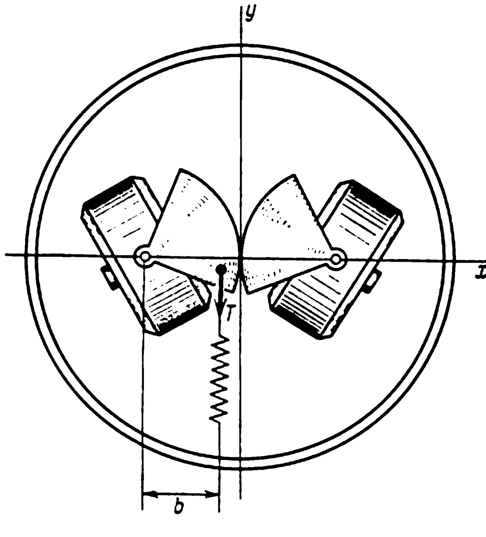


Fig. 81

Supposons que pour $\varepsilon = \pi/2$ le ressort ne subit aucune contrainte et soient K sa raideur et r la distance du point de fixation du ressort sur le boîtier à l'axe de ce dernier (v. fig. 80). Compte tenu de la formule (2.6.14), on obtient pour le moment N l'expression suivante:

$$N = -4Kr^2 \cos \varepsilon \sin \varepsilon. \qquad (2.6.16)$$

Comme il sera montré plus loin, c'est justement une telle variation de la valeur de N en fonction de l'angle ε qui est nécessaire pour que le dispositif gyroscopique décrit puisse devenir un compas gyroscopique spatial.

Considérons un autre procédé possible permettant de produire les moments $M^{\mathrm{I}}_{z'}$ et $M^{\mathrm{II}}_{z''}$ (et donc leur différence N) au moyen d'un ressort disposé de façon différente. Fixons une des extrémités de ce ressort, par exemple au premier secteur denté rigidement relié au boîtier du gyroscope I et l'autre, au cadre (ou à l'enveloppe de la gyrosphère) (fig. 81). Dans ces conditions, d'après ce qui précède, la somme des moments, par rapport à l'axe z', de toutes les forces s'exerçant sur la première roue dentée (fig. 82) doit être posée nulle. En négligeant le frottement dans la transmission par engrenages reliant les boîtiers des deux gyroscopes, on a

$$-M^{\mathrm{I}}_{z'} - Tb + Q^{\mathrm{I}} \frac{d}{2} = 0, \qquad (2.6.17)$$

où $-M^{\mathrm{I}}_{z'}$ est le moment de la réaction du boîtier du premier gyroscope sur la roue dentée, T la tension du ressort, b la distance de la ligne

d'action de la force $\overline{T}$ à l'axe y'. d le diamètre de la circonférence initiale de la roue dentée et Q^{I} l'effort circonférentiel exercé par la deuxième roue dentée sur la première. L'effort Q^{I} est considéré comme positif s'il est dirigé vers le haut (fig. 82).

Pour la deuxième roue, l'équation de l'équilibre analogue est de la forme

$$-M_{z''}^{\mathrm{II}}+Q^{\mathrm{II}}\frac{d}{2}=0, \tag{2.6.18}$$

où Q^{II} est la force exercée par la première roue dentée sur la deuxième, d'intensité égale à celle de Q^{I}. Elle est positive lorsqu'elle est dirigée vers le bas.

Comme corollaire des deux équations (2.6.17) et (2.6.18), ainsi que de la formule (2.6.14), on obtient l'égalité

$$N_{\cdot}=-Tb, \tag{2.6.19}$$

où T et b sont, dans le cas général, fonctions de l'angle ε.

Revenons à la relation (2.6.13). Comme il a déjà été indiqué, elle constitue avec trois relations (2.6.5) un système de quatre équations différentielles contenant quatre paramètres cherchés qui déterminent l'orientation de la gyrosphère et l'angle de décalage de ses gyroscopes.

Admettons que le centre de masse de la gyrosphère (avec les deux gyroscopes) est situé sur l'axe z à une distance l au-dessous de son centre géométrique. Ses coordonnées x_c, y_c et z_c dans le système xyz

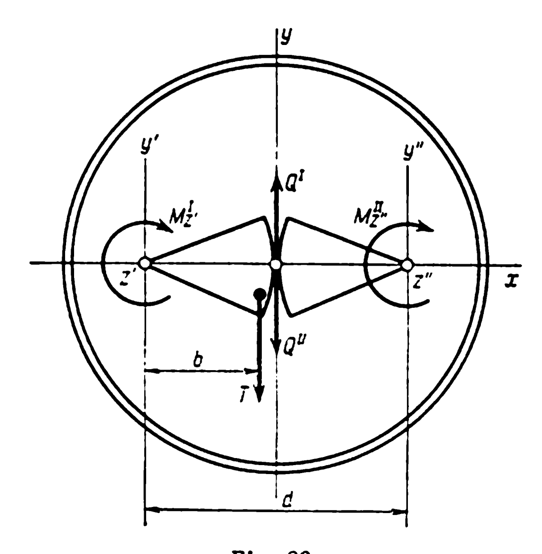


Fig. 82

ont alors pour valeurs

$$x_c = 0, \quad y_c = 0, \quad z_c = -l. \qquad (2.6.20)$$

Les forces d'inertie d'Euler dues au mouvement de translation du système de coordonnées $\xi^*\eta^*\zeta^*$ se réduisent dans ce cas (v. plus haut chap. I, § 1) à une seule force P qui est leur résultante ayant pour point d'application le centre de masse de la gyrosphère. Les projections de P sur les axes du système xyz lié à la gyrosphère ont pour valeurs respectives

$$P_x = -mw_x, \quad P_y = -mw_y, \quad P_z = -mw_z, \qquad (2.6.21)$$

où w_x, w_y et w_z sont les projections, sur les mêmes axes, de l'accélération « absolue » du centre géométrique de la gyrosphère, cette accélération étant rapportée, dans le cas considéré, à la sphère S ou au système de coordonnées non tournant $\xi^s\eta^s\zeta^s$ qui lui est lié; m est la masse de la gyrosphère.

Les forces physiques agissant sur la gyrosphère sont les suivantes: les forces de gravitation qui peuvent être remplacées par la seule force $\overline{F}$ appliquée au centre de masse de la gyrosphère, et les forces de pression que le liquide porteur exerce sur l'enveloppe de la gyrosphère. Comme il a déjà été indiqué, l'étude du mouvement de la gyrosphère par rapport au système de coordonnées en translation $\xi^*\eta^*\zeta^*$ exige que dans les équations de son mouvement on tienne compte des forces d'inertie d'Euler. En reprenant les raisonnements développés au § 2 du chapitre précédent et en tenant compte du fait que les forces de pression passent par le centre de la gyrosphère, on obtient finalement pour les moments M_x, M_y et M_z des forces qui s'exercent sur la gyrosphère, les expressions suivantes:

$$M_x = l\,(P_y + F_y), \quad M_y = -l\,(P_x + F_x), \quad M_z = 0. \qquad (2.6.22)$$

Ici F_x et F_y sont les projections de la force $\overline{F}$ d'attraction de la gyrosphère par la Terre, sur les axes x et y liés à la gyrosphère. Pour le calcul de ces projections on peut admettre avec une grande précision que la force $\overline{F}$ est parallèle au rayon de la Terre passant par le centre de la gyrosphère (ou, ce qui revient au même, au rayon de la sphère S).

Introduisons maintenant les expressions (2.6.22) dans les seconds membres des relations (2.6.5) et réunissons-les à la relation (2.6.13). En tenant compte également de la formule (2.6.21), on obtient les égalités

$$\begin{aligned} -\omega_z 2B\cos\varepsilon &= l\,(-mw_y + F_y), & \frac{d}{dt}(2B\cos\varepsilon) &= -l\,(-mw_x + F_x), \\ \omega_x 2B\cos\varepsilon &= 0, & -\omega_y 2B\sin\varepsilon &= N \end{aligned} \qquad (2.6.23)$$

qui constituent les équations différentielles initiales permettant de construire la théorie du compas gyroscopique spatial de Geckeler (ainsi que du compas « apériodique » ordinaire « Anschütz »).

Introduisons, comme nous l'avons fait au § 4 du présent chapitre, le trièdre naturel de Darboux $x^0y^0z^0$ en plaçant son sommet au centre géométrique de la gyrosphère et en dirigeant son arête z^0 suivant le prolongement du rayon de la Terre. La vitesse $\bar{v}$ de ce centre, rapportée à la sphère S est dirigée suivant l'arête x^0, si bien que les projections de la vitesse angulaire $\bar{\omega}^0$ du trièdre $x^0y^0z^0$ sur ses propres arêtes sont données par les formules

$$\omega^0_{x^0} = 0, \qquad \omega^0_{y^0} = \frac{v}{R}, \qquad \omega^0_{z^0} = \tilde{\omega}. \tag{2.6.24}$$

Ici, $v = v(t)$ et $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}(t)$ sont deux fonctions du temps dont la donnée détermine, avec la position initiale du trièdre $x^0y^0z^0$, le mouvement de celui-ci par rapport à la sphère S ou, ce qui revient au même, par rapport au système de coordonnées non tournant $\xi^s\eta^s\zeta^s$ qui est lié à cette sphère.

Remarquons également que d'après ce qui a été exposé au § 4 du présent chapitre, les projections de l'accélération « absolue » (rapportée au système de coordonnées $\xi^s\eta^s\zeta^s$) du centre de la gyrosphère sur les arêtes du trièdre $x^0y^0z^0$ ont pour expressions

$$w_{x^0} = \frac{dv}{dt}, \qquad w_{y^0} = \tilde{\omega}v, \qquad w_{z^0} = -\frac{v^2}{R}. \tag{2.6.25}$$

Enfin, il est évident que les projections de la force de gravitation terrestre $\bar{F}$ exercée sur la gyrosphère, sur les mêmes arêtes s'expriment par

$$F_{x^0} = 0, \qquad F_{y^0} = 0, \qquad F_{z^0} = -F. \tag{2.6.26}$$

Déterminons maintenant l'orientation du trièdre xyz lié à la gyrosphère, par rapport au trièdre naturel de Darboux $x^0y^0z^0$ par l'intermédiaire de trois angles d'Euler-Krylov α, β et γ (fig. 83). A cet effet, introduisons deux systèmes de coordonnées auxiliaires $x_2y_2z_2$ et $x_1y_1z_1$. Le système $x_2y_2z_2$ est tourné par rapport au trièdre $x^0y^0z^0$ de l'angle α autour de l'axe z_2 confondu avec l'arête z^0. L'autre système de coordonnées, $x_1y_1z_1$, est tourné par rapport au système $x_2y_2z_2$ de l'angle β autour des axes confondus x_2 et x_1. Enfin, le trièdre xyz se trouve tourné par rapport au système $x_1y_1z_1$ de l'angle γ autour de l'axe y_1 qui coïncide à son tour avec l'arête y.

A cette suite de rotations finies que nous venons d'énumérer correspond le schéma suivant (v. tome I, chap. III, § 5):

$$x^0y^0z^0 \xrightarrow[\alpha]{z^0,\, z_2} x_2y_2z_2 \xrightarrow[\beta]{x_2,\, x_1} x_1y_1z_1 \xrightarrow[\gamma]{y_1,\, y} xyz. \tag{2.6.27}$$

D'après ce schéma, pour passer, par exemple, de la position occupée par le système $x_2y_2z_2$ dans la position $x_1y_1z_1$, il faut effectuer une rotation finie d'angle β autour des axes confondus x_2 et x_1, etc. Représentons le même schéma (2.6.27) sous une forme légèrement modifiée suivante :

$$z^0x^0y^0 \xrightarrow[\alpha]{z^0,\, z_2} z_2x_2y_2 \xrightarrow[\beta]{x_2,\, x_1} z_1x_1y_1 \xrightarrow[\gamma]{y_1,\, y} zxy. \qquad (2.6.28)$$

Maintenant, il devient évident que la suite de rotations finies considérée réalise un déplacement angulaire de première espèce. En effet,

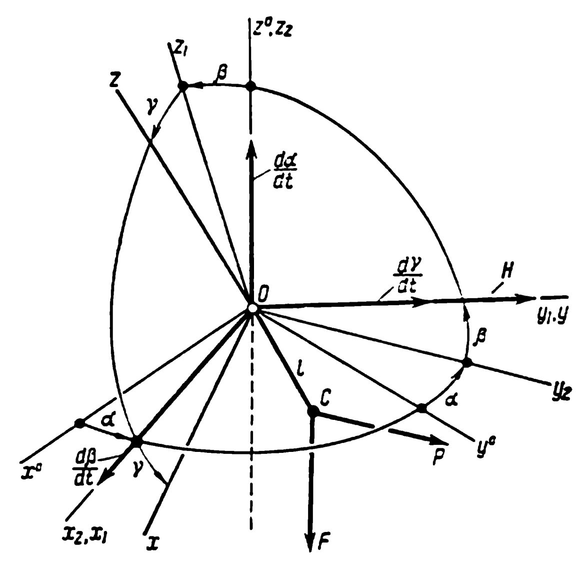


Fig. 83

elle décrit les rotations successives d'un trièdre *abc*, s'effectuant d'angles α, β et γ autour de ses arêtes *a*, *b* et *c*. Dans la position initiale, les arêtes *a*, *b* et *c* de ce trièdre se confondent respectivement avec les arêtes z^0, x^0 et y^0 du trièdre naturel de Darboux et, dans la position finale, avec les arêtes *z*, *x* et *y* du trièdre lié à la gyrosphère.

Au chap. III, § 5 (tome I), nous avons indiqué la table (3.5.6) des cosinus des angles que font entre elles les arêtes du trièdre *abc* dans leurs positions initiales et après un déplacement angulaire de première espèce. La position initiale du trièdre *abc* a été désignée par *xyz* et la position finale par $\xi_1\eta_1\zeta_1$. Aussi, pour construire la table des cosinus des angles que les arêtes du trièdre *xyz* font avec les arêtes du trièdre $x^0y^0z^0$, suffit-il de remplacer, dans la table (3.5.6) mentionnée, les désignations x, y, z, ξ_1, η_1 et ζ_1 respectivement par z^0, x^0,

y^0, z, x et y et de permuter convenablement ses lignes et ses colonnes. En omettant les indices des angles α, β et γ, on obtient la table

	x^0	y^0	z^0
x	$-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+$ $+\cos\alpha\cos\gamma$	$\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma+$ $+\sin\alpha\cos\gamma$	$-\cos\beta\sin\gamma$
y	$-\sin\alpha\cos\beta$	$\cos\alpha\cos\beta$	$\sin\beta$
z	$\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma+$ $+\cos\alpha\sin\gamma$	$-\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+$ $+\sin\alpha\sin\gamma$	$\cos\beta\cos\gamma$

(2.6.29)

La vitesse angulaire $\overline{\omega}$ du trièdre xyz par rapport au système de coordonnées non tournant $\xi^*\eta^*\zeta^*$ est égale à la somme géométrique de la vitesse angulaire $\overline{\omega}^0$ du trièdre naturel de Darboux $x^0y^0z^0$ (par rapport au même système) et de trois vitesses angulaires relatives: $d\alpha/dt$ du système de coordonnées $x_2y_2z_2$ par rapport au trièdre $x^0y^0z^0$, $d\beta/dt$ du système $x_1y_1z_1$ par rapport au système $x_2y_2z_2$ et enfin, $d\gamma/dt$ du trièdre xyz lié à la gyrosphère, par rapport au système $x_1y_1z_1$. Les vitesses angulaires relatives $d\alpha/dt$, $d\beta/dt$ et $d\gamma/dt$ sont dirigées respectivement suivant les axes z^0 (z_2), x_2 (x_1) et y_1 (y). Remarquons que dans ce cas l'axe x_2 (x_1) et donc le vecteur vitesse angulaire $d\beta/dt$ se trouvent dans le plan zx et forment avec les arêtes x et z les angles γ et $\pi/2-\gamma$ et, bien entendu, l'angle $\pi/2$ avec l'axe y (y_1).

Compte tenu de ce qui précède, ainsi que des formules (2.6.24) et de la table (2.6.29), il devient maintenant facile de déterminer les projections ω_x, ω_y et ω_z de la vitesse angulaire du trièdre xyz sur ses propres arêtes. Elles ont pour expressions

$$\begin{aligned}\omega_x &= \frac{v}{R}(\sin\alpha\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma)-\\ &\qquad -\left(\tilde{\omega}+\frac{d\alpha}{dt}\right)\cos\beta\sin\gamma+\frac{d\beta}{dt}\cos\gamma,\\ \omega_y &= \frac{v}{R}\cos\alpha\cos\beta+\left(\tilde{\omega}+\frac{d\alpha}{dt}\right)\sin\beta+\frac{d\gamma}{dt},\\ \omega_z &= \frac{v}{R}(\sin\alpha\sin\gamma-\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma)+\\ &\qquad +\left(\tilde{\omega}+\frac{d\alpha}{dt}\right)\cos\beta\cos\gamma+\frac{d\beta}{dt}\sin\gamma.\end{aligned} \qquad (2.6.30)$$

D'une manière analogue, en utilisant la même table (2.6.29) et les formules (2.6.25) et (2.6.26), on peut trouver les projections w_x, w_y et w_z de l'accélération « absolue » $\overline{w}$ du centre géométrique de la gyrosphère et les projections F_x, F_y et F_z de la force de gravitation $\overline{F}$ sur les arêtes x, y et z du trièdre xyz. On a

$$w_x = \frac{dv}{dt}(\cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma) +$$
$$+ \tilde{\omega}v(\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma) + \frac{v^2}{R}\cos\beta\sin\gamma,$$
$$w_y = -\frac{dv}{dt}\sin\alpha\cos\beta + \tilde{\omega}v\cos\alpha\cos\beta - \frac{v^2}{R}\sin\beta, \qquad (2.6.31)$$
$$w_z = \frac{dv}{dt}(\cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma) +$$
$$+ \tilde{\omega}v(\sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma) - \frac{v^2}{R}\cos\beta\cos\gamma$$

et

$$F_x = F\cos\beta\sin\gamma, \quad F_y = -F\sin\beta, \quad F_z = -F\cos\beta\cos\gamma. \qquad (2.6.32)$$

En introduisant dans les égalités (2.6.23) les valeurs de ω_x, ω_y, ω_z, w_x, w_y, w_z, F_x, F_y données par les formules (2.6.30) à (2.6.32), on obtient le système de quatre équations différentielles du premier ordre par rapport aux variables cherchées α, β, γ et ε :

$$-\left[\frac{v}{R}(\sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma) +\right.$$
$$\left. + \left(\tilde{\omega} + \frac{d\alpha}{dt}\right)\cos\beta\cos\gamma + \frac{d\beta}{dt}\sin\gamma\right] 2B\cos\varepsilon =$$
$$= l\left\{-m\left[-\frac{dv}{dt}\sin\alpha\cos\beta + \tilde{\omega}v\cos\alpha\cos\beta - \frac{v^2}{R}\sin\beta\right] - F\sin\beta\right\},$$
$$\frac{d}{dt}(2B\cos\varepsilon) = -l\left\{-m\left[\frac{dv}{dt}(\cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma) +\right.\right.$$
$$\left.\left. + \tilde{\omega}v(\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma) + \frac{v^2}{R}\cos\beta\sin\gamma\right] + F\cos\beta\sin\gamma\right\},$$
$$\left[\frac{v}{R}(\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma) - \left(\tilde{\omega} + \frac{d\alpha}{dt}\right)\cos\beta\sin\gamma +\right.$$
$$\left. + \frac{d\beta}{dt}\cos\gamma\right] 2B\cos\varepsilon = 0,$$
$$-\left[\frac{v}{R}\cos\alpha\cos\beta + \left(\tilde{\omega} + \frac{d\alpha}{dt}\right)\sin\beta + \frac{d\gamma}{dt}\right] 2B\sin\varepsilon = N. \qquad (2.6.33)$$

Pour un choix déterminé du moment N en tant que fonction de l'angle ε (la moitié de l'angle de « décalage » des gyroscopes) le système de quatre équations différentielles du mouvement de la gyrosphère, que nous venons d'établir, peut admettre une solution particulière importante, quelle que soit la forme des fonctions $v(t)$ et $\tilde{\omega}(t)$ continues et dérivables. Dans cette solution, les angles α, β et γ sont identiquement nuls, alors que l'angle ε est lié à $v(t)$ par une

simple relation trigonométrique. Ceci signifie en particulier que les paramètres de la gyrosphère peuvent être choisis de telle sorte que pour des conditions initiales convenables de son mouvement le trièdre xyz lié à la gyrosphère (v. fig. 83) soit constamment confondu avec le trièdre naturel de Darboux $x^0y^0z^0$, quel que soit le déplacement du centre de la sphère sur la surface terrestre. Ainsi, tout se passe dans ce cas comme si le trièdre xyz « suivait » le trièdre naturel de Darboux $x^0y^0z^0$, quelles que soient la vitesse $v = v(t)$ de leur sommet commun et la composante verticale $\omega^0_{z_0} = \tilde{\omega}(t)$ de leur vitesse angulaire commune. Par là même, l'axe x se trouve dirigé, tout le temps, suivant le vecteur vitesse linéaire de la gyrosphère, c'est-à-dire suivant la vitesse de son centre. Proposons-nous d'établir les conditions dont la réalisation assure l'existence d'une telle solution. En introduisant dans le système d'équations différentielles (2.6.33) $\alpha = \beta = \gamma = 0$, nous obtenons les égalités

$$\begin{gathered}\tilde{\omega}2B\cos\varepsilon = lm\omega v,\\ \frac{d}{dt}(2B\cos\varepsilon) = lm\frac{dv}{dt},\\ 0=0,\\ -\frac{v}{R}2B\sin\varepsilon = N,\end{gathered} \tag{2.6.34}$$

dont la troisième est déjà une identité. La première et la deuxième égalité se transforment, elles aussi, en identités si pour fonction cherchée ε de la solution particulière qu'on se propose de trouver on prend

$$\varepsilon = \sigma(t), \tag{2.6.35}$$

où $\sigma(t)$ est la racine courante de l'équation trigonométrique

$$2B\cos\sigma = lmv(t). \tag{2.6.36}$$

Enfin, la quatrième égalité se transforme en identité si le dispositif gyroscopique est réalisé de telle sorte que le moment N ne dépende que de l'angle ε et s'exprime dans le cas général par la formule

$$N = -\frac{4B^2}{lmR}\cos\varepsilon\sin\varepsilon. \tag{2.6.37}$$

Pour s'en assurer, il suffit maintenant d'introduire dans les deux membres de la quatrième égalité (2.6.34), compte tenu de la formule (2.6.37), la fonction $\sigma(t)$ au lieu de l'angle ε et de remplacer v par sa représentation par l'intermédiaire de la même fonction $\sigma(t)$ suivant l'équation (2.6.36).

Comme il a été montré plus haut, la variation du moment N (égal à la différence des moments M^{I}_{z}, et M^{II}_{z}) en fonction de l'angle ε

est précisément de la forme (2.6.37) si les boîtiers des gyroscopes sont liés l'un à l'autre par un ressort (fig. 80). La comparaison des formules (2.6.16) et (2.6.37) montre que la raideur K du ressort et la distance r des points de sa fixation aux axes des boîtiers doivent être choisies de telle sorte qu'elles soient liées à la valeur du moment cinétique propre B, à la masse m de la gyrosphère et au métacentre l (distance du centre géométrique de la gyrosphère à son centre de masse) par la relation

$$Kr^2 = \frac{B^2}{mlR}. \tag{2.6.38}$$

Dans ce cas le dispositif gyroscopique décrit devient un *gyrocompas spatial*. Arrêtons-nous sur ses propriétés.

Du fait de ce qui précède, si les conditions initiales

$$\alpha(0) = 0, \quad \beta(0) = 0, \quad \gamma(0) = 0, \quad 2B\cos\varepsilon(0) = mlv(0) \tag{2.6.39}$$

sont réalisées, le mouvement ultérieur de la gyrosphère se produit de telle sorte que sont vérifiées les égalités

$$\alpha(t) = 0, \quad \beta(t) = 0, \quad \gamma(t) = 0, \quad \varepsilon(t) = \sigma(t), \tag{2.6.40}$$

où $\sigma(t)$ est, comme précédemment, la racine de l'équation trigonométrique (2.6.36).

Ainsi, les arêtes du trièdre xyz lié à la gyrosphère seront constamment confondues avec les arêtes respectives du trièdre naturel de Darboux $x^0y^0z^0$, quel que soit le mouvement de la gyrosphère sur la surface de la Terre. Un tel mouvement de la gyrosphère sera dit *stationnaire*. Dans le cas du mouvement stationnaire, l'axe z ou, ce qui revient au même, le diamètre vertical de la gyrosphère constitue un prolongement du rayon de la Terre, alors que l'axe x est dirigé suivant le vecteur vitesse « absolue » $\bar{v}$ du centre géométrique de la gyrosphère. De plus, en partant de la valeur courante de l'angle ε, on peut, sans avoir à tenir compte de l'information provenant de l'extérieur, déterminer, d'après la formule (2.6.35) et l'équation (2.6.36), la valeur courante de la vitesse « absolue » (c'est-à-dire rapportée à la sphère non tournante S) du centre géométrique de la gyrosphère. Les propriétés remarquables du compas gyroscopique spatial que nous venons d'énumérer permettent de l'utiliser dans les systèmes de navigation par inertie (voir plus loin chap. V), ainsi que comme détecteur de mouvement angulaire pour la stabilisation des plates-formes dans le plan de l'horizon géocentrique local, c'est-à-dire dans le plan tangent à la sphère terrestre.

Soit, par exemple, une gyrosphère installée à bord d'un navire à quai, c'est-à-dire immobile par rapport à la Terre en rotation. Dans ce cas, la vitesse « absolue » de son centre géométrique est diri-

gée suivant la tangente au parallèle du lieu et a pour valeur

$$v^0 = RU \cos \varphi, \tag{2.6.41}$$

où U est, comme précédemment, la vitesse angulaire de la Terre; R le rayon de la Terre et φ la latitude du lieu où se trouve le navire.

Admettons que la gyrosphère s'est mise en état de « repos » par rapport à la Terre et que l'angle 2ε des axes des rotors a pris une valeur stationnaire $2\varepsilon^0$. Dans ce cas, le premier membre de la dernière égalité peut se mettre, en vertu de la formule (2.6.35) et de l'équation (2.6.36), sous la forme

$$v^0 = \frac{2B}{lm} \cos \varepsilon^0, \tag{2.6.42}$$

ce qui donne, compte tenu de l'égalité (2.6.41), la relation

$$\cos \varphi = \frac{2B}{lmRU} \cos \varepsilon^0. \tag{2.6.43}$$

Ainsi, le gyrocompas spatial placé sur un support fixe peut également servir de *gyroscope de latitude*. En mesurant l'angle ε^0 égal à la moitié de l'angle de décalage des gyroscopes, on peut déterminer, à l'aide de la relation (2.6.43) (sans avoir recours à l'observation des astres, ni à l'utilisation des signaux radio-électriques), la latitude φ de l'endroit où l'on se trouve.

En principe, les paramètres B, l, m d'un compas gyroscopique spatial et les paramètres K et r de son ressort peuvent être choisis de manière à réaliser non seulement la condition (2.6.38) mais aussi à vérifier l'égalité

$$lmRU = 2B. \tag{2.6.44}$$

Dans ce cas, la latitude φ sera exactement égale à l'angle ε^0.

Lorsque le navire est au point fixe par rapport à la Terre en rotation, l'axe x lié à la gyrosphère est dirigé, lors du mouvement stationnaire de la gyrosphère, comme il a déjà été dit, suivant la tangente au parallèle du lieu, c'est-à-dire vers l'est. En conséquence, l'axe y est orienté exactement vers le nord. Si le véhicule porteur du gyroscope se déplace sur la sphère terrestre, l'axe y n'est plus dirigé vers le nord. Soient V_N et V_E les composantes Nord et Est de la vitesse de la gyrosphère mobile avec le navire par rapport à la Terre. Il est évident que, dans ce cas, la vitesse « absolue » $\bar{v}$ de la gyrosphère est égale à la somme géométrique des composantes V_N, V_E et de la vitesse $v^0 = RU \cos \varphi$ due à la rotation de la Terre et dirigée vers l'est, du point où se trouve le navire. Il n'est pas difficile de voir (fig. 84) que la vitesse « absolue » de la gyrosphère s'écarte de la direction Est d'un angle ϑ tel que

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{V_N}{RU \cos \varphi + V_E}. \tag{2.6.45}$$

Supposons que la gyrosphère est au régime stationnaire. L'axe y lié à la gyrosphère et confondu avec son diamètre Nord-Sud s'écartera alors du même angle ϑ de la direction Nord. Dans ce cas-là, la direction de l'axe y est appelée *gyronord.* L'angle ϑ d'écart du gyronord par rapport au nord vrai est aussi appelé *erreur* (déviation) *de vitesse* ou encore *erreur de route* du compas gyroscopique [1]).

La formule (2.6.45) pour l'angle ϑ, qui figure dans tous les manuels et guides de compas gyroscopiques ne fournit pas une solution

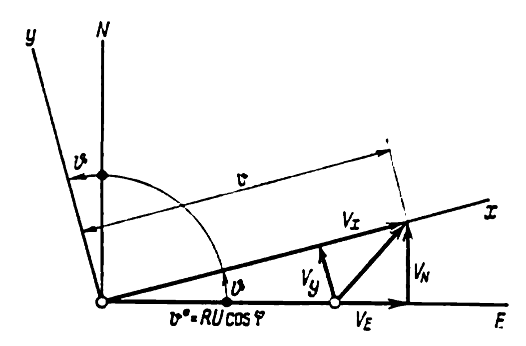


Fig. 84

rigoureuse au problème. En effet, les valeurs de la composante Nord V_N et de la composante Est V_E de la vitesse du navire ne peuvent pas être déterminées sans connaître le cap du navire, uniquement à partir des valeurs données de la vitesse V elle-même et de l'angle de dérive, c'est-à-dire de l'angle compris entre la direction de la vitesse V et l'axe longitudinal du navire (v. tome I, chap. I, § 1). Or, le cap vrai du navire reste inconnu tant qu'on n'a pas trouvé la valeur de l'erreur de route ϑ ; cette dernière dépend, en vertu de la formule (2.6.45), des valeurs de V_N et V_E. En effectuant une transformation simple qui découle avec évidence des considérations géométriques (v. fig. 84), il n'est pas difficile d'obtenir la formule suivante:

$$\sin\vartheta = \frac{V_y}{RU\cos\varphi}, \tag{2.6.46}$$

qui ne souffre pas d'inconvénient mentionné. Dans cette formule, V_y est la projection de la vitesse du centre de la gyrosphère sur l'axe y qui lui est lié (gyronord), c'est-à-dire sur une droite dont la position par rapport au navire est connue.

[1]) Exactement la même erreur de route est faite non seulement par un compas gyroscopique spatial dans lequel sont réalisées les conditions initiales (2.6.39) indiquées plus haut, mais aussi par le gyrocompas ordinaire dont le système amortisseur est arrêté après l'évanouissement des oscillations propres (grâce à l'action des forces d'amortissement).

Revenons maintenant aux équations (2.6.33) du mouvement de la gyrosphère considérée en tant que système mécanique à quatre degrés de liberté. Supposons que les conditions initiales (2.6.39) de son mouvement stationnaire ne sont pas réalisées. Dans ce cas, on peut s'attendre que le mouvement de la gyrosphère sera proche de ce mouvement-là. Nous appellerons ce mouvement perturbé et utiliserons pour son étude la méthode des petites oscillations. A savoir, supposons petits les angles α, β et γ, ainsi que la différence

$$\delta = \varepsilon - \sigma(t). \tag{2.6.47}$$

Remplaçons dans les équations (2.6.33) le moment N par son expression (2.6.37), et la variable ε par la somme $\sigma + \delta$ suivant l'égalité (2.6.47). Puis, développons les premiers et les seconds membres de ces équations en séries suivant les puissances des variables α, β, γ et δ et ne gardons dans ces développements que des termes de premier ordre. Il vient

$$\begin{gathered}
-\left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{v}{R}\beta + \tilde{\omega}\right) 2B\cos\sigma + \tilde{\omega}\delta\, 2B\sin\sigma = \\
= -lm\left(-\frac{dv}{dt}\alpha + \tilde{\omega}v - \frac{v^2}{R}\beta\right) - lF\beta, \\
\frac{d}{dt}(2B\cos\sigma - \delta\, 2B\sin\sigma) = lm\left(\frac{dv}{dt} + \tilde{\omega}v\alpha\right) - l\left(F - \frac{mv^2}{R}\right)\gamma, \\
\left(\frac{d\beta}{dt} + \frac{v}{R}\alpha - \tilde{\omega}\gamma\right) 2B\cos\sigma = 0, \\
-\left(\frac{d\gamma}{dt} + \frac{v}{R} + \tilde{\omega}\beta\right) 2B\sin\sigma - \frac{v}{R}\delta\, 2B\cos\sigma = \\
= -\frac{4B^2}{mlR}(\cos\sigma\sin\sigma + \delta\cos^2\sigma - \delta\sin^2\sigma).
\end{gathered} \tag{2.6.48}$$

Ces équations peuvent être simplifiées davantage si l'on utilise l'égalité (2.6.36) et de plus on pose, comme au § 4 du présent chapitre,

$$F - \frac{mv^2}{R} \simeq mg \simeq F. \tag{2.6.49}$$

On obtient, après quelques transformations assez simples,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{v\alpha}{\sqrt{gR}} - n_s\beta = \tilde{\omega}\frac{\delta\, 2B\sin\sigma}{ml\sqrt{gR}}, \qquad && \frac{d\gamma}{dt} + n_s\frac{\delta\, 2B\sin\sigma}{ml\sqrt{gR}} = -\tilde{\omega}\beta, \\
&\frac{d\beta}{dt} + n_s\frac{v\alpha}{\sqrt{gR}} = \tilde{\omega}\gamma, && \frac{d}{dt}\frac{\delta\, 2B\sin\sigma}{ml\sqrt{gR}} - n_s\gamma = -\tilde{\omega}\frac{v\alpha}{\sqrt{gR}},
\end{aligned} \tag{2.6.50}$$

où

$$n_s = \sqrt{\frac{g}{R}} \tag{2.6.51}$$

est la pulsation de Schüler que nous avons déjà rencontrée au § 4 du présent chapitre.

Les équations (2.6.50) peuvent subir l'opération de « compression » (v. § 1 du présent chapitre) qui donne, comme on peut s'en assurer facilement, un système de deux équations différentielles

$$\begin{aligned} \frac{d\varkappa}{dt} + in_s\varkappa &= i\tilde{\omega}\mu, \\ \frac{d\mu}{dt} + in_s\mu &= i\tilde{\omega}\varkappa \end{aligned} \qquad (2.6.52)$$

dans lesquelles $\varkappa$ et μ sont des fonctions à valeurs complexes de la variable réelle t, qui sont liées aux variables initiales cherchées par les relations

$$\begin{aligned} \varkappa &= \frac{v\alpha}{\sqrt{gR}} + i\beta, \\ \mu &= \gamma - i\,\frac{\delta\, 2B \sin\sigma}{ml\sqrt{gR}}\,. \end{aligned} \qquad (2.6.53)$$

Le système (2.6.52) admet une représentation sous forme de deux équations différentielles indépendantes

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\varkappa + \mu) + i\,(n_s - \tilde{\omega})\,(\varkappa + \mu) &= 0, \\ \frac{d}{dt}(\varkappa - \mu) + i\,(n_s + \tilde{\omega})\,(\varkappa - \mu) &= 0 \end{aligned} \qquad (2.6.54)$$

dont chacune s'intègre par des quadratures. On a

$$\begin{aligned} \varkappa + \mu &= (\varkappa_0 + \mu_0)\exp\left[-i\int_0^t (n_s - \tilde{\omega})\,dt\right], \\ \varkappa - \mu &= (\varkappa_0 - \mu_0)\exp\left[-i\int_0^t (n_s + \tilde{\omega})\,dt\right], \end{aligned} \qquad (2.6.55)$$

où $\varkappa_0$ et μ_0 sont les valeurs des variables $\varkappa$ et μ à l'instant initial $t = 0$.

Supposons que le mouvement du navire est tel que la fonction $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}(t)$ est constante. Il découle alors de la forme des formules (2.6.55) et des relations (2.6.53) que les fonctions $v\alpha$, β, γ et $\delta \sin\sigma\,(t)$ s'expriment par l'intermédiaire des superpositions des fonctions harmoniques de pulsations

$$n_1 = n_s - \tilde{\omega}, \quad n_2 = n_s + \tilde{\omega}. \qquad (2.6.56)$$

Il en sera ainsi, par exemple, lorsque le navire est au point fixe (à l'ancre ou à quai). Dans ce cas, la vitesse angulaire du trièdre natu-

rel de Darboux ayant son sommet au centre de la gyrosphère sera égale à la vitesse angulaire U de la Terre. Ainsi, la composante verticale $\tilde{\omega}$ de la vitesse angulaire de ce trièdre doit être considérée comme égale à la composante verticale $U \sin \varphi$ de la vitesse angulaire de la Terre (v. § 3 du présent chapitre). Si le navire se déplace le long de l'équateur, la valeur de $\tilde{\omega}$ s'annule et les deux pulsations n_1 et n_2 deviennent égales à la pulsation n_s de Schüler.

Considérons à titre d'exemple les conditions initiales suivantes du mouvement de la gyrosphère:

$$\alpha(0) = \alpha_0 \neq 0, \quad \beta(0) = 0, \quad \gamma(0) = 0, \quad \delta(0) = 0. \tag{2.6.57}$$

Dans ce cas, les relations (2.6.53) deviennent

$$\varkappa_0 = \frac{v(0)\,\alpha_0}{\sqrt{gR}}, \quad \mu_0 = 0. \tag{2.6.58}$$

En supposant la fonction $\tilde{\omega}$ toujours constante, on tire des formules (2.6.55)

$$\begin{aligned} \varkappa &= \frac{v(0)\,\alpha_0}{2\sqrt{gR}} \{\exp[-i(n_s - \tilde{\omega})t] + \exp[-i(n_s + \tilde{\omega})t]\}, \\ \mu &= \frac{v(0)\,\alpha_0}{2\sqrt{gR}} \{\exp[-i(n_s - \tilde{\omega})t] - \exp[-i(n_s + \tilde{\omega})t]\}. \end{aligned} \tag{2.6.59}$$

En tenant compte de nouveau des relations (2.6.53), on en tire en particulier

$$\alpha = \alpha_0 \frac{v(0)}{v(t)} \cos n_s t \cos \tilde{\omega} t. \tag{2.6.60}$$

Si, de plus, le navire est immobile par rapport à la Terre, la gyrosphère sera animée, en vertu de la dernière égalité, pour les conditions initiales (2.6.57), d'oscillations en azimut du type des battements harmoniques de période égale à la période de Schüler:

$$T_s = \frac{2\pi}{n_s} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} \simeq 84.4 \text{ mn}. \tag{2.6.61}$$

La période de variation de l'amplitude de ces oscillations:

$$T_a = \frac{2\pi}{\tilde{\omega}} = \frac{2\pi}{U \sin \varphi} \tag{2.6.62}$$

est égale à la période du pendule de Foucault; à la latitude de 60° elle vaut 28 heures 41 minutes. Pendant le premier quart de cette période, la gyrosphère effectue près de cinq oscillations complètes avec une amplitude décroissant presque jusqu'à zéro, ce qu'il serait tout à fait erroné de prendre pour un amortissement naturel de ses mouvements. En réalité, si la gyrosphère est réalisée de telle sorte que

le frottement dans les dispositifs de suspension de ses gyroscopes est négligeable, l'amplitude de ses oscillations de période de Schüler croîtra au cours du quart suivant de la période T_a (v. fig. 85). Il faut s'attendre que quelque chose de pareil se produise dans certains schémas de navigation par inertie dont le comportement se décrit par des équations différentielles ayant beaucoup de commun avec les équations du compas gyroscopique spatial.

Signalons, avant de clore ce paragraphe, une propriété dont jouit l'élément sensible d'un compas gyroscopique à deux rotors. Supposons comme précédemment que la suspension de l'élément sensible,

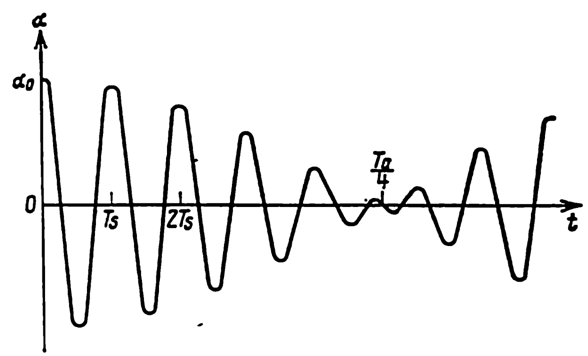


Fig. 85

c'est-à-dire de la gyrosphère, soit exempte de frottement et que le moment N des forces appliquées aux boîtiers des gyroscopes s'exprime par la formule (2.6.16). Alors, la troisième et la quatrième équation du système (2.6.23) nous donnent

$$\omega_x 2B \cos \varepsilon = 0, \quad -\omega_y 2B \sin \varepsilon = -4Kr^2 \cos \varepsilon \sin \varepsilon. \quad (2.6.63)$$

Il en résulte pour $\varepsilon \neq 0$ et $\varepsilon \neq \pi/2$ les égalités

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = \frac{2Kr^2}{B} \cos \varepsilon. \quad (2.6.64)$$

Ces égalités sont valables quel que soit le mouvement dont est animé le centre géométrique de la gyrosphère. En particulier, le gyrocompas peut être placé à bord d'un mobile dont l'altitude au-dessus de la Terre est variable, dans la cabine d'un véhicule spatial ayant ses propulseurs en marche, etc. En outre, la réalisation de la condition (2.6.38) qui rend spatial le gyrocompas n'est nullement nécessaire. Quant au cas du gyrocompas spatial, si l'on tient compte de la condition mentionnée (2.6.38), la deuxième égalité (2.6.64) prend la forme

$$\omega_y = \frac{2B}{mlR} \cos \varepsilon. \quad (2.6.65)$$

Pour ce qui est de la projection ω_z de la vitesse angulaire de l'enveloppe de la gyrosphère sur son diamètre vertical (parallèle aux axes des boîtiers), elle est déterminée suivant la première des équations (2.6.23) par la somme M_x des moments, par rapport à l'axe x, des forces appliquées au centre de masse de la gyrosphère, y compris les forces d'inertie d'Euler (v. plus haut), ainsi que par l'angle 2ε de décalage des gyroscopes et par la valeur B du moment cinétique propre de chacun d'eux.

Ainsi, l'enveloppe de la gyrosphère représente un corps solide dont la vitesse angulaire est limitée (dans le cadre de la théorie de précession des gyroscopes) par deux conditions (2.6.64) du type de liaison non holonome (v. tome I, chap. IV).

Ce qui vient d'être exposé permet de comprendre les particularités caractérisant le comportement de l'élément sensible du compas gyroscopique à deux rotors (de la gyrosphère) en cas de son utilisation dans les systèmes de navigation par inertie.

§ 7. Intégrateur gyroscopique

Ce petit paragraphe est consacré à l'étude d'un appareil appelé *intégrateur gyroscopique* ou encore *gyroscope intégrateur* d'accélérations apparentes qui est utilisé à côté des accéléromètres (v. plus loin chap. IV, § 1) dans les systèmes de guidage par inertie des fusées balistiques et des systèmes de navigation par inertie des mobiles (v. plus loin chap. IV et V). Cette étude fournit un exemple de prise en compte des petites grandeurs de deuxième ordre dans la théorie des gyroscopes.

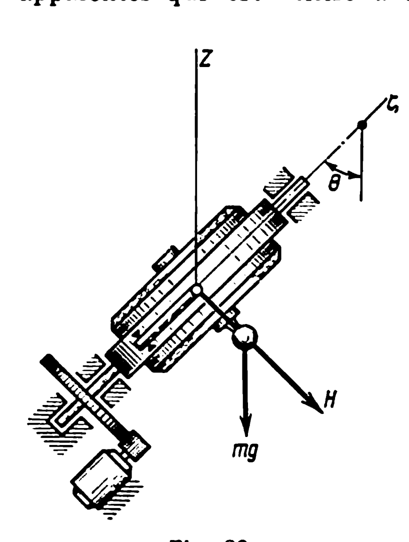


Fig. 86

Le gyroscope de cet appareil (fig. 86) présente un déséquilibre statique par rapport à l'axe du boîtier. L'axe de l'anneau de cardan extérieur est soumis à l'action d'un couple, développé par un moteur électrique, qui assure le maintien de l'axe du rotor dans une direction perpendiculaire au plan de l'anneau. La commande du moteur électrique s'obtient à l'aide d'un dispositif à contacts monté sur l'axe du boîtier. Sous l'action de la force de pesanteur et des forces d'inertie d'entraînement dues au mouvement de translation du support (généralement, une plate-forme stabilisée) le gyroscope est animé d'un mou-

vement de précession autour de l'axe de l'anneau extérieur. L'angle de rotation correspondant sert de l'une des grandeurs de départ utilisées dans le système de commande du véhicule.

Lors des essais de l'appareil sur un support fixe incliné, on a constaté que la période de précession du gyroscope dépend de façon substantielle de l'angle d'écart constant que l'axe du gyroscope

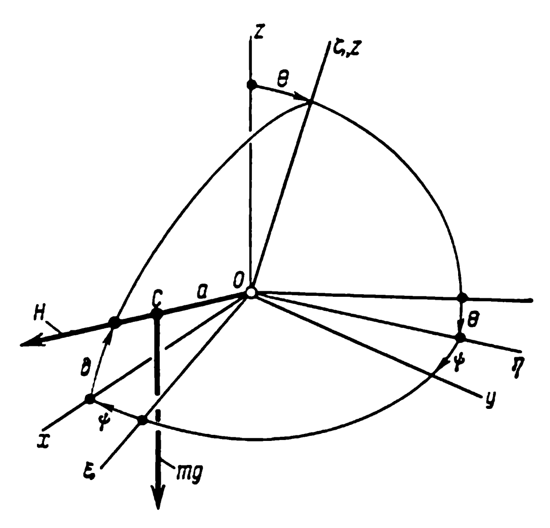


Fig. 87

présente par rapport à la perpendiculaire au plan de l'anneau extérieur. Dans ce qui suit nous donnons de ce phénomène une interprétation théorique.

Désignons par θ l'angle d'écart de l'axe z de l'anneau extérieur par rapport à la verticale Z et introduisons un système de coordonnées $\xi\eta\zeta$ lié au support de l'appareil (fig. 87). Orientons l'axe ζ de ce système suivant l'axe z de l'anneau extérieur et plaçons l'axe ξ dans un plan horizontal perpendiculairement au plan vertical contenant les axes Z et z.

Associons à l'anneau extérieur du gyroscope un système de coordonnées xyz, en faisant coïncider son axe z avec l'axe ζ et en dirigeant son axe y suivant l'axe du boîtier du gyroscope. L'angle des axes ξ et x sera désigné par ψ. Enfin, désignons par δ l'angle dont l'axe du rotor du gyroscope s'écarte de l'axe x, c'est-à-dire de la perpendiculaire au plan de l'anneau extérieur.

La précession autour de l'axe de l'anneau extérieur est due à un moment de la force de pesanteur du gyroscope par rapport à l'axe du boîtier, c'est-à-dire par rapport à l'axe y. Pour calculer ce moment, remarquons que d'après les formules bien connues en mécanique il est

donné par l'expression

$$M_y = z_c (mg)_x - x_c (mg)_z, \qquad (2.7.1)$$

où x_c et z_c sont les coordonnées du centre de gravité du gyroscope dans le système xyz; $(mg)_x$ et $(mg)_z$ sont les projections de la force de pesanteur mg du gyroscope sur les axes respectifs x et z. Il est évident que

$$x_c = a \cos \delta, \quad z_c = a \sin \delta, \qquad (2.7.2)$$

où a est la distance du centre de gravité du gyroscope au centre géométrique de sa suspension.

Pour déterminer les projections de la force de pesanteur sur les axes du système de coordonnées xyz remarquons que ses composantes le long des axes ξ, η et ζ ont pour valeurs respectives (v. fig. 87)

$$0, \; mg \sin \theta, \quad -mg \cos \theta. \qquad (2.7.3)$$

La dernière d'entre elles est encore la projection de la force mg sur l'axe z (ζ). Pour trouver la projection de la force de pesanteur sur l'axe x, il convient à son tour de projeter sur cet axe la composante de cette force suivant l'axe η; on obtient finalement l'expression suivante

$$(mg)_x = - mg \sin \theta \sin \psi. \qquad (2.7.4)$$

Ainsi la formule (2.7.1) donnant le moment M_y peut être mise sous la forme

$$M_y = mga (\cos \delta \cos \theta - \sin \delta \sin \theta \sin \psi). \qquad (2.7.5)$$

D'après la théorie de précession des gyroscopes, le moment M_y est égal à la composante, suivant l'axe y, de la vitesse de déplacement de l'extrémité du vecteur moment cinétique propre $\overline{H}$ du gyroscope, c'est-à-dire à la quantité

$$H \cos \delta \frac{d\psi}{dt}. \qquad (2.7.6)$$

En effet, dans le cas considéré, le support est fixe et l'angle δ est constant. Aussi, l'extrémité du vecteur $\overline{H}$ décrit-elle autour de l'axe ζ (z) une circonférence de rayon $H \cos \delta$. En égalant les expressions (2.7.5) et (2.7.6), on obtient l'équation différentielle

$$H \cos \delta \frac{d\psi}{dt} = mga (\cos \delta \cos \theta - \sin \delta \sin \theta \sin \psi). \qquad (2.7.7)$$

Cette équation peut, bien entendu, s'obtenir directement à partir des équations (2.3.11) du mouvement du gyroscope suspendu à la cardan, si l'on remplace les désignations des angles α et β par celles des angles ψ et δ.

Après la séparation des variables dans l'équation différentielle (2.7.7) et son intégration, on obtient l'égalité

$$t=\frac{H}{mga}\int\limits_{\psi_0}^{\varphi}\frac{\cos\delta\, d\psi}{\cos\delta\cos\theta-\sin\delta\sin\theta\sin\psi} \qquad (2.7.8)$$

dans laquelle ψ_0 est la valeur de l'angle ψ à l'instant initial $t = 0$.

Pour calculer la période de précession T, c'est-à-dire le temps de révolution complète de l'anneau extérieur du gyroscope, il convient de poser ici $\psi_0 = 0$ et $\psi = 2\pi$, ce qui donne dans le cas des angles θ et δ constants [1])

$$T=\frac{H}{mga\cos\theta}\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{d\psi}{1-\operatorname{tg}\delta\operatorname{tg}\theta\sin\psi}=\frac{H}{mga\cos\theta}\cdot\frac{2\pi}{\sqrt{1-(\operatorname{tg}\delta\operatorname{tg}\theta)^2}}. \qquad (2.7.9)$$

La relation ainsi obtenue est une généralisation de la formule connue pour la période de précession d'une toupie lourde. En effet, pour $\theta = 0$ (l'axe de précession vertical) la période est égale à

$$T=\frac{2\pi H}{mga}, \qquad (2.7.10)$$

quelle que soit la valeur de l'angle δ [2]).

Posons nulle la valeur de l'angle δ dans la formule (2.7.9), c'est-à-dire admettons que la direction de l'axe de rotation propre du gyroscope (c'est-à-dire du vecteur moment cinétique propre $\overline{H}$) est constamment amenée en coïncidence avec l'axe x qui est perpendiculaire au plan yz de l'anneau extérieur. Désignons par T_0 la période de précession correspondant à ce cas. Alors la formule (2.7.9) donne

$$T_0=\frac{2\pi H}{mga\cos\theta}. \qquad (2.7.11)$$

Revenons à la formule (2.7.9). Il est évident que pour $\theta \neq 0$ la période de précession croît avec l'angle δ, quel que soit le signe de ce dernier. Ce fait a été constaté par voie expérimentale avant l'établissement de la formule (2.7.9).

Pour des calculs pratiques concrets, dans la formule (2.7.9) on peut poser avec une approximation suffisante

$$\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\delta\operatorname{tg}^2\theta}}\simeq 1+\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\delta\operatorname{tg}^2\theta\simeq 1+\frac{1}{2}\delta^2\operatorname{tg}^2\theta. \qquad (2.7.12)$$

[1]) Voir *H. Dwight* « Tables of Integrals and Other Mathematical Data », 1947.

[2]) Voir *Николаи Е. Л.* « Теория гироскопов » (*E. Nikolaï* « Théorie des gyroscopes »). М.-Л., Гостехиздат, 1948 (en russe).

La formule qui en résulte

$$T = T_0\left(1 + \frac{1}{2}\delta^2 \operatorname{tg}^2\theta\right) \qquad (2.7.13)$$

peut s'obtenir également par une autre voie. Développons en série l'expression à intégrer (2.7.9) et intégrons-la terme à terme. Il vient

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{1-\operatorname{tg}\delta\operatorname{tg}\theta\sin\psi} = \int_0^{2\pi} [1+\operatorname{tg}\delta\operatorname{tg}\theta\sin\psi+ \\ +\operatorname{tg}^2\delta\operatorname{tg}^2\theta\sin^2\psi+\ldots]\,d\psi = 2\pi+\pi\operatorname{tg}^2\delta\operatorname{tg}^2\theta+\ldots \qquad (2.7.14)$$

En ne gardant ici que deux premiers termes du développement et en remplaçant la valeur de tg δ par δ, on est conduit de nouveau à la formule (2.7.13).

Exemple numérique. — Soient $\theta = 45°$ et $\delta = 0{,}07$ ($\simeq 4°$). La formule (2.7.13) donne

$$T = T_0\left(1+\frac{1}{2}\delta^2\operatorname{tg}^2\theta\right) = 1{,}0024T_0,$$

c'est-à-dire que l'erreur de mesure de la période de précession est approximativement égale à 0,25 % par rapport au cas où $\delta = 0$.

Ainsi, pour que le fonctionnement de l'intégrateur gyroscopique soit précis, la valeur de l'angle δ doit être rendue aussi petite que possible.

En opérant de façon identique, on peut déterminer l'erreur de l'appareil dans le cas où le centre de masse du système mécanique « boîtier — rotor » ne se trouve pas sur l'axe de rotation propre du rotor.

BIBLIOGRAPHIE

Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний (*A. Andronov, A. Witt, S. Khaïkine.* Théorie des oscillations). М., Физматгиз, 1959 (en russe).

Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс (*V. Beletski.* Mouvement d'un satellite artificiel par rapport au centre de masse). М., « Наука », 1965 (en russe).

Блюмин Г. Д., Чичинадзе М. В. Условия невозмущаемости однороторного гирокомпаса (*G. Blumine, M. Tchitchinadzé.* Conditions de non-perturbabilité d'un gyrocompas à un rotor). — Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 3 (en russe).

Блюмин Г. Д., Жбанов Ю. К., Кошляков В. Н. Гироскопические компасы (*G. Blumine, You. Zbanov, V. Kochliakov.* Compas gyroscopiques). — Dans le livre: Развитие механики гироскопических и инерциальных систем (Développement de la mécanique des systèmes gyroscopiques et inertiels). М., « Наука », 1973 (en russe).

Богацкая И. Г., Климов Д. М., Слезкин Л. Н. О влиянии овальности элементов подвеса на точность гироскопического интегратора линейных уско-

рений (*I. Bogatskaïa, D. Klimov, L. Slezkine.* Sur l'influence de l'ovalité des éléments de suspension sur la précision d'un intégrateur gyroscopique d'accélérations linéaires). — Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 4 (en russe).
Голубев В. В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки (*V. Goloubev.* Conférences sur l'intégration des équations du mouvement d'un corps solide pesant autour d'un point fixe). М., Гостехиздат, 1953 (en russe).
Ишлинский А. Ю. Механика специальных гироскопических систем (*A. Ishlinsky.* Mécanique des systèmes gyroscopiques spéciaux). Киев, Изд-во АН УССР, 1952 (en russe).
Ишлинский А. Ю. К теории гирогоризонткомпаса (*A. Ishlinsky.* Sur la théorie du gyrohorizon-compas). — ПММ, 1956, т. 20, вып. 4 (en russe).
Ишлинский А. Ю. К теории гироскопического маятника (*A. Ishlinsky.* Sur la théorie du pendule gyroscopique). — ПММ, 1957, т. 21, вып. 1 (en russe).
Ишлинский А. Ю. Теория двухгироскопической вертикали (*A. Ishlinsky.* Théorie de la verticale à deux gyroscopes). — ПММ, 1957, т. 21, вып. 2 (en russe).
Ишлинский А. Ю. К теории сложных систем гироскопической стабилизации (*A. Ishlinsky.* Sur la théorie des systèmes complexes de gyrostabilisation). — ПММ, 1958, т. 22, вып. 3 (en russe).
Ишлинский А. Ю. Полная компенсация внешних возмущений, вызванных маневрированием в гироскопических системах (*A. Ishlinsky.* Compensation complète des perturbations extérieures, provoquées par des manœuvres, dans les systèmes gyroscopiques). — Dans le livre: Теория инвариантности и ее применение в автоматических устройствах (Théorie de l'invariance et ses applications aux dispositifs automatiques). М., 1959 (en russe).
Ишлинский А. Ю. Механика гироскопических систем (*A. Ishlinsky.* Mécanique des systèmes gyroscopiques). М., Изд-во АН СССР, 1963 (en russe).
Ишлинский А. Ю. Инерциальное управление баллистическими ракетами (*A. Ishlinsky.* Guidage par inertie des fusées balistiques). М., « Наука », 1968 (en russe).
Калинович В. Н. О составлении уравнений гироскопических систем (*V. Kalinovitch.* Sur l'établissement des équations des systèmes gyroscopiques). — Dans le livre: Развитие механики гироскопических и инерциальных систем (Développement de la mécanique des systèmes gyroscopiques et inertiels). М., « Наука », 1973 (en russe).
Каргу Л. И. Об ошибках гироскопического интегратора линейных ускорений. (*L. Kargou.* Sur les erreurs d'un intégrateur gyroscopique d'accélérations linéaires). — Изв. высш. учебн. заведений. Приборостроение, 1965, т. 8, № 2 (en russe).
Климов Д. М. Об условиях невозмущаемости гироскопической рамы (*D. Klimov.* Sur les conditions de non-perturbabilité d'une plate-forme gyroscopique). — ПММ, 1964, т. 28, вып. 3 (en russe).
Кондорский И. Д. К теории гиромаятниковых систем (*I. Kondorski.* Sur la théorie des systèmes gyropendulaires). — Изв. АН СССР, МТТ, 1970, № 4 (en russe).
Кошляков В. Н. Об уравнениях Геккелера в теории гирокомпасов (*V. Kochliakov.* Sur les équations de Geckeler dans la théorie des gyrocompas). — ПММ, 1964, т. 28, вып. 4 (en russe).
Кошляков В. Н. Теория гироскопических компасов (*V. Kochliakov.* Théorie des compas gyroscopiques). М., « Наука », 1972 (en russe).
Лунц Я. Л. Ошибки гироскопических приборов (*Ya. Lounts.* Erreurs des appareils gyroscopiques). Л., « Судостроение », 1968 (en russe).
Лунц Я. Л. Введение в теорию гироскопов (*Ya. Lounts.* Introduction à la théorie des gyroscopes). М., « Наука », 1972 (en russe).
Малеев П. И. Новые типы гироскопов (*P. Maléev.* Nouveaux types de gyroscopes). Л., « Судостроение », 1971 (en russe).

Николаи Е. Л. Теория гироскопов (*E. Nicolaï.* Théorie des gyroscopes). Л.-М., Гостехиздат, 1948 (en russe).
Николаи Е. Л. Гироскоп в кардановом подвесе (*E. Nicolaï.* Gyroscope suspendu à la cardan). М., « Наука », 1964 (en russe).
Новожилов И. В. Прецессионные уравнения гироскопических систем с « жестким » управлением по части переменных (*I. Novojilov.* Equations de précession des systèmes gyroscopiques à commande « rigide » d'une partie de variables). — Изв. АН СССР, МТТ, 1971, № 1 (en russe).
Новожилов И. В. О переходе к прецессионным уравнениям гироскопии на бесконечном интервале времени (*I. Novojilov.* Sur le passage aux équations de précession de la gyroscopie sur un intervalle de temps infini). — Изв. АН СССР, МТТ, 1971, № 5 (en russe).
Павлов В. А. Основы проектирования и расчета гироскопических приборов (*V. Pavlov.* Principes de la conception et du calcul des appareils gyroscopiques). Л., « Судостроение », 1967 (en russe).
Пельпор Д. С. Гироскопические приборы и автопилоты (*D. Pelpor.* Appareils gyroscopiques et autopilotes). М., « Машиностроение », 1964 (en russe).
Пельпор Д. С. Гироскопические системы. Ч. 1. Теория гироскопов и гироскопических стабилизаторов (*D. Pelpor.* Systèmes gyroscopiques. Ière partie. Théorie des gyroscopes et des stabilisateurs gyroscopiques). М., « Высш. школа », 1971 (en russe).
Рабинович Ю. И. Поведение гирокомпаса, выполненного в виде двух интеграторов угловой скорости, на качке (*You. Rabinovitch.* Comportement, en roulis et en tangage, d'un gyrocompas réalisé sous forme de deux intégrateurs de vitesse angulaire). — Изв. АН СССР, МТТ, 1969, № 4 (en russe).
Ривкин С. С. Непосредственные гиростабилизаторы (*S. Rivkine.* Gyrostabilisateurs directs). — Dans le livre: История механики гироскопических систем (Histoire de la mécanique des systèmes gyroscopiques). М., « Наука », 1975 (en russe).
Ройтенберг Я. Н. Многогироскопная вертикаль (*Ya. Reutenberg.* Verticale à plusieurs gyroscopes). — ПММ, 1946, т. 10, вып. 1 (en russe).
Ройтенберг Я. Н. Об ускоренном приведении гироскопического компаса в меридиан (*Ya. Reutenberg.* Sur la réduction accélérée du compas gyroscopique au méridien). — ПММ, 1959, т. 23, вып. 5 (en russe).
Ройтенберг Я. Н. К теории гироскопического компаса (*Ya. Reutenberg.* Sur la théorie du compas gyroscopique). — ПММ, 1964, т. 28, вып. 5 (en russe).
Ройтенберг Я. Н. Корректируемый гирогоризонткомпас (*Ya. Reutenberg.* Gyrohorizon-compas à correction). — ПММ, 1965, т. 29, вып. 4 (en russe).
Ройтенберг Я. Н. Гироскопы (*Ya. Reutenberg.* Gyroscopes). М., « Наука », 1966, (en russe).
Ройтенберг Я. Н. Управляемые гироскопические системы (*Ya. Reutenberg.* Systèmes gyroscopiques commandés). — Инж. ж. МТТ, 1968, № 3 (en russe).
Синицин И. Н. К динамике гироскопического интегратора линейных ускорений, установленного на наклонном основании (*I. Sinitsine.* Sur la dynamique d'un intégrateur gyroscopique d'accélérations linéaires placé sur un support incliné). — Инж. ж. МТТ, 1967, № 6 (en russe).
Ткаченко А. И. О показаниях гироскопического интегратора линейных ускорений (*A. Tkatchenko.* Sur les indications d'un intégrateur gyroscopique d'accélérations linéaires). — Инж. ж. МТТ, 1968, № 1 (en russe).
Четаев Н. Г. О гироскопе в кардановом подвесе (*N. Tchétaev.* Sur le gyroscope suspendu à la cardan). — ПММ, 1958, т. 22, вып. 3 (en russe).
Шиф М. А. О компенсации одного вида баллистической девиации гирогоризонткомпаса (*M. Chief.* Sur la compensation d'un type de déviation balistique du gyrohorizon-compas). — Инж. ж. МТТ, 1966, № 4 (en russe).
Euler L. Découverte d'un nouveau principe de mécanique. — Mem. Acad. Roy. sci. Berlin, t. 6 (1750), 1752. Voir aussi *Euler L.* Opera omnia, 1957, ser. 2, vol. 5.

Euler L. Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable. Mem. Acad. Roy. sci. Berlin, t. 14 (1758). 1765. Voir aussi *Euler L.* Opera omnia, 1964, ser. 2. vol. 8.

Cannon R.H. Kinematic drift of single-axis gyroscopes. — J. Appl. Mech., 1958, vol. 25, No. 3.

Christoph P. Die 84-Minuten — Abstimmung beim Kreisel und beim Raumkompass. — Ingr. — Arch., 1958, Bd. 26, H. 4.

Geckeler J. W. Kreiselkompass und Schiffsmanöver. 1, 2. — Ingr. — Arch., 1933, Bd. 4, H. 1, 2.

Geckeler J.W. Kreiselmechanik des Anschütz-Raumkompasses. — Ingr. — Arch., 1935, Bd. 6, H. 4.

Grammel R. Der Kreisel, seine Theorie und seine Anwendungen. Bd. 1-2. Berlin, Springer, 1950.

Ishlinsky A.Yu. On the dynamics of a system of rigid bodies. — In: Theoretical and applied mechanics. (Proc. 13th Int. Congress of theoret. and appl. mech. Moscow University, 1972). Berlin, e. a., Springer-Verlag, 1973.

Klein F., Sommerfeld A. Über die Theorie des Kreisels. H. 1-4, Leipzig-Berlin, Teubner, 1897/1898-1903/1910.

Kreiselprobleme. Symposion Celerina, 1962. Hrsg. H. Ziegler. Berlin, e. a., Springer, 1963.

MacMillan W.D. Dynamics of rigid bodies. N. Y.-L., McGraw-Hill, 1936.

Martienssen O. Die Verwendbarkeit des Rotationkompasses als Ersatz des magnetischen Kompasses. — Phys. Z., 1906, Bd. 7. H. 15.

Roberson R.E. Kinematical equations for bodies whose rotation is described by the Euler-Rodrigues parameter. — AIAA Journal, 1968. vol. 6, No. 5.

Scarborough J.B. The gyroscope. Theory and applications. N. Y.-L., Interscience, 1958.

Schüler M. Der Kreiselkompass unter Einfluss der Schiffschwingungen. — ZAMM, 1922, Bd. 2, H. 4.

Whittaker E.T. Treatise on the analytical dynamics. Cambridge, 1927.

Wrigley W., Hollister W.M., Denhard W.G. Gyroscopic theory, design and instrumentation. Cambridge (Mass) — London, M. I. T., 1969.

CHAPITRE III

THÉORIE DE NUTATION DES GYROSCOPES

§ 1. Gyroscope équilibré. Théorie rigoureuse

Dans la théorie de précession des gyroscopes, on considère que la masse des anneaux de la suspension à la cardan et le moment équatorial d'inertie du rotor sont sans importance et on les pose égaux à zéro (v. plus haut chap. II, § 1). De ce fait, le système d'équations décrivant le mouvement de l'axe du rotor d'un gyroscope suspendu à la cardan est, même dans le cas le plus général, seulement du quatrième ordre. Ces équations dites de précession décrivent assez bien le changement d'orientation de l'axe du gyroscope dans le cas des mouvements angulaires lents de son support et de la variation continue des forces qui s'exercent sur le gyroscope. Dans ce cas, on a en vue que le centre de gravité du rotor se situe exactement sur l'axe de sa rotation propre; on suppose également que cet axe est à la fois l'axe de symétrie dynamique du rotor. Mais les équations de précession ne permettent pas de décrire les oscillations (nutations) de l'axe d'un gyroscope suspendu à la cardan, qui prennent naissance, par exemple, après un choc subi par l'un des anneaux de cardan ou en cas d'une brusque variation des forces appliquées au gyroscope.

Signalons une circonstance importante. Supposons que dans les axes de la suspension du gyroscope il n'y a pas de frottement, que les anneaux de cardan et le rotor ne sont soumis à aucune force extérieure et que le gyroscope est équilibré, c'est-à-dire que le centre de masse commun au rotor et à l'anneau de cardan intérieur coïncide avec le centre géométrique de la suspension à la cardan et que de plus le centre de masse de l'anneau extérieur se situe sur son axe. Dans ce cas, suivant les équations de la théorie de précession, l'axe de rotation propre du gyroscope doit conserver son orientation par rapport aux étoiles fixes indépendamment de ce que le support du gyroscope soit immobile ou animé d'un mouvement arbitraire (pourvu que l'axe du rotor ne soit pas amené en coïncidence avec l'axe de l'anneau de cardan extérieur). Or, l'analyse des équations dites complètes (ou de nutation) du gyroscope qui tiennent compte des masses des anneaux de cardan et du moment d'inertie équatorial du rotor, montre qu'une telle conclusion n'est justifiée qu'approximativement. En réalité, dans le cas d'une nutation (vibration angulaire) du gyroscope ou des

oscillations angulaires de son support, la direction moyenne de l'axe de rotation propre du rotor s'écarte systématiquement de sa position de départ, malgré l'absence totale du frottement dans les axes de la suspension à la cardan. Ainsi, le déplacement continu de la direction moyenne de l'axe vibrant du rotor représente une dérive du gyroscope, qui est inexplicable au point de vue de la théorie de précession. Le même phénomène de dérive se manifeste lorsque l'axe du rotor ne coïncide pas avec l'axe de symétrie dynamique, c'est-à-dire dans le cas d'un déséquilibre dynamique du rotor.

Le présent paragraphe est destiné à étudier, en partant des équations complètes (équations de nutation), le comportement d'un gyroscope équilibré décrit plus haut, placé sur un support fixe, dans le cas où les axes de sa suspension à la cardan tournent sans frottement et aucune force extérieure ne s'applique ni aux anneaux de cardan, ni au rotor. Un tel gyroscope sera considéré comme un ensemble de trois corps solides parfaits: le rotor, l'anneau de cardan intérieur et l'anneau de cardan extérieur, qui sont reliés entre eux et au support par des articulations parfaites. Nous supposerons également que les axes des articulations sont les axes d'inertie principaux des anneaux correspondants.

On peut indiquer plusieurs méthodes permettant d'établir les équations différentielles du mouvement d'un gyroscope suspendu à la cardan et considéré comme un ensemble de trois corps solides. L'une d'elles consiste à obtenir les équations différentielles d'Euler pour chacun des corps constitutifs mentionnés et à exclure ensuite les forces de leur interaction (réactions normales des paliers), en appliquant la troisième loi de Newton (une telle méthode a été utilisée en partie au chap. II, § 3). Dans une autre méthode, décrite au chap. II, § 5, on établit successivement les relations exprimant les variations de la projection, sur un axe convenablement choisi, du moment cinétique du rotor lui-même, puis de l'ensemble du rotor et de l'anneau de cardan intérieur et enfin, de tout l'ensemble des corps comprenant le rotor, et les anneaux de cardan intérieur et extérieur. La méthode qui sera appliquée ici a un caractère un peu plus formel mais elle mène au but en quelque sorte automatiquement. Elle consiste à établir les équations de Lagrange de deuxième espèce.

Commençons par introduire, comme nous l'avons fait au chap. II, § 1, quatre systèmes de coordonnées suivants: $\xi\eta\zeta$ lié dans ce cas au support immobile du gyroscope, $x_2y_2z_2$ lié à son anneau de cardan extérieur, $x_1y_1z_1$ lié à l'anneau de cardan intérieur et enfin, xyz lié au rotor de gyroscope (fig. 45). Soit x_2, comme précédemment, l'axe de rotation de l'anneau de cardan extérieur par rapport au support, qui se confond avec l'axe ξ lié à ce dernier. Si α désigne l'angle de rotation de l'anneau extérieur par rapport au support (fig. 50) et A_2 son moment d'inertie par rapport à l'axe x_2 (ξ), l'énergie cinétique de cet anneau sera donnée dans le cas d'un support immobile par la

formule

$$T_2=\frac{1}{2}A_2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2. \qquad (3.1.1)$$

Dirigeons l'axe y_1 suivant l'axe de l'anneau de cardan intérieur et faisons coïncider avec lui l'axe y_2 du système de coordonnées $x_2y_2z_2$ attaché à l'anneau extérieur. Puis, désignons par β l'angle de rotation de l'anneau de cardan intérieur par rapport à l'anneau extérieur (v. fig. 51). Montrons que l'énergie cinétique de l'anneau intérieur s'exprime par la formule

$$T_1=\frac{1}{2}\left[A_1\left(\frac{d\alpha}{dt}\cos\beta\right)^2+B_1\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2+C_1\left(\frac{d\alpha}{dt}\sin\beta\right)^2\right] \qquad (3.1.2)$$

dans laquelle A_1, B_1 et C_1 sont les moments d'inertie principaux de cet anneau, c'est-à-dire les moments d'inertie par rapport aux axes respectifs x_1, y_1 et z_1.

En effet, la vitesse angulaire de l'anneau intérieur vaut la somme géométrique de la vitesse angulaire $d\alpha/dt$ de l'anneau extérieur dirigée suivant l'axe x_2 et de la vitesse angulaire (relative) $d\beta/dt$ de l'anneau intérieur par rapport à l'anneau extérieur (v. fig. 51). Cette dernière est dirigée suivant l'axe y_1 (y_2). L'angle des axes x_2 et x_1 (et, bien entendu, des axes z_2 et z_1) est égal à β. De ce fait, les quantités

$$p_1=\frac{d\alpha}{dt}\cos\beta, \quad q_1=\frac{d\beta}{dt}, \quad r_1=\frac{d\alpha}{dt}\sin\beta \qquad (3.1.3)$$

sont les projections de la vitesse angulaire de l'anneau de cardan intérieur respectivement sur ses axes d'inertie principaux x_1, y_1 et z_1. Si on les introduit dans la formule

$$T_1=\frac{1}{2}(A_1p_1^2+B_1q_1^2+C_1r_1^2) \qquad (3.1.4)$$

donnant l'énergie cinétique d'un corps solide en mouvement autour d'un point fixe (autour de l'origine du système de coordonnées $x_1y_1z_1$), on est conduit à l'expression (3.1.2).

Pour calculer l'énergie cinétique du rotor, on peut utiliser le même système de coordonnées $x_1y_1z_1$. Sans restreindre la généralité des raisonnements, admettons qu'à l'instant considéré les axes x et y du système xyz lié au rotor coïncident respectivement avec les axes x_1 et y_1. La vitesse angulaire (relative) du rotor par rapport à l'anneau de cardan intérieur est dirigée suivant l'axe z qui se confond en permanence avec l'axe z_1. Les projections de la vitesse angulaire du rotor sur les axes du système de coordonnées $x_1y_1z_1$ s'expriment donc par

$$p=\frac{d\alpha}{dt}\cos\beta, \quad q=\frac{d\beta}{dt}, \quad r=\frac{d\alpha}{dt}\sin\beta+\frac{d\gamma}{dt}, \qquad (3.1.5)$$

on γ est l'angle de rotation du rotor de gyroscope par rapport à l'anneau de cardan intérieur.

En faisant usage d'une formule analogue à (3.1.4), on obtient pour l'énergie cinétique du rotor l'expression suivante:

$$T_0 = \frac{1}{2}\left\{A\left[\left(\frac{d\alpha}{dt}\cos\beta\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2\right] + \right.$$
$$\left. + C\left(\frac{d\alpha}{dt}\sin\beta + \frac{d\gamma}{dt}\right)^2\right\}. \qquad (3.1.6)$$

Ici, A et C sont respectivement les moments d'inertie équatorial et polaire du rotor.

L'énergie cinétique totale de l'ensemble mécanique sera désignée par T. Il est évident que

$$T = T_2 + T_1 + T_0. \qquad (3.1.7)$$

En introduisant dans cette égalité les expressions (3.1.1), (3.1.2) et (3.1.6), on obtient la formule

$$T = \frac{1}{2}\left\{[A_2 + (A_1 + A)\cos^2\beta + C_1\sin^2\beta]\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + (B_1 + A)\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 + C\left(\frac{d\alpha}{dt}\sin\beta + \frac{d\gamma}{dt}\right)^2\right\} \qquad (3.1.8)$$

qui peut se mettre sous une forme plus compacte suivante:

$$T = \frac{1}{2}\left[J(\beta)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \Theta\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 + C\left(\frac{d\alpha}{dt}\sin\beta + \frac{d\gamma}{dt}\right)^2\right]. \qquad (3.1.9)$$

Les nouvelles désignations

$$J(\beta) = A_2 + (A_1 + A)\cos^2\beta + C_1\sin^2\beta, \qquad (3.1.10)$$
$$\Theta = B_1 + A \qquad (3.1.11)$$

introduites dans la formule (3.1.9) ont un sens mécanique bien simple. A savoir, la fonction $J(\beta)$ sans monôme $A\cos^2\beta$ représente la valeur courante du moment d'inertie total des anneaux de cardan extérieur et intérieur, par rapport à l'axe x_2 de rotation de l'anneau extérieur par rapport au support ou, ce qui revient au même, par rapport à l'axe ξ du système de coordonnées $\xi\eta\zeta$ lié au support. A son tour, la constante Θ est égale à la somme des moments d'inertie du rotor et de l'anneau intérieur, par rapport au même axe y_1 confondu avec l'axe y_2. C'est autour de ces axes confondus que l'anneau intérieur peut tourner avec le rotor (qui tourne de plus autour de son propre axe) par rapport à l'anneau de cardan extérieur.

Les angles α, β et γ sont les coordonnées généralisées de l'ensemble mécanique considéré de trois corps solides liés l'un à l'autre par des liaisons holonomes (ou plus exactement, scléronomes). On sait que les équations de Lagrange de seconde espèce pour de tels systè-

mes revêtent la forme suivante:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_k}=Q_k, \quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \qquad (3.1.12)$$

où n est le nombre de degrés de liberté égal, dans le cas considéré, à trois.

Les forces généralisées Q_k figurant dans les équations (3.1.12) doivent être considérées, dans les hypothèses adoptées plus haut, comme absentes. Ceci étant, les coordonnées généralisées q_k ont pour valeurs respectives

$$q_1=\alpha, \quad q_2=\beta, \quad q_3=\gamma, \qquad (3.1.13)$$

et, bien entendu,

$$\dot{q}_1=\frac{d\alpha}{dt}, \quad \dot{q}_2=\frac{d\beta}{dt}, \quad \dot{q}_3=\frac{d\gamma}{dt}. \qquad (3.1.14)$$

Remplaçons maintenant dans les équations de Lagrange (3.1.12) l'énergie cinétique T par son expression (3.1.9) et tenons compte des formules (3.1.13) et (3.1.14). Il s'ensuit trois équations différentielles du deuxième ordre

$$\frac{d}{dt}\left[J(\beta)\frac{d\alpha}{dt}+C\left(\frac{d\alpha}{dt}\sin\beta+\frac{d\gamma}{dt}\right)\sin\beta\right]=0,$$
$$\Theta\frac{d^2\beta}{dt^2}-\frac{1}{2}J'(\beta)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2-C\left(\frac{d\alpha}{dt}\sin\beta+\frac{d\gamma}{dt}\right)\frac{d\alpha}{dt}\cos\beta=0,$$
$$\frac{d}{dt}\left[C\left(\frac{d\alpha}{dt}\sin\beta+\frac{d\gamma}{dt}\right)\right]=0$$
$$(3.1.15)$$

par rapport à trois fonctions cherchées α, β et γ. Ici, $J'(\beta)$ est la dérivée par rapport à l'angle β de la fonction $J(\beta)$ introduite conformément à la désignation (3.1.10).

Le système d'équations (3.1.15) admet une solution particulière évidente

$$\alpha=\alpha_0, \quad \beta=\beta_0, \quad \gamma=\gamma_0+nt, \qquad (3.1.16)$$

où α_0, β_0, γ_0 et n sont des constantes arbitraires. Le mouvement du gyroscope suspendu à la cardan, décrit par la solution (3.1.16), est dit stationnaire [1]).

[1]) On peut indiquer encore une solution particulière: $\alpha=\alpha_0+\dot{\alpha}_0 t$, $\beta=\beta_0$, $\gamma=\gamma_0+nt$ qui correspond à un autre mouvement stationnaire. Pourtant, cette solution ne satisfait identiquement au système d'équations différentielles (3.1.15) que si les constantes $\dot{\alpha}_0$, β_0 et n sont liées par la relation $\frac{1}{2}J'(\beta_0)\dot{\alpha}_0+H\cos\beta_0=0$, où $H=C(\dot{\alpha}_0\sin\beta_0+n)$. A cette solution

A la solution (3.1.16) correspond une rotation uniforme du rotor autour de l'axe z ou, ce qui revient au même, autour de l'axe z_1 qui ne change pas sa direction par rapport au système de coordonnées fixe $\xi\eta\zeta$. L'orientation des anneaux de cardan reste, elle aussi, inchangée.

Les coordonnées α et γ étant cycliques, la troisième et la première des équations (3.1.15) admettent les intégrales premières évidentes suivantes:

$$C\left(\frac{d\alpha}{dt}\sin\beta+\frac{d\gamma}{dt}\right)=H \tag{3.1.17}$$

et

$$J(\beta)\frac{d\alpha}{dt}+C\left(\frac{d\alpha}{dt}\sin\beta+\frac{d\gamma}{dt}\right)\sin\beta=G. \tag{3.1.18}$$

Ici, H et G sont des constantes dont les valeurs se déterminent par les conditions initiales du mouvement du gyroscope suspendu à la cardan, à savoir par les valeurs de l'angle β et des dérivées des angles α et γ par rapport au temps, à l'instant initial $t = t_0$.

L'intégrale première (3.1.17) coïncide avec une intégrale analogue des équations du mouvement du corps solide autour d'un point fixe dans le cas dit de Lagrange-Poisson. La constante H de cette intégrale sera appelée *moment cinétique propre du rotor* dans le système de coordonnées fixe $\xi\eta\zeta$ (v. chap. II, § 1 du présent livre).

Le premier membre de l'autre intégrale première, c'est-à-dire de l'intégrale (3.1.18), a un sens mécanique bien simple. Il représente le moment cinétique de tout l'ensemble mécanique (rotor et les deux anneaux de cardan) par rapport à l'axe x_2 qui coïncide avec l'axe ξ du système de coordonnées fixe $\xi\eta\zeta$. Le frottement dans les paliers de cet axe étant nul par hypothèse, il s'ensuit, en vertu du théorème général de dynamique sur le moment cinétique, que la grandeur G intervenant dans l'égalité (3.1.18) a une valeur constante. Ceci signifie que l'intégrale première (3.1.18) peut s'obtenir sans procéder à l'établissement des équations différentielles (3.1.15).

L'absence de frottement dans les articulations et l'absence de forces autres que les réactions normales dans les mêmes articulations prédéterminent l'existence d'une autre intégrale première du système d'équations différentielles (3.1.15), à savoir de l'intégrale de conservation de l'énergie de l'ensemble mécanique. Comme cette dernière est représentée dans le cas considéré par la seule énergie cinétique T,

---

correspond la rotation de l'anneau de cardan extérieur à une vitesse angulaire $\dot{\alpha}_0$ constante, l'angle des deux anneaux de cardan restant inchangé. Pour les questions examinées au cours du chapitre actuel, cette solution ne présente aucun intérêt.

on obtient, en tenant compte de la formule (3.1.9),

$$\frac{1}{2}\left[J(\beta)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2+\Theta\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2+C\left(\frac{d\alpha}{dt}\sin\beta+\frac{d\gamma}{dt}\right)^2\right]=h, \quad (3.1.19)$$

où h est une constante.

L'intégrale première (3.1.19) peut, bien entendu, s'obtenir directement à partir des équations (3.1.15). A cet effet, il suffit d'additionner les premiers membres de ces équations, multipliés au préalable respectivement par $d\alpha/dt$, $d\beta/dt$ et $d\gamma/dt$, et de remarquer que la somme ainsi obtenue est la dérivée totale par rapport au temps du premier membre de l'égalité (3.1.19).

Les intégrales premières (3.1.17), (3.1.18) et (3.1.19), de même que les équations (3.1.15), constituent un système de trois équations différentielles, mais déjà du premier ordre par rapport aux mêmes fonctions cherchées α, β et γ.

En utilisant l'intégrale (3.1.17), on peut mettre les intégrales (3.1.18) et (3.1.19) sous la forme

$$J(\beta)\frac{d\alpha}{dt}+H\sin\beta=G \quad (3.1.20)$$

et

$$J(\beta)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2+\Theta\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2=E, \quad (3.1.21)$$

où E est une constante dont la valeur s'exprime aisément par celles de h et H.

D'après la relation (3.1.20), on a

$$\frac{d\alpha}{dt}=\frac{G-H\sin\beta}{J(\beta)}. \quad (3.1.22)$$

En introduisant le second membre de la dernière égalité dans l'intégrale de l'énergie (3.1.21) au lieu de la dérivée de l'angle α par rapport au temps, on est conduit à l'équation différentielle

$$\frac{(G-H\sin\beta)^2}{J(\beta)}+\Theta\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2=E \quad (3.1.23)$$

qui ne fait intervenir que la seule fonction inconnue $\beta=\beta(t)$. On en tire

$$\frac{d\beta}{dt}=\pm\sqrt{\frac{1}{\Theta}\left[E-\frac{(G-H\sin\beta)^2}{J(\beta)}\right]}, \quad (3.1.24)$$

si bien que la recherche de la fonction $\beta(t)$ se ramène à l'inversion de l'intégrale hyperelliptique

$$t-t_0=\pm\int_{\beta_0}^{\beta}\frac{\sqrt{\Theta J(\beta)}\,d\beta}{\sqrt{EJ(\beta)-(G-H\sin\beta)^2}} \quad (3.1.25)$$

dans laquelle la fonction $J(\beta)$ est encore donnée par la formule (3.1.10), et β_0 est la valeur de l'angle β à l'instant initial $t = t_0$.

L'intégrale (3.1.25) se transforme en une intégrale elliptique de première espèce dans les cas où la fonction $J(\beta)$ se réduit à une quantité constante

$$M = A_2 + C_1. \tag{3.1.26}$$

Suivant la formule (3.1.10), ceci a lieu lorsqu'est satisfaite la condition

$$K = C_1 - A_1 - A = 0 \tag{3.1.27}$$

qui lie les moments d'inertie A_1 et C_1 de l'anneau de cardan intérieur au moment d'inertie équatorial A du rotor.

La recherche des fonctions α et γ, c'est-à-dire de deux autres coordonnées généralisées du système (3.1.15), se ramène, dans le cas général, en vertu des relations (3.1.22) et (3.1.17), à l'intégration des fonctions hyperelliptiques, ce qui représente, dans un énoncé rigoureux, un problème difficile. Dans le cas particulier mentionné plus haut, où est vérifiée l'égalité (3.1.27), les fonctions hyperelliptiques se réduisent aux fonctions elliptiques, si bien que les quadratures correspondantes se trouvent simplifiées [1]). Pourtant, des conclusions importantes sur les particularités du mouvement du gyroscope suspendu à la cardan peuvent être faites sans effectuer les intégrations mentionnées. A cet effet, nous utiliserons, au cours de trois paragraphes qui suivent, les méthodes d'étude à l'aide du plan de phase, ainsi que certaines autres méthodes approchées de caractère analytique qui se sont avérées dignes de foi.

§ 2. Etude du mouvement d'un gyroscope dans le plan de phase

La mise en évidence de toutes les circonstances caractérisant le mouvement d'un gyroscope suspendu à la cardan (v. fig. 45) se ramène à l'étude de la solution générale d'un système de trois équations différentielles du deuxième ordre par rapport aux angles α, β et γ, quelles que soient les conditions initiales données, c'est-à-dire les valeurs des angles énumérés et de leurs dérivées premières par rapport au temps, à l'instant initial du mouvement. Au cours du paragraphe précédent, de telles équations différentielles, à savoir les équations (3.1.15), ont été établies. Elles se rapportaient au cas où le support du gyroscope était immobile, dans les axes de sa suspension il n'y

[1]) Voir, par exemple, *Климов Д. М.*, *Степаненко Н. П.* « Об интегрировании уравнений движения гироскопа в кардановом подвесе » (*D. Klimov*, *N. Stépanenko* « Sur l'intégration des équations du mouvement d'un gyroscope suspendu à la cardan »).— Инж. ж. МТТ, 1967, № 6 (en russe).

avait pas de frottement, le gyroscope était équilibré (le centre de gravité de l'anneau de cardan extérieur se situait sur son axe et le centre de gravité de l'ensemble « anneau intérieur — rotor » se trouvait au centre de la suspension à la cardan). De plus, le rotor était supposé symétrique par rapport à son axe de rotation qui constituait avec l'axe de l'anneau intérieur, l'axe principal pour l'ellipsoïde d'inertie de cet anneau. Il a été également donné la solution particulière la plus simple (3.1.16) des équations (3.1.15) mentionnées. Conformément à cette solution, l'angle α qui détermine la position de l'anneau extérieur par rapport au support fixe, et l'angle β que font entre eux les axes des anneaux intérieur et extérieur de la suspension à la cardan, sont des constantes égales à α_0 et β_0, alors que l'angle γ de rotation du rotor par rapport à l'anneau intérieur est une fonction linéaire du temps $\gamma_0 + \dot{\gamma}_0 t$.

La solution (3.1.16) correspond à la rotation du rotor avec une vitesse angulaire constante autour de son propre axe qui conserve inchangée sa direction par rapport au système de coordonnées « absolument » fixe $\xi\eta\zeta$ (v. chap. I, § 1) ou, ce qui revient au même dans le cas considéré, par rapport au support du gyroscope. Il n'est pas difficile de se convaincre que pour réaliser un tel mouvement stationnaire il est nécessaire que soient satisfaites les conditions initiales suivantes. A savoir, à l'instant initial $t = t_0$, doivent être vérifiées les égalités

$$\alpha = \alpha_0, \qquad \beta = \beta_0, \qquad \gamma = \gamma_0,$$
$$\frac{d\alpha}{dt} = 0, \qquad \frac{d\beta}{dt} = 0, \qquad \frac{d\gamma}{dt} = \dot{\gamma}_0. \tag{3.2.1}$$

Passons maintenant à l'étude du mouvement du gyroscope suspendu à la cardan, pour des conditions initiales quelconques. Remarquons tout d'abord que dans le problème étudié les coordonnées α et γ sont cycliques (elles n'interviennent dans les équations du mouvement que par leurs dérivées) et que leurs valeurs initiales α_0 et γ_0 sont donc sans importance pour l'étude du mouvement. Ainsi, dans le cas général, le caractère du mouvement du gyroscope suspendu à la cardan que nous examinons n'est déterminé que par la donnée de quatre conditions initiales, soit

$$\frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha}_0, \quad \beta = \beta_0, \quad \frac{d\beta}{dt} = \dot{\beta}_0, \quad \frac{d\gamma}{dt} = \dot{\gamma}_0. \tag{3.2.2}$$

Au lieu de la dernière des conditions initiales (3.2.2), il semble plus naturel de se donner la valeur du moment cinétique propre du rotor

$$H = C\,(\dot{\alpha}_0 \sin\beta_0 + \dot{\gamma}_0), \tag{3.2.3}$$

vu que d'après ce qui a été établi au paragraphe précédent, ce moment reste inchangé pendant toute la durée du mouvement (il constitue l'une des intégrales premières des équations différentielles). Connais-

sant H et les valeurs initiales $\dot{\alpha}_0$ et β_0, il est aisé de trouver la valeur initiale $\dot{\gamma}_0$ de la vitesse angulaire propre du rotor.

Par la suite, la valeur du moment cinétique propre H est prise la même pour toutes les sous-classes considérées de mouvements du gyroscope suspendu à la cardan. Le caractère du mouvement ne sera donc étudié qu'en fonction de trois valeurs initiales: $\dot{\alpha}_0$, β_0 et $\dot{\beta}_0$.

Nous allons restreindre l'analyse des mouvements du gyroscope suspendu à la cardan, en les étudiant d'abord au voisinage du mouvement stationnaire, décrit plus haut, auquel correspondent les valeurs nulles de $\dot{\alpha}_0$ et $\dot{\beta}_0$. Il sera montré plus loin que pour de tels mouvements il existe des instants où la vitesse angulaire $d\alpha/dt$ de l'anneau de cardan extérieur s'annule (v. aussi § 3 du présent chapitre). Ces mouvements sont du type des nutations au cours desquelles l'axe du rotor de gyroscope effectue de petits mouvements autour d'une certaine direction (dans le cas général, lentement variable). Soit t_* un des instants mentionnés. Prenons-le pour instant initial. Dans ce cas, les conditions initiales pour les mouvements indiqués sont:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha}_* = 0, \quad \beta = \beta_*, \quad \frac{d\beta}{dt} = \dot{\beta}_*. \tag{3.2.4}$$

Ainsi, il ne reste que deux paramètres initiaux substantiels: β_* et $\dot{\beta}_*$ (et, bien entendu, encore la valeur du moment cinétique propre H) qui déterminent tous les mouvements possibles du gyroscope suspendu à la cardan, dans le cas où son anneau extérieur présente des arrêts instantanés au cours de son mouvement.

Au lieu de la condition initiale $\dot{\beta}_*$, il est plus commode de se donner la valeur de la constante E figurant dans l'intégrale de l'énergie (3.1.21)

$$J(\beta)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \Theta\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 = E \tag{3.2.5}$$

obtenue au paragraphe précédent et constituant, de même que la relation (3.2.3), l'une des intégrales premières des équations différentielles (3.1.15) du mouvement du gyroscope. En effet, à l'instant $t = t_*$ les égalités (3.2.4) et (3.2.5) donnent

$$\Theta\dot{\beta}_*^2 = E. \tag{3.2.6}$$

D'après ce qui a été établi au paragraphe précédent, les équations différentielles (3.1.15) comportent, en plus des intégrales (3.2.3) et (3.2.5), encore une intégrale première (3.1.20), soit

$$J(\beta)\frac{d\alpha}{dt} + H\sin\beta = G. \tag{3.2.7}$$

Comme il a déjà été expliqué, la constante G représente ici la projection, sur l'axe x_2 (ξ) de l'anneau extérieur, de la somme géométrique des moments cinétiques de tous les corps solides constituant le gyro-

scope suspendu à la cardan ou, ce qui revient au même, la projection du moment cinétique principal de l'ensemble mécanique « anneau extérieur — anneau intérieur — rotor ». En portant dans l'égalité (3.2.7) les conditions initiales (3.2.4), on obtient

$$H \sin \beta_* = G. \tag{3.2.8}$$

Maintenant, utilisons de nouveau l'intégrale première (3.2.7), ce qui donne la formule suivante pour la vitesse angulaire de l'anneau de cardan extérieur du gyroscope:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{H(\sin \beta_* - \sin \beta)}{J(\beta)}. \tag{3.2.9}$$

Si l'expression qui vient d'être obtenue pour la vitesse angulaire $d\alpha/dt$ est introduite dans le premier membre de l'intégrale de l'énergie (3.2.5), il se forme une équation différentielle du premier ordre

$$\frac{H^2(\sin \beta - \sin \beta_*)^2}{J(\beta)} + \Theta\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 = E \tag{3.2.10}$$

par rapport à la fonction du temps $\beta = \beta(t)$. Elle coïncide avec l'équation (3.1.23) du paragraphe précédent si l'on tient compte de l'égalité (3.2.8).

D'après sa relation de définition (3.1.10) obtenue au paragraphe précédent, la fonction $J(\beta)$ est positive, quelle que soit la valeur de l'angle β. Par conséquent, si la constante E est nulle, on tire de l'équation (3.2.10) les identités

$$\beta = \beta_*, \quad \frac{d\beta}{dt} = 0. \tag{3.2.11}$$

Par ailleurs, la formule (3.2.9) implique dans ce cas

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0. \tag{3.2.12}$$

Les identités (3.2.11) et (3.2.12) signifient que les deux anneaux de cardan sont immobiles. Ainsi, lorsque la constante E s'annule, on est en présence du mouvement stationnaire du gyroscope auquel correspond la solution (3.1.16) examinée au paragraphe précédent.

Il est évident qu'en vertu de la même équation (3.2.10), lorsque les valeurs de la constante E sont petites, l'angle β ne doit différer que très peu de sa valeur initiale β_* et que la vitesse angulaire $d\beta/dt$ de l'anneau intérieur par rapport à l'anneau extérieur doit être voisine de zéro. A son tour, suivant la formule (3.2.9), la vitesse angulaire $d\alpha/dt$ de l'anneau extérieur doit être, elle aussi, petite.

Envisageons maintenant l'équation (3.2.10) au point de vue géométrique, c'est-à-dire comme équation d'une famille de courbes dans le plan de coordonnées β et v, soit:

$$\frac{H^2(\sin \beta - \sin \beta_*)^2}{J(\beta)} + \Theta v^2 = E. \tag{3.2.13}$$

Dans ce cas, on a évidemment

$$v = \frac{d\beta}{dt}. \qquad (3.2.14)$$

A chaque valeur de la constante E correspond une courbe que l'on appelle généralement *trajectoire de phase*. Certaines de telles trajectoires sont représentées à la figure 88. Leurs propriétés caractéristiques sont analysées ci-dessous. Il résulte de l'équation (3.2.13) que, dans le cas considéré, toutes les trajectoires de phase sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses $v = 0$. Les points appartenant à une

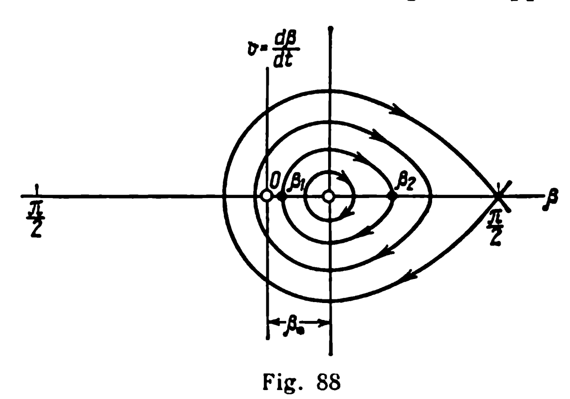


Fig. 88

trajectoire de phase sont dits *représentatifs*; leurs coordonnées β et v sont fonctions du temps. Chacun des points représentatifs se déplace, suivant sa trajectoire, de gauche à droite dans la partie supérieure du plan de phase, et de droite à gauche dans la partie inférieure. En effet, dans le premier cas, $v > 0$ et donc, en vertu de l'égalité (3.2.14), l'angle β doit croître, alors que dans le second cas, c'est le contraire qui a lieu.

Supposons que la constante E figurant dans l'équation (3.2.13) diminue et finit par s'annuler. Alors les trajectoires de phase correspondant aux valeurs décroissantes de cette constante tendent vers le point $(\beta_*, 0)$ de l'axe des abscisses, lequel, comme nous venons de constater, correspond au mouvement stationnaire du gyroscope.

Pour de faibles valeurs de la constante E, les trajectoires de phase (3.2.13) sont des courbes fermées (v. fig. 88). Comme il sera montré plus loin, chacune d'elles coupe deux fois, à angle droit, l'axe des abscisses $v = 0$.

Pour trouver les coordonnées des points d'intersection d'une trajectoire de phase avec l'axe des abscisses, il convient de poser $v = 0$ dans l'équation (3.2.13). Il en résulte l'équation trigonométrique

$$\frac{H^2 (\sin\beta - \sin\beta_*)^2}{J(\beta)} = E. \qquad (3.2.15)$$

Pour $E = 0$, cette équation a dans l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$ une racine double $\beta_1 = \beta_2 = \beta_*$. Pour de faibles valeurs de la constante E, l'équation possède dans le même intervalle deux racines proches l'une de l'autre: $\beta = \beta_1$ et $\beta = \beta_2$. L'une d'elles est inférieure et l'autre, supérieure à β_*. En effet, la formule (3.1.10) du paragraphe précédent permet de mettre la fonction $J(\beta)$ sous la forme suivante:

$$J(\beta) = A_2 + A_1 + A + (C_1 - A_1 - A) \sin^2 \beta, \tag{3.2.16}$$

ce qui signifie que par rapport à la valeur de $\sin \beta$ l'équation (3.2.15) est une équation du second degré. Les racines de cette équation sont données par la formule

$$\sin \beta_{2,1} = \frac{\sin \beta_* \pm \sqrt{\varepsilon (1 + \varkappa \sin^2 \beta_*) - \varepsilon^2 \varkappa}}{1 - \varepsilon \varkappa}, \tag{3.2.17}$$

où

$$\varepsilon = (A_2 + A_1 + A) E/H^2, \qquad \varkappa = (C_1 - A_1 - A)/(A_2 + A_1 + A).$$

Cette formule montre que pour de faibles valeurs de E ou, ce qui revient au même, pour de petits ε, les deux racines sont voisines de la valeur de $\sin \beta_*$, ainsi que l'une de l'autre. Ceci étant, le numérateur de la formule (3.2.17) diffère de $\sin \beta_*$ par une quantité de l'ordre de $\sqrt{\varepsilon}$, alors que le dénominateur diffère de l'unité par une quantité d'un ordre plus élevé, à savoir de l'ordre de ε. Ainsi, pour de faibles valeurs de ε (ou, ce qui revient au même, de E) on a

$$\sin \beta_2 > \sin \beta_* > \sin \beta_1 \tag{3.2.18}$$

et donc la valeur de β_* est située dans l'intervalle $]\beta_1, \beta_2[$.

Augmentons maintenant de façon progressive la constante E de l'équation (3.2.13), en supposant pour fixer les idées que l'angle β_* se trouve dans l'intervalle $]0, \pi/2[$. Une telle supposition ne restreint pas la généralité des raisonnements qui vont être développés, parce que le sens dans lequel est compté l'angle β n'est déterminé que par le choix de l'orientation de l'axe ξ (x_2) confondu avec l'axe de l'anneau de cardan extérieur (v. fig. 45 et 51). Pour une valeur de la constante E, la plus grande des racines de l'équation trigonométrique (3.2.15) atteint nécessairement sa valeur critique égale à $\pi/2$. Portons cette valeur dans l'équation (3.2.15), il vient

$$\frac{H^2 (1 - \sin \beta_*)^2}{J(\pi/2)} = E_s, \tag{3.2.19}$$

où E_s est la valeur de la constante E pour la trajectoire de phase passant par le point $(\pi/2, 0)$.

Il est évident que pour trouver l'autre racine il faut résoudre, par rapport à $\sin \beta$, l'équation

$$\frac{(\sin \beta - \sin \beta_*)^2}{J(\beta)} = \frac{(1 - \sin \beta_*)^2}{A_2 + C_1} \tag{3.2.20}$$

qui s'obtient à partir de l'équation (3.2.15) si l'on y remplace la constante E par sa valeur particulière E_s définie par la formule (3.2.19), et qu'on utilise la formule (3.2.16) pour rechercher la valeur de $J(\pi/2)$. L'équation (3.2.20) peut se mettre sous la forme suivante :

$$(1 - \sin\beta)[(A_2 + C_1)(1 + \sin\beta - 2\sin\beta_*) - \\ - (C_1 - A_1 - A)(1 + \sin\beta)(1 - \sin\beta_*)^2] = 0. \qquad (3.2.21)$$

En rejetant la racine déjà connue $\sin\beta_2 = 1$ de cette équation, on obtient pour la deuxième racine la valeur suivante

$$\sin\beta_1 = -1 + \frac{2(A_2 + C_1)\sin\beta_*}{A_2 + (A_1 + A)(1 - \sin\beta_*)^2 + C_1 - C_1(1 - \sin\beta_*)^2}. \qquad (3.2.22)$$

Lorsque les valeurs de l'angle β_* sont positives, inférieures ou égales à $\pi/2$, le dénominateur de la fraction au second membre de la dernière égalité est strictement positif, car il vaut la somme d'une quantité strictement positive A_2 et de deux quantités positives : $(A_1 + A) \times \times (1 - \sin\beta_*)^2$ et $C_1 - C_1(1 - \sin\beta_*)^2$. Le second membre de l'égalité (3.2.22) représente donc une fonction continue de l'angle β_*. Par ailleurs, suivant cette égalité, l'angle β_1 prend les valeurs : $\pi/2$ pour $\beta_* = \pi/2$, et $-\pi/2$ pour $\beta_* = 0$. En raison de la continuité sus-indiquée, lorsque l'angle β_* varie de 0 à $\pi/2$, l'angle β_1 doit prendre (au moins une fois) toutes les valeurs dans l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$.

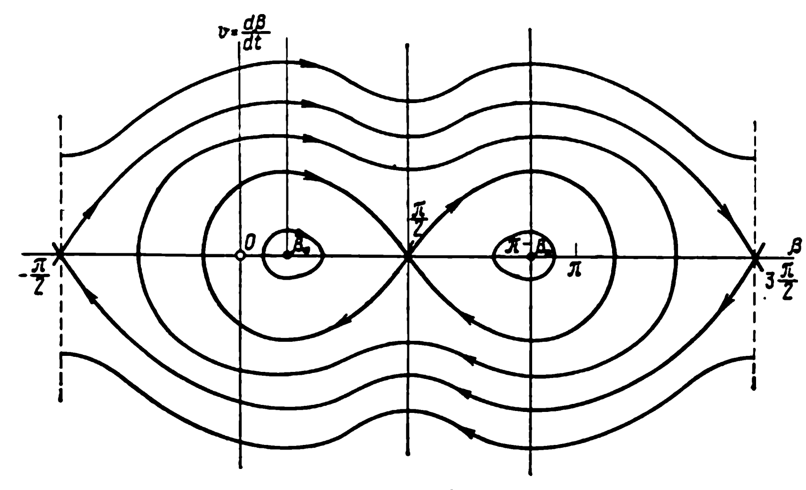


Fig. 89

On appelle *séparatrice* la trajectoire de phase passant par le point $(\pi/2, 0)$ (fig. 89). Comme il a déjà été indiqué, la constante E figurant dans l'équation (3.2.13) devient égale à E_s et donc s'exprime par la

formule (3.2.19). Cette courbe sépare les trajectoires de phase fermées, qui entourent le point $(\beta_*, 0)$, des trajectoires d'un autre type correspondant à des mouvements plus complexes du gyroscope suspendu à la cardan. Si l'on augmente encore la constante E dans l'équation (3.2.13), il en résultera l'apparition de trajectoires fermées entourant les points $(\beta_*, 0)$, $(\pi/2, 0)$ et $(\pi - \beta_*, 0)$ (v. fig. 89). Ces trajectoires sont symétriques par rapport à la droite $\beta = \pi/2$. Lorsque la constante E prend une valeur égale à

$$E'_s = \frac{H^2 (1 + \sin \beta_*)^2}{A_2 + C_1}, \tag{3.2.23}$$

une nouvelle séparatrice apparaît (v. fig. 89) qui passe, en vertu de l'équation (3.2.15) et de la formule (3.2.16), par les points $(-\pi/2, 0)$

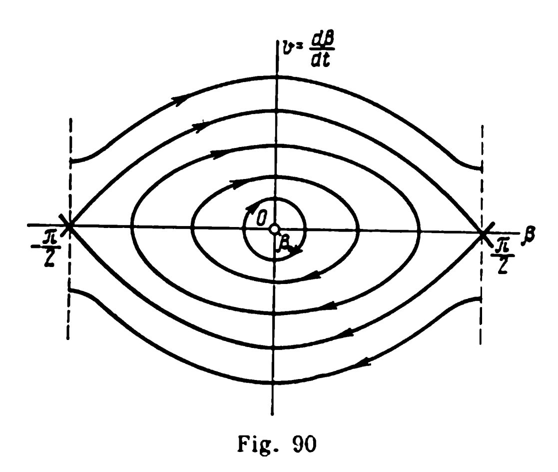


Fig. 90

et $(3\pi/2, 0)$. Lorsque la constante E prend des valeurs encore plus grandes, les trajectoires deviennent ouvertes. A des trajectoires non fermées correspond un mouvement du gyroscope suspendu à la cardan, dans lequel la vitesse angulaire $d\beta/dt$ ne s'annule pas au cours de sa variation et l'anneau de cardan intérieur tourne par rapport à l'anneau extérieur dans un même sens.

Si la valeur de l'angle initial β_* diminue, les deux séparatrices se rapprochent et finissent par se confondre, pour $\beta_* = 0$, en une seule courbe (fig. 90) qui passe par les points $(-\pi/2, 0)$ et $(\pi/2, 0)$ en séparant les trajectoires fermées des trajectoires ouvertes. Si l'angle β_* devient négatif, les séparatrices se situent comme l'indique la figure 91.

Examinons maintenant sous quel angle les trajectoires de phase et, en particulier les séparatrices, s'approchent de l'axe des abscisses $v = 0$. Compte tenu de l'égalité (3.2.14), le coefficient angulaire de

la tangente à la trajectoire de phase s'exprime par

$$k = \frac{dv}{d\beta} = \frac{dv}{dt} : \frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{v}\,\frac{d^2\beta}{dt^2}. \tag{3.2.24}$$

Pour déterminer la dérivée seconde de l'angle β, reportons-nous à la deuxième des équations (3.1.15) du paragraphe précédent, soit

$$\Theta\,\frac{d^2\beta}{dt^2} - \frac{1}{2}\,J'(\beta)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 - C\left(\frac{d\alpha}{dt}\sin\beta + \frac{d\gamma}{dt}\right)\frac{d\alpha}{dt}\cos\beta = 0. \tag{3.2.25}$$

En y remplaçant la vitesse angulaire $d\alpha/dt$ par son expression (3.2.9) et en faisant usage de l'intégrale première (3.1.17), on obtient

$$\Theta\,\frac{d^2\beta}{dt^2} = \frac{J'(\beta)\,H^2(\sin\beta - \sin\beta_*)^2}{2\,[J(\beta)]^2} - \frac{H^2\cos\beta\,(\sin\beta - \sin\beta_*)}{J(\beta)}. \tag{3.2.26}$$

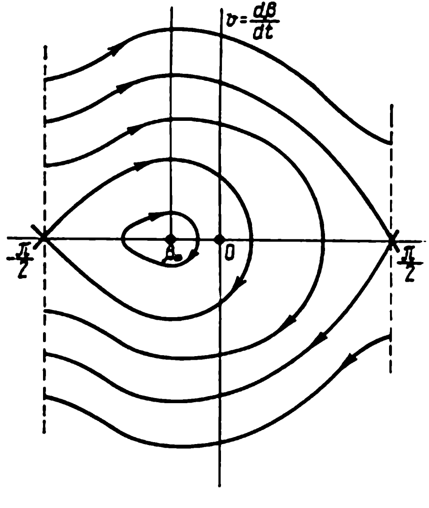


Fig. 91

La dernière formule peut s'obtenir directement à partir de l'équation différentielle (3.2.10). A cet effet, il suffit de calculer les dérivées par rapport au temps des deux membres de cette équation et de les simplifier ensuite par le facteur $d\beta/dt$ qui est, dans le cas général, non nul.

Portons l'expression (3.2.16) de la fonction $J(\beta)$ dans le second membre de l'égalité (3.2.26). Il vient, après quelques transformations simples,

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = -\frac{H^2\cos\beta\,(\sin\beta - \sin\beta_*)}{\Theta\,[J(\beta)]^2}\,F(\beta), \tag{3.2.27}$$

où

$$F(\beta) = A_2 + (A_1 + A)(1 - \sin\beta\sin\beta_*) + C_1\sin\beta\sin\beta_*. \tag{3.2.28}$$

Dans ce qui suit, nous limiterons notre examen au cas où la fonction $F(\beta)$ est strictement positive, quelles que soient les valeurs prises par la variable β dans l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$ et les valeurs prises par l'angle β_* dans l'intervalle $]0, \pi/2[$. Examinons les conditions sous lesquelles se présente ce cas. Il n'est pas difficile de se convaincre que lorsque la variable β varie de $-\pi/2$ à $\pi/2$, la fonction $F(\beta)$ varie

de façon monotone de la valeur

$$F(-\pi/2) = A_2 + A_1 + A - (C_1 - A_1 - A)\sin\beta_* \quad (3.2.29)$$

à la valeur

$$F(\pi/2) = A_2 + A_1 + A + (C_1 - A_1 - A)\sin\beta_*. \quad (3.2.30)$$

Si $0 < \beta_* < \pi/2$, la valeur de $F(\pi/2)$ est strictement positive pour toutes les valeurs des moments d'inertie A_2, A_1, A et C_1. De ce fait, la fonction $F(\beta)$ sera strictement positive dans tout l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$ de variation de β si, pour les mêmes conditions, est strictement positive la valeur de $F(-\pi/2)$, c'est-à-dire si

$$A_2 + A_1 + A - (C_1 - A_1 - A)\sin\beta_* > 0. \quad (3.2.31)$$

La dernière inégalité est vérifiée pour toute valeur strictement positive, inférieure à $\pi/2$, de l'angle β_*, pourvu que

$$A_2 + 2A_1 + 2A > C_1. \quad (3.2.32)$$

Dans les gyroscopes utilisés en pratique, les moments d'inertie C_1 et A_1 de l'anneau intérieur (respectivement par rapport à l'axe du rotor et par rapport à l'axe perpendiculaire tant à l'axe du rotor qu'à l'axe de l'anneau intérieur) ne diffèrent que peu l'un de l'autre, si bien que l'inégalité (3.2.32) est vérifiée. Ainsi donc, les restrictions imposées à la fonction $F(\beta)$ sont tout à fait naturelles [1]).

[1]) On peut, bien entendu, construire à volonté une suspension à la cardan particulière dont les moments d'inertie ne satisfont pas à l'inégalité (3.2.32). A cet effet, on peut, par exemple, utiliser des masses supplémentaires en les

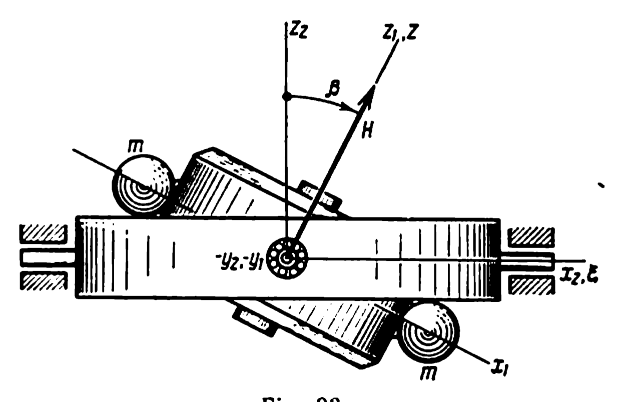


Fig. 92

plaçant sur l'anneau intérieur (boîtier) au voisinage de l'axe x_1, symétriquement par rapport au centre de la suspension (fig. 92). Dans le cas du gyroscope comportant une telle suspension à la cardan, la construction des trajectoires de phase (3.2.13) pour des valeurs strictement négatives de la variable β exige

Reprenons l'expression (3.2.24) donnant le coefficient angulaire k de la tangente à la trajectoire de phase. Compte tenu des formules (3.2.27) et (3.2.28), on a

$$k = -\frac{1}{v} \cdot \frac{H^2 \cos \beta (\sin \beta - \sin \beta_*)}{\Theta [J(\beta)]^2} F(\beta). \qquad (3.2.33)$$

où, d'après ce qui précède, la fonction $F(\beta)$ sera considérée comme strictement positive. Lorsque $\beta = \beta_*$, le coefficient angulaire k est nul. Par conséquent, les tangentes aux trajectoires de phase en des points d'intersection de ces courbes avec la droite $\beta = \beta_*$ sont parallèles à l'axe des abscisses. Pour les points situés à droite de $\beta = \beta_*$, dans la partie supérieure du plan de phase βv, le coefficient angulaire de la tangente est partout négatif. Il croît en module, en tendant vers l'infini, au fur et à mesure que le point représentatif qui suit sa trajectoire s'approche du point $(\beta_2, 0)$ où cette dernière coupe l'axe des abscisses (v. fig. 88). Ainsi, la trajectoire de phase coupe en ce point l'axe des abscisses à angle droit. Il en est de même pour les tangentes menées en des points d'intersection de l'axe des abscisses avec les trajectoires de phase à gauche de la droite $\beta = \beta_*$. Une exception est faite pour le point $(\pi/2, 0)$ d'intersection de la première séparatrice avec l'axe des abscisses (v. fig. 89) et pour le point analogue $(-\pi/2, 0)$ de la deuxième séparatrice (ainsi que pour ces deux points d'une même séparatrice, lorsque $\beta_* = 0$, v. fig. 90). Aux points mentionnés, est nul non seulement le dénominateur de la fraction au second membre de la formule (3.2.33) mais également son numérateur (parce qu'il comporte le facteur $\cos \beta$). Pour expliquer les exceptions sus-mentionnées, déterminons d'abord la valeur de la coordonnée de phase v pour les points appartenant à la partie supérieure de la première séparatrice. D'après l'équation (3.2.13), on a

$$v = \pm \sqrt{\frac{E}{\Theta} - \frac{H^2 (\sin \beta - \sin \beta_*)^2}{\Theta J(\beta)}}. \qquad (3.2.34)$$

Dans le cas considéré, il convient de donner à la constante E la valeur E_s définie par la formule (3.2.19) et, en outre, de conserver devant le radical le signe plus (dans la partie supérieure du plan de phase, les points représentatifs se déplacent de gauche à droite). Compte tenu de la formule (3.2.16), on obtient après quelques transformations

---

une étude spéciale qui tient compte de l'apparition possible du mouvement stationnaire indiqué dans la note au bas des pages 174-175; une telle étude sort du cadre du présent ouvrage. Quant aux trajectoires de phase entourant le point $(\beta_*, 0)$ du mouvement stationnaire du gyroscope, elles affectent qualitativement la même forme pour toutes les combinaisons des moments d'inertie A_2, A_1, A et C_1, ainsi que pour toutes valeurs strictement positives, inférieures à $\pi/2$, des angles β_* et β.

assez simples

$$v = \frac{H\cos\beta}{\sqrt{\Theta}\,(A_2+C_1)\,J(\beta)}\sqrt{M\left(1-\frac{2\sin\beta_*}{1+\sin\beta}\right)-K(1-\sin\beta_*)^2}, \tag{3.2.35}$$

$$(M = A_2+C_1,\quad K = C_1-A_1-A).$$

Introduisons maintenant cette expression dans la formule (3.2.33) et posons-y $\beta = \pi/2$. On obtient finalement, compte tenu de la formule (3.2.28), l'expression suivante pour le coefficient angulaire de la tangente menée à la partie supérieure de la première séparatrice en son point nodal $(\pi/2, 0)$:

$$k_s = -\frac{H\sqrt{1-\sin\beta_*}}{(A_2+C_1)\sqrt{\Theta}}\sqrt{A_2+A_1+A+(C_1-A_1-A)\sin\beta_*}. \tag{3.2.36}$$

Le coefficient angulaire de la tangente à la partie inférieure de la séparatrice en même point nodal $(\pi/2, 0)$ ne diffère du coefficient obtenu k_s que par le signe.

Dans le cas particulier mentionné au paragraphe précédent, où

$$K = C_1 - A_1 - A = 0, \tag{3.2.37}$$

cette formule se simplifie fortement et devient

$$k_s = -H\sqrt{\frac{1-\sin\beta_*}{(A_2+C_1)\,\Theta}}. \tag{3.2.38}$$

En procédant d'une manière analogue, on peut déterminer le coefficient angulaire k_s' de la tangente à la partie supérieure de la deuxième séparatrice en son point nodal $(-\pi/2, 0)$. A cet effet, il convient de remplacer dans le second membre de la formule (3.2.34) la constante E par sa valeur E_s' suivant la formule (3.2.23) et de reprendre les calculs effectués dans le cas précédent. On obtient en définitive la formule

$$k_s' = \frac{H\sqrt{1+\sin\beta_*}}{(A_2+C_1)\sqrt{\Theta}}\sqrt{A_2+A_1+A-(C_1-A_1-A)\sin\beta_*}. \tag{3.2.39}$$

Comme il a été indiqué précédemment, les deux séparatrices se confondent en une seule courbe pour $\beta_* = 0$. Par conséquent, les coefficients angulaires des tangentes en deux points nodaux $(\pi/2, 0)$ et $(-\pi/2, 0)$, tant à la partie supérieure qu'à la partie inférieure de cette courbe, deviennent égaux en module.

Revenons aux trajectoires fermées du plan de phase βv (v. fig. 88) qui entourent le point $(\beta_*, 0)$. L'axe du rotor est animé dans ce cas de petits mouvements autour d'une position moyenne, laquelle, comme il sera montré au paragraphe suivant, change continuellement son orientation par rapport au système de coordonnées $\xi\eta\zeta$ lié au support fixe du gyroscope. Quant à l'angle β, qui caractérise la

position de l'anneau intérieur par rapport à l'anneau extérieur, il subit des variations périodiques entre deux constantes β_1 et β_2 qui sont les racines de l'équation trigonométrique (3.2.15).

Proposons-nous d'établir une formule pour la période T de variation de l'angle β. Il est évident qu'à la demi-période correspond le temps au cours duquel le point représentatif passe de la position $(\beta_1, 0)$ dans la position $(\beta_2, 0)$, en suivant la partie supérieure de la trajectoire de phase (v. fig. 88) qui entoure le point $(\beta_*, 0)$. Le temps mis par le point représentatif pour passer de la position $(\beta_2, 0)$ dans la position $(\beta_1, 0)$, en suivant la partie inférieure de la trajectoire, est exactement le même.

D'après l'équation (3.2.10), on a

$$dt = \pm \frac{\sqrt{\Theta J(\beta)}\, d\beta}{\sqrt{EJ(\beta) - H^2(\sin\beta - \sin\beta_*)^2}}. \tag{3.2.40}$$

Le signe positif au second membre de la dernière égalité correspond au mouvement du point représentatif suivant la partie supérieure de la trajectoire de phase et le signe négatif, à son mouvement sur la partie inférieure de la trajectoire (dans le premier cas, l'angle β croît et $d\beta > 0$, alors que dans le second cas, c'est le contraire qui a lieu). Il est maintenant évident que

$$T = 2\int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\sqrt{\Theta J(\beta)}\, d\beta}{\sqrt{EJ(\beta) - H^2(\sin\beta - \sin\beta_*)^2}}. \tag{3.2.41}$$

La même formule pourrait s'obtenir à partir de l'intégrale hyperelliptique (3.1.25) du paragraphe précédent si l'on y remplace la constante G par son expression (3.2.8) et fixe convenablement les bornes d'intégration.

Supposons que la différence

$$\beta - \beta_* = y \tag{3.2.42}$$

est petite devant $\pi/2$, par exemple. Alors, compte tenu de l'égalité (3.2.16), l'équation différentielle (3.2.10) peut être mise, à des termes de troisième ordre en nouvelle variable y près, sous la forme suivante :

$$\frac{H^2\cos^2\beta_*}{J(\beta_*)}(y^2 - \lambda y^3) + \Theta_2^1\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = E. \tag{3.2.43}$$

Ici,

$$\lambda = \frac{M + K\cos^2\beta_*}{M - K\cos^2\beta_*}\,\operatorname{tg}\beta_*, \tag{3.2.44}$$

où M et K sont des quantités qui ont été introduites au paragraphe précédent à l'aide de (3.1.26) et (3.1.27) (mais on a maintenant $K \neq 0$).

Désignons par τ le temps, dit adimensionnel, en le liant au temps ordinaire t par la relation

$$t=\frac{\sqrt{\Theta J(\beta_*)}}{H\cos\beta_*}\tau. \qquad (3.2.45)$$

L'équation différentielle (3.2.43) prend alors la forme

$$y^2-\lambda y^3+\left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2=a^2, \qquad (3.2.46)$$

où

$$a^2=\frac{EJ(\beta_*)}{H^2\cos^2\beta_*} \qquad (3.2.47)$$

est le carré du nouveau paramètre (sans dimension) a. Ce paramètre détermine, de même que la constante E dans le cas du plan de phase βv, une courbe concrète dans un nouveau plan de phase yu, où

$$u=\frac{dy}{d\tau}. \qquad (3.2.48)$$

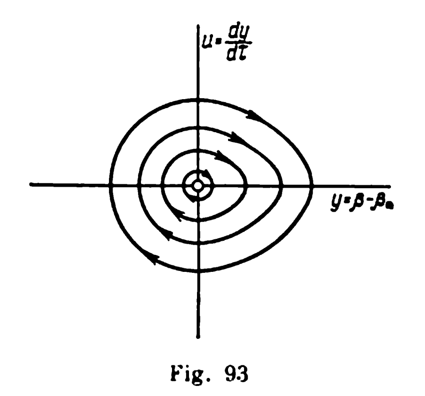


Fig. 93

Lorsque le paramètre a tend vers zéro, les courbes de phase entourent d'une manière de plus en plus serrée l'origine du système de coordonnées yu et à la limite tendent vers ce point. Pour des valeurs non nulles du paramètre a, les courbes de phase coupent l'axe des abscisses ($u=0$) en des points auxquels correspondent les racines de l'équation cubique

$$y^2-\lambda y^3-a^2=0. \qquad (3.2.49)$$

Dans le cas considéré, il convient de retenir celles des racines $y=y_1$ et $y=y_2$ de la dernière équation, qui s'annulent en même temps que le paramètre a. Il est aisé de s'assurer que l'équation (3.2.49) est satisfaite, à des termes de deuxième ordre en paramètre a près, si l'on pose

$$y_1=-a+\frac{1}{2}\lambda a^2 \qquad (3.2.50)$$

et

$$y_2=a+\frac{1}{2}\lambda a^2. \qquad (3.2.51)$$

Il est évident que la forme des courbes de phase dans le plan yu ne diffère des courbes analogues dans le plan βv que par l'échelle. Les dernières (v. fig. 88) entourent le point (β_*, 0), et les premières, l'origine des coordonnées (fig. 93). Lorsque les valeurs du produit

λa sont petites devant l'unité, les courbes de phase (3.2.46) dans le plan yu ne diffèrent à leur tour que très peu des circonférences

$$y^2 + u^2 = a^2, \tag{3.2.52}$$

et les formules (3.2.50) et (3.2.51) doivent être remplacées dans ce cas par les égalités

$$y_1 = -a, \quad y_2 = a. \tag{3.2.53}$$

Pour déterminer la demi-période adimensionnelle τ_0 du mouvement du point représentatif, en partant de l'équation différentielle approchée (3.2.46), il convient d'intégrer de y_1 à y_2 la relation différentielle

$$d\tau = \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2 + \lambda y^3}} \tag{3.2.54}$$

qui découle de cette équation et est valable pour la partie supérieure de la trajectoire de phase. On obtient la formule

$$\tau_0 = 2 \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2 + \lambda y^3}} \tag{3.2.55}$$

qui contient une intégrale elliptique définie dont les limites sont les racines (3.2.50) et (3.2.51) de l'équation cubique (3.2.49).

Effectuons dans l'intégrale (3.2.55) un changement de la variable y par ϑ, conformément à la formule

$$y = a \sin \vartheta + \frac{1}{2} \lambda a^2 \sin^2 \vartheta. \tag{3.2.56}$$

Lorsque ϑ varie de $-\pi/2$ à $\pi/2$, la variable y le fait de $-a + \frac{1}{2} \lambda a^2$ à $a + \frac{1}{2} \lambda a^2$. Conformément aux égalités (3.2.50) et (3.2.51), les limites d'intégration seront donc représentées par $-\pi/2$ et $\pi/2$. Par ailleurs, on a, à des termes de troisième ordre en paramètre a près,

$$a^2 - y^2 + \lambda y^3 = a^2 \cos^2 \vartheta. \tag{3.2.57}$$

Compte tenu de la dernière égalité et des remarques faites plus haut sur les bornes d'intégration, on peut mettre la formule (3.2.55) sous une forme approchée suivante:

$$\tau_0 = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \vartheta + \lambda a \cos \vartheta \sin \vartheta}{\cos \vartheta} \, d\vartheta. \tag{3.2.58}$$

Il est évident qu'à des termes de deuxième ordre en paramètre a près, cette intégrale est égale à π et, par conséquent,

$$\tau_0 = 2\pi. \tag{3.2.59}$$

Passons du temps sans dimension τ au temps ordinaire t, en utilisant l'égalité (3.2.45). On obtient finalement pour la période de petites nutations du gyroscope suspendu à la cardan l'expression suivante:

$$T = 2\pi \frac{\sqrt{\Theta J(\beta_*)}}{H \cos \beta_*}. \tag{3.2.60}$$

On est conduit à la même expression si l'on a recours directement à l'équation différentielle approchée (3.2.46), en y rejetant le terme de troisième ordre λy^3. On obtient l'équation différentielle

$$y^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 = a^2 \tag{3.2.61}$$

dont l'intégrale est la fonction

$$y = a \cos(\tau + \delta), \tag{3.2.62}$$

où δ est une constante arbitraire. En y exprimant la variable y par l'intermédiaire de l'angle β suivant la relation (3.2.42) et en remplaçant le temps adimensionnel τ par le temps ordinaire t d'après l'égalité (3.2.45), on a

$$\beta = \beta_* + a \sin\left(\frac{H \cos \beta_*}{\sqrt{\Theta J(\beta_*)}} t + \delta\right). \tag{3.2.63}$$

D'où on arrive de nouveau à la formule (3.2.60). Remarquons que le paramètre a représente dans ce cas l'amplitude des oscillations angulaires de l'anneau intérieur autour de la position $\beta = \beta_*$. Dans ce qui suit, l'amplitude de la fonction $y = \beta - \beta_*$ sera désignée par y_a.

§ 3. Intégration des équations approchées du mouvement. Formule de Magnus

Le paragraphe actuel est consacré à l'étude du mouvement de nutation du gyroscope suspendu à la cardan, dans un énoncé approché du problème. Considérons à cet effet les deux premières équations différentielles (3.1.15) établies au § 1 du présent chapitre. Compte tenu de l'intégrale (3.1.17) obtenue dans le même paragraphe, elles peuvent être représentées sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} J(\beta)\frac{d^2\alpha}{dt^2} + J'(\beta)\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\beta}{dt} + H\cos\beta\frac{d\beta}{dt} &= 0, \\ \Theta\frac{d^2\beta}{dt^2} - \frac{1}{2}J'(\beta)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 - H\cos\beta\frac{d\alpha}{dt} &= 0. \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Jointes à l'intégrale (3.1.17), ces équations sont équivalentes au système initial (3.1.15) et admettent, bien entendu, une solution particulière

$$\alpha = \alpha_0, \quad \beta = \beta_0, \tag{3.3.2}$$

où α_0 et β_0 sont des constantes. Comme il a été indiqué précédemment, la solution (3.3.2) correspond au cas où l'axe du rotor et, par conséquent, les deux anneaux de cardan du gyroscope sont immobiles.

Posons dans les équations (3.3.1)

$$\alpha = \alpha_0 + x, \quad \beta = \beta_0 + y \tag{3.3.3}$$

et étudions, en appliquant la théorie des petites oscillations, les petits mouvements de l'ensemble mécanique, constitué par les organes du gyroscope suspendu à la cardan, autour d'une position dans laquelle les deux anneaux de cardan sont immobiles, leur position étant donnée par les angles α_0 et β_0. Gardons dans les équations (3.3.1) les termes de premier et de deuxième ordre en x, y et en leurs dérivées par rapport au temps (la variable x n'est représentée dans ces équations que par ses dérivées). Il vient

$$\begin{gathered} J(\beta_0)\frac{d^2x}{dt^2} + J'(\beta_0)\left(\frac{d^2x}{dt^2}y + \frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}\right) + \\ + H\cos\beta_0\frac{dy}{dt} - H\sin\beta_0 y\frac{dy}{dt} = 0, \\ \Theta\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{2}J'(\beta_0)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - H\cos\beta_0\frac{dx}{dt} + H\sin\beta_0 y\frac{dx}{dt} = 0. \end{gathered} \tag{3.3.4}$$

Les équations (3.3.4) seront utilisées sous leur forme complète un peu plus loin; pour l'instant, nous n'y garderons que les termes de premier ordre en y, dx/dt, dy/dt et d^2x/dt^2. Il en résulte le système d'équations linéarisées

$$\begin{gathered} J(\beta_0)\frac{d^2x}{dt^2} + H\cos\beta_0\frac{dy}{dt} = 0, \\ \Theta\frac{d^2y}{dt^2} - H\cos\beta_0\frac{dx}{dt} = 0. \end{gathered} \tag{3.3.5}$$

Il n'est pas difficile de vérifier que la solution générale de ce système est de la forme

$$\begin{gathered} x = c + Q\cos(\nu t + \varepsilon), \\ y = d + Q\sqrt{\frac{J(\beta_0)}{\Theta}}\sin(\nu t + \varepsilon). \end{gathered} \tag{3.3.6}$$

Ici, c, d, Q et ε sont des constantes arbitraires qui se déterminent par les conditions initiales du mouvement. A savoir, à l'instant initial $t = t_0$, les égalités suivantes doivent être vérifiées:

$$\begin{gathered} x = \alpha(0) - \alpha_0 = x_0, \quad y = \beta(0) - \beta_0 = y_0, \\ \frac{dx}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}\bigg|_{t=0} = \dot{x}_0, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{d\beta}{dt}\bigg|_{t=0} = \dot{y}_0, \end{gathered} \tag{3.3.7}$$

où x_0, y_0, $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$ sont des quantités données.

Quant à la valeur de ν, elle est déterminée, en vertu des équations (3.3.5) et des expressions (3.3.6), par la formule

$$\nu = \frac{H\cos\beta_0}{\sqrt{\Theta J(\beta_0)}} \tag{3.3.8}$$

et représente la pulsation des petits mouvements dont est animé l'axe du rotor. A la pulsation ν correspond la période

$$T = \frac{2\pi}{\nu} = 2\pi\,\frac{\sqrt{\Theta J(\beta_0)}}{H\cos\beta_0}. \tag{3.3.9}$$

Au cours du paragraphe précédent, la même formule, à des désignations près, soit (3.2.60), a été obtenue lors de l'étude du mouvement de l'axe du rotor, qui utilisait le plan de phase dans l'hypothèse où l'amplitude de variation de l'angle β était faible.

Suivant les égalités (3.3.3) et les formules (3.3.6), la position moyenne de l'axe du rotor, lors des petits mouvements décrits, est déterminée par

$$\alpha_1 = \alpha_0 + c, \qquad \beta_1 = \beta_0 + d. \tag{3.3.10}$$

Remarquons que dans ce cas la valeur de l'angle α_1 ne détermine que la position moyenne de l'anneau de cardan extérieur du gyroscope, oscillant autour de son axe x_2, par rapport au système de coordonnées fixe $\xi\eta\zeta$ introduit au § 1 du deuxième chapitre (dont l'axe ξ se confond avec l'axe x_2 de l'anneau extérieur, v. fig. 15). La valeur de α_1 dépend ainsi du choix des directions des axes η et ζ et ne joue donc aucun rôle dans la détermination du caractère des petits mouvements. L'angle β_1 doit être différent de $\pi/2$ et de $-\pi/2$ (sinon l'axe du rotor serait confondu avec l'axe de l'anneau de cardan extérieur), et la constante Q doit être supposée petite devant $\pi/2 - |\beta_1|$.

Il s'ensuit des formules (3.3.6) donnant la solution des équations linéarisées du mouvement du gyroscope que lors du mouvement de nutation la position moyenne de l'axe du rotor reste inchangée. Pourtant, si l'on considère ce problème, même de façon approchée, en tenant compte des termes de deuxième ordre, on obtient un résultat différent. Pour s'en assurer, commençons par mettre les équations (3.3.4) sous la forme

$$\begin{aligned} J(\beta_0)\frac{d^2x}{dt^2} + H\cos\beta_0\frac{dy}{dt} &= -J'(\beta_0)\left(\frac{d^2x}{dt^2}y + \frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}\right) + \\ &\quad + H\sin\beta_0 y\frac{dy}{dt}, \\ \Theta\frac{d^2y}{dt^2} - H\cos\beta_0\frac{dx}{dt} &= \frac{1}{2}J'(\beta_0)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - H\sin\beta_0 y\frac{dx}{dt}. \end{aligned} \tag{3.3.11}$$

Chacune des équations (3.3.11) ne diffère de l'équation correspondante (3.3.5) que par son second membre qui contient les termes de deuxième ordre en y, dx/dt, dy/dt et d^2x/dt^2. Il est naturel d'admettre

qu'en recherchant la solution du système d'équations (3.3.11) on peut, en première approximation, introduire dans ces seconds membres les fonctions (3.3.6), c'est-à-dire la solution des équations linéarisées (3.3.5). Dans ce cas, les seconds membres des équations (3.3.11) deviennent des fonctions périodiques du temps dont la pulsation ν et la période T de variation sont données, comme précédemment, par les formules respectives (3.3.8) et (3.3.9).

Prenons la moyenne de ces fonctions dans le temps sur un intervalle égal à leur période T. Alors, du fait de leur périodicité, on obtient tout d'abord que

$$\frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{d^2x}{dt^2}y+\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}\right)dt=\frac{1}{T}\frac{dx}{dt}y\Big|_0^T=0 \qquad (3.3.12)$$

et, d'une manière analogue,

$$\frac{1}{T}\int_0^T y\frac{dy}{dt}\,dt=\frac{1}{2T}y^2\Big|_0^T=0. \qquad (3.3.13)$$

La valeur moyenne du second membre de la première équation du système (3.3.11) est donc nulle. Quant au second membre de la deuxième équation du même système, il prend, lorsqu'on y introduit les fonctions (3.3.6), la forme suivante:

$$\left[\frac{1}{2}J'(\beta_0)\nu^2+\nu H\sin\beta_0\sqrt{\frac{J(\beta_0)}{\Theta}}\right]Q^2\sin^2(\nu t+\varepsilon)+$$
$$+H\sin\beta_0\nu Qd\cdot\sin(\nu t+\varepsilon). \qquad (3.3.14)$$

La valeur moyenne de la dernière expression pendant la période T est égale à

$$\frac{\nu^2Q^2}{2}\left[\frac{1}{2}J'(\beta_0)+\frac{H\sin\beta_0}{\nu}\sqrt{\frac{J(\beta_0)}{\Theta}}\right]. \qquad (3.3.15)$$

D'après les premières formules (3.3.3) et (3.3.6), le produit νQ est l'amplitude des oscillations de la vitesse angulaire de l'anneau extérieur, calculée à partir des équations (3.3.5) du mouvement du gyroscope, à condition que l'une au moins des vitesses angulaires $d\alpha/dt$ ou $d\beta/dt$ est non nulle à l'instant initial. Désignons cette amplitude par $\dot{\alpha}_a$. Ainsi

$$\nu Q=\dot{\alpha}_a. \qquad (3.3.16)$$

En utilisant maintenant la formule (3.3.8), on obtient l'égalité

$$\frac{H\sin\beta_0}{\nu}\sqrt{\frac{J(\beta_0)}{\Theta}}=J(\beta_0)\operatorname{tg}\beta_0. \qquad (3.3.17)$$

Finalement, l'expression (3.3.15) devient

$$\frac{1}{2}\dot{\alpha}_a^2\left[\frac{1}{2}J'(\beta_0)+J(\beta_0)\operatorname{tg}\beta_0\right]. \tag{3.3.18}$$

En tenant compte de la formule (3.1.10), on peut vérifier aisément l'identité

$$J(\beta)+\frac{1}{2}J'(\beta)\cdot\operatorname{cotg}\beta=A_2+C_1, \tag{3.3.19}$$

après quoi l'expression (3.3.18) se simplifie et prend la forme

$$\frac{1}{2}\dot{\alpha}_a^2(A_2+C_1)\operatorname{tg}\beta_0. \tag{3.3.20}$$

Ainsi, en portant dans les seconds membres des équations (3.3.11) la solution (3.3.6) des équations linéarisées (3.3.5) et en prenant leur moyenne dans le temps pendant la période T, on est conduit aux équations linéaires suivantes:

$$\begin{aligned} &J(\beta_0)\frac{d^2x}{dt^2}+H\cos\beta_0\frac{dy}{dt}=0,\\ &\Theta\frac{d^2y}{dt^2}-H\cos\beta_0\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}\dot{\alpha}_a^2(A_2+C_1)\operatorname{tg}\beta_0. \end{aligned} \tag{3.3.21}$$

Il est évident que la solution générale du système d'équations (3.3.21) est la somme d'une solution particulière quelconque, par exemple

$$x=-\frac{\dot{\alpha}_a^2(A_2+C_1)\operatorname{tg}\beta_0}{2H\cos\beta_0}t, \quad y=0 \tag{3.3.22}$$

et de la solution générale du système homogène correspondant, c'est-à-dire de mêmes équations (3.3.5). La solution de ces dernières se présente sous la forme (3.3.6). Ceci signifie que les formules

$$\begin{aligned} &x=c'+Q'\cos(\nu t+\varepsilon')-\frac{\dot{\alpha}_a^2(A_2+C_1)\operatorname{tg}\beta_0}{2H\cos\beta_0}t,\\ &y=d'+Q'\sqrt{\frac{J(\beta_0)}{\Theta}}\sin(\nu t+\varepsilon'), \end{aligned} \tag{3.3.23}$$

dans lesquelles c', d', Q' et ε' sont des constantes arbitraires et la pulsation ν est définie, comme précédemment, par la formule (3.3.8), représentent la solution générale du système d'équations différentielles (3.3.21).

Les constantes c', d', Q' et ε' peuvent se déterminer si l'on connaît les conditions initiales du mouvement des anneaux de cardan, c'est-à-dire les valeurs des angles α, β et de leurs dérivées par rapport au temps à l'instant initial $t = t_0$. En effet, les relations (3.3.3) permettent de trouver tout de suite les valeurs initiales de x, y

et de leurs dérivées par rapport au temps. Ceci est parfaitement suffisant pour la détermination des constantes mentionnées.

Avec les hypothèses adoptées plus haut, les quantités x et y sont supposées petites, si bien que leurs valeurs initiales et les valeurs initiales de leurs dérivées par rapport au temps doivent être petites, elles aussi. Il n'est pas difficile de s'assurer que dans de telles hypothèses les constantes Q' et ε' ne diffèrent des constantes Q et ε intervenant dans la solution (3.3.6) du système d'équations différentielles linéarisées (3.3.5) que par des petits de deuxième ordre, si les conditions initiales sont les mêmes. Ainsi, la formule (3.3.16) permet de poser qu'à des petits de deuxième ordre près,

$$\nu Q' = \dot{\alpha}_a. \tag{3.3.24}$$

Il faut s'attendre que les formules (3.3.23) décrivent le mouvement de nutation du gyroscope suspendu à la cardan plus exactement que les formules d'approximation linéaire (3.3.6). La présence dans ces formules d'un terme proportionnel au temps signifie une croissance systématique de la valeur moyenne de l'angle α caractérisant la rotation de l'anneau de cardan extérieur à partir de sa position initiale. D'après ce qui précède et en tenant compte de la relation (3.3.3), on a

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{dx}{dt} = -\nu Q' \sin(\nu t + \varepsilon) - \frac{\dot{\alpha}_a^2 (A_2 + C_1) \operatorname{tg} \beta_0}{2H \cos \beta_0}, \\ \frac{d\beta}{dt} &= \frac{dy}{dt} = \nu Q' \sqrt{\frac{J(\beta_0)}{\Theta}} \cos(\nu t + \varepsilon). \end{aligned} \tag{3.3.25}$$

Il est évident que la valeur moyenne, pendant la période T, de la vitesse angulaire $d\beta/dt$ de l'anneau de cardan intérieur par rapport à l'anneau extérieur est nulle, alors que la valeur moyenne de la vitesse angulaire $d\alpha/dt$ de l'anneau extérieur par rapport au support fixe, pendant la même période, est égale à

$$\left\langle \frac{d\alpha}{dt} \right\rangle = -\frac{\dot{\alpha}_a^2 (A_2 + C_1) \operatorname{tg} \beta_0}{2H \cos \beta_0}. \tag{3.3.26}$$

Ici et plus loin, pour la valeur moyenne d'une fonction quelconque $\varphi(t)$ sur l'intervalle T est utilisée la désignation communément adoptée, soit

$$\langle \varphi(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t)\, dt. \tag{3.3.27}$$

La relation (3.3.26) connue sous le nom de *formule de Magnus* [1]) a été obtenue à partir d'une solution approchée des équations différentielles également approchées (3.3.11) du mouvement du gyroscope suspendu à la cardan. Il est donc naturel qu'une question doit naître: quelle est la précision de cette formule par rapport à la solution vraie des équations initiales (3.3.1) de ce problème? Il s'est trouvé que la formule de Magnus s'accorde bien avec la solution exacte dans le cas particulier de l'observation de la condition (3.1.27), où

$$J(\beta) = A_2 + C_1 = \text{const}, \quad J'(\beta) = 0 \qquad (3.3.28)$$

et les équations (3.3.1) s'intègrent, comme il a déjà été dit au chap. II, § 2, en des fonctions elliptiques. Des études fondées sur l'utilisation de différentes méthodes approchées ont conduit à la formule de Magnus même dans le cas général où la relation (3.3.28) n'a pas lieu [2]). Quant au fait lui-même de dérive du gyroscope équilibré (astatique) suspendu à la cardan, ou plus exactement, de la valeur moyenne non nulle de la vitesse angulaire de son anneau extérieur en cas des vibrations, il paraît qu'il était connu dès 1939 de E. Nicolaï [3]) qui a réussi, en particulier, à effectuer l'intégration des équations différentielles du mouvement de ce gyroscope par des quadratures hyperelliptiques.

Indiquons encore un procédé permettant d'obtenir la formule de Magnus. Il est basé sur la transformation suivante de la deuxième des équations exactes (3.3.1) qui décrivent le mouvement du gyroscope suspendu à la cardan. De cette équation résulte l'égalité

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\Theta}{H\cos\beta}\frac{d^2\beta}{dt^2} - \frac{J'(\beta)}{2H\cos\beta}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2. \qquad (3.3.29)$$

Remarquons qu'on a les identités

$$\frac{1}{\cos\beta}\frac{d^2\beta}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\cos\beta}\frac{d\beta}{dt}\right) - \frac{\operatorname{tg}\beta}{\cos\beta}\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 \qquad (3.3.30)$$

[1]) *Magnus K.* « Beiträge zur Dynamik des Kräftefreien, kardanisch gelagerten Kreisels ».— Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. Januar-Februar, 1955, Bd. 35, H. 1/2. Une formule analogue a été obtenue un peu plus tard par Plymale et Goodstein. Voir *Plymale B. T.* and *Goodstein R.* « Nutation of a free Gyro subjected to an impulse ». Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech., 1955, vol. 22, No. 3.

[2]) Voir, par exemple: *Лунц Я. Л.* « О неустойчивости оси фигуры гироскопа » (*Ya. Lounts* « Sur l'instabilité de l'axe de la figure du gyroscope »).— ПММ, 1960, т. 24, вып. 4 (en russe); *Бородина Р. М.* « Решение уравнений движения уравновешенного гироскопа методом усреднения » (*R. Borodina* « Résolution des équations du mouvement d'un gyroscope équilibré par la méthode de la moyenne »). Укр. матем. журн. 1961, т. 13, № 3 (en russe); *Брюно А. Д.* « О движении гироскопа в кардановом подвесе » (*A. Bruno* « Sur le mouvement d'un gyroscope suspendu à la cardan »).— Изв. АН СССР, МТТ, 1972, № 6 (en russe).

[3]) *Николаи Е. Л.* « О движении уравновешенного гироскопа в кардановом подвесе » (*E. Nicolaï* « Sur le mouvement d'un gyroscope équilibré suspendu à la cardan »).— ПММ, 1939, т. 3, вып. 4 (en russe).

et

$$J'(\beta) = 2\,[A_2 + C_1 - J\,(\beta)]\,\mathrm{tg}\,\beta. \qquad (3.3.31)$$

La dernière découle de l'identité (3.3.19). Compte tenu des relations (3.3.30) et (3.3.31), l'égalité (3.3.29) se met sous la forme

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\Theta}{H}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\cos\beta}\frac{d\beta}{dt}\right) - \frac{A_2+C_1}{H\cos\beta}\,\mathrm{tg}\,\beta\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \\ + \frac{\mathrm{tg}\,\beta}{H\cos\beta}\left[J\,(\beta)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 - \Theta\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2\right]. \qquad (3.3.32)$$

Comme il a été montré au § 2 du présent chapitre, la fonction $\beta = \beta\,(t)$ est, dans le cas des petits mouvements de l'axe du rotor, une fonction strictement périodique. Par conséquent, si T est, comme précédemment, la période de ces mouvements, on a

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\cos\beta}\frac{d\beta}{dt}\right) dt = 0. \qquad (3.3.33)$$

Maintenant, l'égalité (3.3.32) permet d'obtenir pour la valeur moyenne de la vitesse angulaire $d\alpha/dt$ pendant la période T, l'expression suivante:

$$\left\langle\frac{d\alpha}{dt}\right\rangle = -\frac{A_2+C_1}{H}\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\mathrm{tg}\,\beta}{\cos\beta}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 dt + \\ + \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\mathrm{tg}\,\beta}{H\cos\beta}\left[J\,(\beta)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 - \Theta\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2\right] dt. \qquad (3.3.34)$$

La fonction $\mathrm{tg}\,\beta/\cos\beta$ qui croît de façon monotone dans l'intervalle $]\beta_1, \beta_2[$ satisfait dans le même intervalle à la double inégalité

$$\frac{\mathrm{tg}\,\beta_1}{\cos\beta_1} < \frac{\mathrm{tg}\,\beta}{\cos\beta} < \frac{\mathrm{tg}\,\beta_2}{\cos\beta_2}, \qquad (3.3.35)$$

où β_1 et β_2 sont les limites de la variation périodique de l'angle β, c'est-à-dire les racines de l'équation trigonométrique (3.2.15) examinée au paragraphe précédent. Comme, de plus, $(d\alpha/dt)^2$ est toujours strictement positive, on peut, en vertu du théorème sur la valeur moyenne de l'intégrale définie du produit de deux fonctions [1]), mettre la relation (3.3.34) sous la forme

$$\left\langle\frac{d\alpha}{dt}\right\rangle = -\frac{(A_2+C_1)\,\mathrm{tg}\,\beta_3}{H\cos\beta_3}\left\langle\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2\right\rangle + \\ + \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\mathrm{tg}\,\beta}{H\cos\beta}\left[J\,(\beta)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 - \Theta\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2\right] dt, \qquad (3.3.36)$$

---

[1]) Voir, par exemple, *V. Smirnov* « Cours de mathématiques supérieures », tome I, 2e éd., M., Ed. « Mir », 1972 (traduit du russe).

où β_3 est une valeur moyenne de la variable β dans l'intervalle $]\beta_1, \beta_2[$.

Remplaçons au second membre de l'égalité (3.3.36) les fonctions α et β par leurs expressions (3.3.3), compte tenu des formules (3.3.6) obtenues à la suite de la résolution des équations linéarisées (3.3.5). Puis, remplaçons la quantité β_3 par la valeur de β_0 qui n'en diffère que très peu, et substituons (pour les mêmes raisons) tg β_0, cos β_0 et $J(\beta_0)$ à tg β, cos β et $J(\beta)$. Il en résulte que le deuxième terme au second membre de la relation (3.3.36) devient égal à zéro. En définitive, compte tenu de la désignation (3.3.16), on obtient de nouveau la formule de Magnus (3.3.26).

§ 4. Précision de la formule de Magnus

La question concernant la dérive systématique d'un gyroscope libre par suite de l'inertie des anneaux de cardan, dans le cas où l'axe de son rotor effectue des petits mouvements (nutations), revêt une importance substantielle pour la détermination de la précision des indications des systèmes inertiels. A ce propos, il est d'un intérêt pratique indiscutable de préciser la formule approchée de Magnus obtenue au paragraphe précédent pour la valeur moyenne de la vitesse de rotation de l'anneau de cardan extérieur d'un gyroscope libre, lorsque celui-ci est animé d'un mouvement de nutation.

Au cours du présent paragraphe, nous nous proposons, dans l'hypothèse (3.1.27) simplifiant les calculs, d'obtenir pour cette vitesse une expression sous forme de série de puissances d'un paramètre a introduit au § 2 du présent chapitre au moyen de la formule (3.2.47). Il se trouve que le premier terme de cette série correspond à la formule de Magnus.

Continuons l'étude du mouvement du gyroscope suspendu à la cardan, dans le voisinage de son état stationnaire (les deux anneaux de cardan étant immobiles et le rotor étant animé d'une rotation uniforme), en introduisant à cet effet un plan de phase, de même que nous l'avons fait au § 2 du présent chapitre. Prenons maintenant pour coordonnées de phase l'angle α caractérisant la rotation de l'anneau de cardan extérieur par rapport au support fixe, et l'angle β qui détermine la position de l'anneau intérieur par rapport à l'anneau extérieur (l'angle formé par l'axe du rotor avec la perpendiculaire au plan de l'anneau extérieur). Rappelons qu'au § 2 mentionné les coordonnées de phase étaient constituées par β et $v = d\beta/dt$.

Au début de ce chapitre, nous avons indiqué trois intégrales premières (3.1.17), (3.1.20) et (3.1.21) des équations différentielles (3.1.15) du mouvement du gyroscope suspendu à la cardan. Puis, il a été montré comment choisir les constantes de ces intégrales pour que le mouvement du gyroscope s'effectue au voisinage de l'état

stationnaire mentionné dans lequel, en vertu des égalités (3.1.16), les angles α et β sont constants, alors que l'angle γ dont le rotor est tourné par rapport à l'anneau de cardan intérieur varie avec une vitesse angulaire constante. L'étude du mouvement du gyroscope dans le voisinage d'un tel état se ramène à la résolution de l'équation différentielle (3.2.10)

$$\frac{H^2 (\sin\beta - \sin\beta_*)^2}{J(\beta)} + \Theta\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 = E, \tag{3.4.1}$$

suivie de l'intégration dans le temps du second membre de la relation (3.2.9), soit

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{H(\sin\beta_* - \sin\beta)}{J(\beta)}. \tag{3.4.2}$$

Nous avons conservé ici les désignations introduites aux §§ 1 et 2 du présent chapitre. En particulier, β_* est la valeur de l'angle β pour laquelle s'annule la vitesse angulaire $d\alpha/dt$ de l'anneau extérieur. Au § 2, il a également été montré que dans le cas du mouvement de nutation du gyroscope, l'angle β en tant que fonction du temps, variait périodiquement. Ceci étant, la période de nutation est donnée par la formule

$$T = 2\int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\sqrt{\Theta J(\beta)}\, d\beta}{\sqrt{EJ(\beta) - H^2(\sin\beta - \sin\beta_*)^2}}. \tag{3.4.3}$$

Pendant une demi-période de sa variation, l'angle β croît de façon monotone depuis une certaine valeur β_1 jusqu'à β_2. Ces dernières sont les racines de l'équation trigonométrique (3.2.15), soit

$$\frac{H^2(\sin\beta - \sin\beta_*)^2}{J(\beta)} = E. \tag{3.4.4}$$

Puis, pendant l'autre demi-période, l'angle β décroît de façon monotone dans le même intervalle $]\beta_1, \beta_2[$. Un mouvement périodique du gyroscope suspendu à la cardan n'a lieu que pour des valeurs suffisamment petites de la constante E, inférieures à une certaine valeur E_s. La formule (3.2.19) donnant la valeur E_s a été obtenue plus haut, au § 2 du présent chapitre.

D'après l'équation (3.4.1), pendant la demi-période de croissance de l'angle β on a

$$\frac{d\beta}{dt} = \sqrt{\frac{EJ(\beta) - H^2(\sin\beta - \sin\beta_*)^2}{\Theta J(\beta)}}. \tag{3.4.5}$$

Il est naturel que pendant la demi-période suivante, la même égalité reste valable, mais le signe devant son second membre doit être inversé. Il est évident que la vitesse angulaire $d\beta/dt$ de l'anneau intérieur par rapport à l'anneau extérieur s'annule, lorsque l'angle β devient égal à β_1 ou β_2 qui sont les racines de l'équation (3.4.4).

Divisons membre à membre les égalités (3.4.2) et (3.4.5). Il s'ensuit l'équation différentielle

$$\frac{d\alpha}{d\beta}=\sqrt{\frac{\Theta}{J(\beta)}}\frac{H(\sin\beta_*-\sin\beta)}{\sqrt{EJ(\beta)-H^2(\sin\beta-\sin\beta_*)^2}} \qquad (3.4.6)$$

qui permet, après intégration, de construire en principe une courbe (fig. 94) de variation simultanée des angles α et β dans le plan de phase $\beta\alpha$, lorsque l'angle β croît dans l'intervalle $]\beta_1, \beta_2[$.

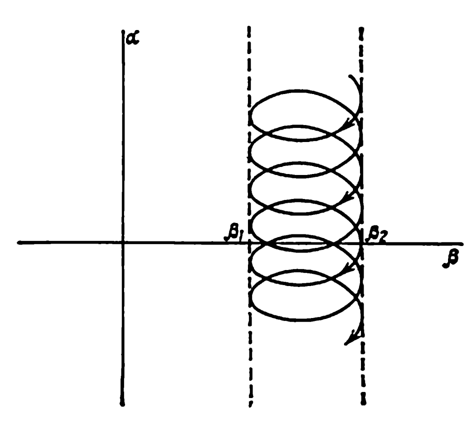


Fig. 94

La fonction figurant au second membre de la dernière relation tend vers l'infini. lorsque l'angle β s'approche de l'une de ses valeurs β_1 ou β_2. C'est pourquoi la courbe traduisant la variation de l'angle α en fonction de la variable β possède des tangentes verticales pour $\beta=\beta_1$ et pour $\beta=\beta_2$. Il est également évident que la tangente à cette courbe est horizontale pour $\beta=\beta_*$ parce que dans ce cas le second membre de la relation (3.4.6) s'annule.

Considérons une des demi-périodes de variation de l'angle β au cours de laquelle cet angle croît de β_1 à β_2 et désignons par α_1 et α_2 les valeurs correspondantes de l'angle α. Vers la fin de la demi-période, lorsque l'angle β atteint sa valeur β_2, l'angle α variera de la quantité

$$\alpha_2-\alpha_1=-\int_{\beta_1}^{\beta_2}\sqrt{\frac{\Theta}{J(\beta)}}\frac{H(\sin\beta-\sin\beta_*)\,d\beta}{\sqrt{EJ(\beta)-H^2(\sin\beta-\sin\beta_*)^2}}. \qquad (3.4.7)$$

La variation de l'angle α sera exactement la même. lorsque l'angle β ira en décroissant jusqu'à sa valeur β_1. En effet, pour calculer cette variation, il convient encore d'intégrer le second membre de la relation, cette fois de β_2 à β_1, après avoir inversé son signe en vertu de ce qui précède.

Comme il résulte des formules approchées obtenues au paragraphe précédent, le graphe de variation de l'angle α en fonction de l'angle β est une courbe non fermée, lorsque les valeurs de H et β_* sont positives. En se déplaçant suivant cette courbe, le point représentatif d'abscisse $\beta(t)$ et d'ordonnée $\alpha(t)$ glisse finalement vers le bas (v. fig. 94). On peut s'en assurer directement à l'aide d'une construction suffisamment précise, graphique ou numérique (en particulier,

sur un calculateur électronique), de l'intégrale du second membre de la formule (3.4.7), en appliquant les procédés habituels pour la recherche des intervalles d'intégration contenant des points singuliers de la fonction à intégrer [1]).

Pour calculer la vitesse angulaire moyenne de la dérive de l'anneau de cardan extérieur, il convient évidemment de diviser la différence $\alpha_2 - \alpha_1$, représentée par l'intégrale définie (3.4.7), par la demi-période de nutation du gyroscope. Compte tenu de la formule (3.4.3), on obtient le résultat suivant:

$$\langle\dot{\alpha}\rangle = -\left[\int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{H(\sin\beta - \sin\beta_*)\,d\beta}{\sqrt{[EJ(\beta) - H^2(\sin\beta - \sin\beta_*)^2]\,J(\beta)}}\right] \times \\ \times \left[\int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\sqrt{J(\beta)}\,d\beta}{\sqrt{EJ(\beta) - H^2(\sin\beta - \sin\beta_*)^2}}\right]^{-1}. \qquad (3.4.8)$$

Effectuons dans le second membre de cette égalité les calculs nécessaires, en supposant valable la relation (3.1.27) entre les moments d'inertie A_1, C_1 de l'anneau de cardan intérieur et le moment d'inertie équatorial A du rotor de gyroscope. Suivant la formule (3.1.10), la fonction $J(\beta)$ se réduit dans ce cas à la constante $A_2 + C_1$. On a

$$\langle\dot{\alpha}\rangle = -\frac{H}{A_2 + C_1}\left[\int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{(\sin\beta - \sin\beta_*)\,d\beta}{\sqrt{b^2 - (\sin\beta - \sin\beta_*)^2}}\right] \times \\ \times \left[\int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{d\beta}{\sqrt{b^2 - (\sin\beta - \sin\beta_*)^2}}\right]^{-1}, \qquad (3.4.9)$$

où

$$b^2 = \frac{E(A_2 + C_1)}{H^2}. \qquad (3.4.10)$$

A la fin du § 2 du présent chapitre, il a été introduit, au moyen de l'égalité (3.2.47), un paramètre sans dimension a. En remplaçant dans cette égalité la fonction $J(\beta)$ par la constante $A_2 + C_1$, on obtient

$$a^2 = \frac{E(A_2 + C_1)}{H^2\cos^2\beta_*}. \qquad (3.4.11)$$

Maintenant, en tenant compte de la relation (3.4.10), on est conduit à la relation suivante entre les paramètres positifs a et b:

$$b = a\cos\beta_*. \qquad (3.4.12)$$

[1]) Voir, par exemple, *N. Bakhvalov* « Méthodes numériques ». M., Ed. « Mir », 1975 (traduit du russe).

Si l'on utilise à son tour l'égalité $J(\beta) = A_2 + C_1$ dans l'équation trigonométrique (3.4.4) pour la détermination des valeurs β_1 et β_2, cette dernière devient

$$\frac{H^2 (\sin \beta_* - \sin \beta)^2}{A_2 + C_1} = E. \qquad (3.4.13)$$

D'où il résulte, compte tenu de la désignation (3.4.10) et de la relation (3.4.12), deux égalités

$$\sin \beta_1 = \sin \beta_* - a \cos \beta_* \qquad (3.4.14)$$

et

$$\sin \beta_2 = \sin \beta_* + a \cos \beta_* \qquad (3.4.15)$$

qui permettent de déterminer les bornes d'intégration dans la formule (3.4.9).

Faisons maintenant, au second membre de la formule (3.4.9), un changement de la variable β, suivant laquelle se fait l'intégration, par une nouvelle variable ϑ définie par la relation

$$\sin \beta = \sin \beta_* + a \cos \beta_* \sin \vartheta. \qquad (3.4.16)$$

Dans ce cas, on a

$$\cos \beta \, d\beta = a \cos \beta_* \cos \vartheta \, d\vartheta. \qquad (3.4.17)$$

Le changement de variable β par ϑ étant effectué, les bornes d'intégration β_1 et β_2 dans la formule (3.4.9) deviennent alors $-\pi/2$ et $\pi/2$, en vertu des égalités (3.4.14) et (3.4.15). En tenant compte encore de l'égalité (3.4.12), on obtient

$$\langle \dot{\alpha} \rangle = -\frac{Ha \cos \beta_*}{A_2 + C_1} \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{\cos \beta} \right]^{-1} \cdot \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin \vartheta \, d\vartheta}{\cos \beta} \right]. \qquad (3.4.18)$$

Il s'ensuit de la relation (3.4.16) que

$$\cos \beta = \cos \beta_* \sqrt{1 - 2a \operatorname{tg} \beta_* \sin \vartheta - a^2 \sin^2 \vartheta}. \qquad (3.4.19)$$

Développons maintenant le second membre de la dernière égalité en série suivant les puissances du paramètre a. On obtient, à des termes de troisième ordre en a près,

$$\frac{1}{\cos \beta} = \frac{1}{\cos \beta_*} \left[1 + a \operatorname{tg} \beta_* \sin \vartheta + a^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \operatorname{tg}^2 \beta_* \right) \sin^2 \vartheta + \right.$$
$$\left. + a^3 \left(\frac{3}{2} \operatorname{tg} \beta_* + \frac{5}{2} \operatorname{tg}^3 \beta_* \right) \sin^3 \vartheta \right]. \qquad (3.4.20)$$

Ainsi, avec la même précision,

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{\cos \beta} = \frac{\pi}{\cos \beta_*} \left[1 + \frac{a^2}{4} (1 + 3 \operatorname{tg}^2 \beta_*) \right] \qquad (3.4.21)$$

et

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\cos\beta} = \frac{a\pi \operatorname{tg}\beta_*}{2\cos\beta_*}\left[1 + \frac{3a^2}{8}(3+5\operatorname{tg}^2\beta_*)\right]. \qquad (3.4.22)$$

En portant les expressions ainsi trouvées dans la formule (3.4.18) et en tenant compte encore une fois de l'égalité (3.4.11), on obtient, pour la vitesse moyenne de dérive du gyroscope, l'expression suivante :

$$\langle\dot{\alpha}\rangle = -\frac{E \operatorname{tg}\beta_*}{2H\cos\beta_*}\left[1 + \frac{a^2}{8}(7+9\operatorname{tg}^2\beta_*)\right]. \qquad (3.4.23)$$

Elle est valable à des termes de quatrième ordre en a près.

Plus haut, au § 3 du présent chapitre, nous avons désigné par $\dot{\alpha}_a$ la valeur maximale de la vitesse angulaire $d\alpha/dt$ de l'anneau de cardan extérieur du gyroscope libre, dans le cas des mouvements de nutation sur un support fixe. L'examen de l'intégrale de l'énergie modifiée (3.1.21) montre que cette vitesse angulaire présente sa valeur maximale $\dot{\alpha}_a$ en même temps que s'annule la vitesse angulaire $d\beta/dt$ de l'anneau de cardan intérieur par rapport à l'anneau extérieur. Ceci se produit à des instants où l'angle β lui-même prend l'une de ses valeurs extrêmes β_1 ou β_2. En posant dans l'intégrale première mentionnée (3.1.21) la vitesse angulaire $d\beta/dt$ nulle et la quantité $J(\beta)$, comme précédemment, égale à la somme $A_2 + C_1$, on obtient

$$(A_2 + C_1)\,\dot{\alpha}_a^2 = E. \qquad (3.4.24)$$

Remplaçons maintenant dans la formule (3.4.23) la constante E et le paramètre a par leurs valeurs données par les égalités (3.4.24) et (3.4.11). Il vient

$$\langle\dot{\alpha}\rangle = -\frac{\dot{\alpha}_a^2 (A_2+C_1)\operatorname{tg}\beta_*}{2H\cos\beta_*}\left[1 + \frac{\dot{\alpha}_a^2 (A_2+C_1)^2}{8H^2\cos^2\beta_*}(7+9\operatorname{tg}^2\beta_*)\right]. \quad (3.4.25)$$

En principe, la dernière formule prétend être plus exacte que la formule de Magnus. Remarquons toutefois qu'à la différence de la formule de Magnus, celle-là a été obtenue pour un cas particulier où la fonction $J(\beta)$ était constante (égale à la somme des moments d'inertie A_2 et C_1).

Pour des calculs pratiques de la vitesse moyenne de dérive $\langle\dot{\alpha}\rangle$ à l'aide de la formule (3.4.25), il suffit de prendre pour valeur de l'angle β_* (rappelons que pour $\beta = \beta_*$ la vitesse angulaire $d\alpha/dt$ s'annule) la moyenne arithmétique des valeurs extrêmes β_1 et β_2 de variation de l'angle β, à condition que celles-ci ne diffèrent que peu l'une de l'autre. La quantité $\dot{\alpha}_a$ se détermine dans ce cas à l'aide de la théorie linéaire des petits mouvements du gyroscope suspendu

à la cardan, qui a été exposée au § 3 du présent chapitre, où l'on doit poser $\beta_0 = \beta_*$.

En partant de la deuxième formule (3.3.6), il n'est pas difficile d'obtenir pour l'amplitude y_a de variation de l'angle β lors du mouvement de nutation du gyroscope suspendu à la cardan, l'expression suivante:

$$y_a = Q \sqrt{\frac{J(\beta_0)}{\Theta}}. \qquad (3.4.26)$$

D'après la première formule (3.3.6), la quantité y_a représente dans ce cas l'amplitude de variation de l'angle α. Compte tenu de ce qui précède, il convient de poser

$$J(\beta_0) = J(\beta_*) = A_2 + C_1. \qquad (3.4.27)$$

Si maintenant l'on tient compte des formules (3.3.16) et (3.3.8), on est conduit à la relation suivante entre les quantités $\dot{\alpha}_a$ et y_a:

$$y_a = \frac{A_2 + C_1}{H \cos \beta_*} \dot{\alpha}_a. \qquad (3.4.28)$$

En utilisant la dernière relation, on obtient

$$\frac{\dot{\alpha}_a^2 (A_2 + C_1) \operatorname{tg} \beta_*}{2H \cos \beta_*} = \frac{H \sin \beta_*}{2(A_2 + C_1)} y_a^2, \quad \frac{1}{8} a^2 = \frac{\dot{\alpha}_a^2 (A_2 + C_1)^2}{8H^2 \cos^2 \beta_*} = \frac{1}{8} y_a^2. \qquad (3.4.29)$$

En vertu des dernières égalités, la formule (3.4.25) se met sous la forme

$$\langle \dot{\alpha} \rangle = -\frac{H \sin \beta_*}{2(A_2 + C_1)} y_a^2 \left[1 + \frac{1}{8} y_a^2 (7 + 9 \operatorname{tg}^2 \beta_*) \right]. \qquad (3.4.30)$$

Exemple numérique. — Soient $A_2 = 6$ g·cm·s²; $C_1 = A_1 + A = 10$ g·cm·s²; $\Theta = 9$ g·cm·s²; $H = 50\,000$ g·cm·s; $\beta_0 = \beta_* = 45°$ et l'amplitude y_a des oscillations de l'anneau intérieur du gyroscope (c'est-à-dire, des variations de l'angle β) est de 1° (0,01745).

Dans ce cas, on a

$$J(\beta_0) = A_2 + C_1 = 16 \text{ g·cm·s}^2$$

et, suivant la formule (3.3.8) du paragraphe précédent,

$$\nu = \frac{H \cos \beta_0}{\sqrt{\Theta J(\beta_0)}} = 2946 \text{ s}^{-1}.$$

Il découle des formules (3.4.26) et (3.4.27) que la quantité

$$Q = y_a \sqrt{\frac{\Theta}{A_2 + C_1}} = 0{,}01309 \simeq 0{,}75°$$

représente l'amplitude d'oscillations de l'anneau extérieur du gyroscope (c'est-à-dire l'amplitude de variation de l'angle α).

Pour trouver l'amplitude $\dot{\alpha}_a$ de variation de la vitesse angulaire de l'anneau extérieur, il convient d'avoir recours à la formule (3.3.16) du paragraphe précédent. On a

$$\dot{\alpha}_a = \nu Q = 38{,}56 \text{ s}^{-1}.$$

Par conséquent,

$$\frac{(\dot{\alpha}_a)^2 (A_2 + C_1)}{2H \cos \beta_*} \operatorname{tg} \beta_* = 0{,}3365 \text{ s}^{-1}$$

et

$$\frac{(\dot{\alpha}_a)^2 (A_2 + C_1)^2}{8H^2 \cos^2 \beta_*} (7 + 9 \operatorname{tg}^2 \beta_*) = \frac{1}{8} y_a^2 (7 + 9 \operatorname{tg}^2 \beta_*) = 0{,}0006091.$$

Finalement, la formule (3.4.25) donne pour la vitesse moyenne de dérive de l'anneau extérieur, la valeur suivante:

$$\langle \dot{\alpha} \rangle = -0{,}3365(1 + 0{,}0006091).$$

Le calcul de $\langle \dot{\alpha} \rangle$ au moyen de la formule (3.4.30) aboutirait, bien entendu, au même résultat.

Dans l'exemple numérique que nous venons de considérer, le deuxième terme entre crochets de la formule (3.4.25) s'est trouvé très petit devant l'unité, malgré une valeur considérable des amplitudes d'oscillations angulaires des anneaux de cardan (près de un degré) et, par conséquent, une forte valeur de la vitesse angulaire $\langle \dot{\alpha} \rangle$ de la dérive systématique de l'anneau extérieur. Or, les formules (3.3.26) et (3.4.25) coïncident à ce terme près. Il est donc naturel de s'attendre que dans le cas général où la fonction $J(\beta)$ se représente par la formule (3.1.10) et donc ne se réduit pas à une constante, des calculs analogues, bien que plus complexes, conduiront à la même conclusion. Ainsi donc, cet exemple numérique donne lieu de considérer que la formule de Magnus approchée (3.3.26) établie au cours du paragraphe précédent est, sans aucun doute, digne de foi. On peut s'en assurer aussi directement en procédant à la minoration et à la majoration de la valeur mentionnée $\langle \dot{\alpha} \rangle$ de la vitesse angulaire de dérive systématique de l'anneau de cardan extérieur du gyroscope animé d'un mouvement de nutation. Essayons d'estimer $\langle \dot{\alpha} \rangle$ dans le cas le plus simple d'un gyroscope suspendu à la cardan dont les moments d'inertie de l'anneau intérieur et du rotor sont liés par la relation (3.1.27), si bien que la fonction $J(\beta)$ se réduit à la constante $A_2 + C_1$ et donc la vitesse angulaire $\langle \dot{\alpha} \rangle$ se traduit par la formule (3.4.18).

Remarquons qu'en faisant usage de l'égalité (3.4.19), on peut mettre les intégrales définies contenues dans la formule (3.4.18)

sous la forme suivante:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{\cos\beta} = \frac{1}{\cos\beta_*} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-2a\,\mathrm{tg}\,\beta_*\sin\vartheta - a^2\sin^2\vartheta}} =$$

$$= \frac{1}{\cos\beta_*} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-2a\,\mathrm{tg}\,\beta_*\sin\vartheta - a^2\sin^2\vartheta}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{1+2a\,\mathrm{tg}\,\beta_*\sin\vartheta - a^2\sin^2\vartheta}}\right) d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{\cos\beta_*} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon-\delta^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon-\delta^2}}\right) d\vartheta \qquad (3.4.31)$$

et, d'une manière analogue,

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin\vartheta\,d\vartheta}{\cos\beta} = \frac{1}{\cos\beta_*} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon-\delta^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon-\delta^2}}\right] \sin\vartheta\,d\vartheta. \qquad (3.4.32)$$

On a introduit ici les désignations

$$2a\,\mathrm{tg}\,\beta_*\sin\vartheta = \varepsilon, \quad a\sin\vartheta = \delta. \qquad (3.4.33)$$

Supposons que l'angle β_*, c'est-à-dire la valeur moyenne de l'angle β que l'axe de rotation propre du rotor fait avec la perpendiculaire au plan de l'anneau extérieur, est positif. Supposons également qu'il est nettement différent de 90° (inférieur à 75°, par exemple). Dans ce cas, si l'amplitude y_a d'oscillations angulaires de l'anneau intérieur du gyroscope est suffisamment petite, les anneaux de cardan seront à tout instant, loin de la position dans laquelle ils se confondent. En vertu de la dernière égalité (3.4.29), le paramètre a peut être posé égal à l'amplitude y_a mentionnée. Si cette dernière est petite (par exemple, inférieure à un degré), les quantités ε et δ définies par les formules (3.4.33) peuvent être considérées, d'après ce qui précède, comme très petites devant l'unité, soit

$$\varepsilon \ll 1, \quad \delta \ll 1. \qquad (3.4.34)$$

Introduisons un nombre positif de faible valeur

$$\varkappa = \frac{\varepsilon}{1-\delta^2} \qquad (3.4.35)$$

dont l'ordre de grandeur est, suivant les désignations (3.4.33), celui du paramètre a. On a maintenant

$$\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon-\delta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}}\frac{1}{\sqrt{1-\varkappa}}. \qquad (3.4.36)$$

En se servant des formules bien connues du développement en série de la puissance rationnelle d'un binôme, on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon-\delta^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}}\left(1+\frac{1}{2}\varkappa+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\varkappa^2+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\varkappa^3+\right.$$
$$\left.+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\varkappa^4+\ldots\right) \qquad (3.4.37)$$

et, de façon analogue,

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon-\delta^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}}\left(1-\frac{1}{2}\varkappa+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\varkappa^2-\right.$$
$$\left.-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\varkappa^3+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\varkappa^4-\ldots\right). \qquad (3.4.38)$$

La somme S, aussi bien que la différence R, des seconds membres des dernières formules est représentée finalement par une somme de seuls termes positifs. En effet,

$$S=\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon-\delta^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon-\delta^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}}\left(2+\frac{3}{4}\varkappa^2+\frac{3\cdot5\cdot7}{4\cdot6\cdot8}\varkappa^4+\ldots\right) \qquad (3.4.39)$$

et

$$R=\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon-\delta^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon-\delta^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}}\left(\varkappa+\frac{3\cdot5}{4\cdot6}\varkappa^3+\frac{3\cdot5\cdot7}{4\cdot6\cdot8}\varkappa^5+\ldots\right). \qquad (3.4.40)$$

Il est évident que

$$S>\frac{2}{\sqrt{1-\delta^2}}>2 \qquad (3.4.41)$$

et, compte tenu de la formule (3.4.35),

$$R>\frac{\varkappa}{\sqrt{1-\delta^2}}>\varkappa>\varepsilon. \qquad (3.4.42)$$

D'un autre côté, les égalités (3.4.39) et (3.4.40) entraînent les inégalités suivantes:

$$S<\frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}}(2+\varkappa^2+\varkappa^4+\varkappa^6+\ldots)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}}\left(2+\frac{\varkappa^2}{1-\varkappa^2}\right)=S^+ \qquad (3.4.43)$$

et

$$R<\frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}}(\varkappa+\varkappa^3+\varkappa^5+\ldots)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}}\left(\varkappa+\frac{\varkappa^3}{1-\varkappa^2}\right)=R^+. \qquad (3.4.44)$$

Compte tenu de (3.4.31) et (3.4.32), ainsi que de (3.4.39) et (3.4.40), la formule (3.4.18) exprimant la dérive systématique $\langle\dot{\alpha}\rangle$ de l'anneau de cardan extérieur du gyroscope animé d'un mouvement de nutation peut se mettre sous la forme

$$\langle\dot{\alpha}\rangle = -\frac{Ha\cos\beta_*}{A_2+C_1}\,\frac{\int\limits_0^{\pi/2} R\sin\vartheta\,d\vartheta}{\int\limits_0^{\pi/2} S\,d\vartheta}. \tag{3.4.45}$$

En tenant compte maintenant des inégalités (3.4.41), (3.4.42), (3.4.43) et (3.4.44), on obtient l'estimation suivante:

$$\frac{\int\limits_0^{\pi/2} \varepsilon\sin\vartheta\,d\vartheta}{\int\limits_0^{\pi/2} S^+\,d\vartheta} < -\frac{\langle\dot{\alpha}\rangle(A_2+C_1)}{Ha\cos\beta_*} < \frac{\int\limits_0^{\pi/2} R^+\sin\vartheta\,d\vartheta}{\int\limits_0^{\pi/2} 2\,d\vartheta}. \tag{3.4.46}$$

Compte tenu de la formule (3.4.43) et des désignations (3.4.35) et (3.4.33), on a

$$\int\limits_0^{\pi/2} S^+\,d\vartheta = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}}\left(2+\frac{\varepsilon^2}{(1-\delta^2)^2-\varepsilon^2}\right)d\vartheta =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-a^2\sin^2\vartheta}}\left[2+\frac{(2a\,\mathrm{tg}\,\beta_*\sin\vartheta)^2}{(1-a^2\sin^2\vartheta)^2-(2a\,\mathrm{tg}\,\beta_*\sin\vartheta)^2}\right]d\vartheta. \tag{3.4.47}$$

Il est évident que dans tout l'intervalle d'intégration $]0, \pi/2[$ on a

$$1 - a^2\sin^2\vartheta > 1 - a^2 \tag{3.4.48}$$

et

$$(1 - a^2\sin^2\vartheta)^2 - (2a\,\mathrm{tg}\,\beta_*\sin\vartheta)^2 >$$

$$> 1 - 2a^2 - (2a\,\mathrm{tg}\,\beta_*)^2. \tag{3.4.49}$$

Par conséquent,

$$\int\limits_0^{\pi/2} S^+\,d\vartheta < \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\left[2+\frac{(2a\,\mathrm{tg}\,\beta_*\sin\vartheta)^2}{1-2a^2-(2a\,\mathrm{tg}\,\beta_*)^2}\right]d\vartheta =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}\left(1+\frac{a^2\,\mathrm{tg}^2\,\beta_*}{1-2a^2-4a^2\,\mathrm{tg}^2\,\beta_*}\right). \tag{3.4.50}$$

Des considérations analogues conduisent à la conclusion que

$$\int\limits_0^{\pi/2} R^+\sin\vartheta\,d\vartheta < \frac{\frac{\pi}{2}a\,\mathrm{tg}\,\beta_*}{\sqrt{(1-a^2)^3}}\left(1+\frac{3a^2\,\mathrm{tg}^2\,\beta_*}{1-2a^2-4a^2\,\mathrm{tg}^2\,\beta_*}\right). \tag{3.4.51}$$

Compte tenu de la première formule (3.4.33), les deux dernières inégalités permettent de remplacer l'estimation (3.4.46) de $\langle\dot{\alpha}\rangle$ par la suivante

$$\frac{1}{2} a \sqrt{1-a^2} \operatorname{tg} \beta_* \frac{1-2a^2-4a^2 \operatorname{tg}^2 \beta_*}{1-2a^2-3a^2 \operatorname{tg}^2 \beta_*} < -\frac{(A_2+C_1)\langle\dot{\alpha}\rangle}{Ha\cos\beta_*} < \frac{\frac{1}{2} a \operatorname{tg} \beta_*}{\sqrt{(1-a^2)^3}} \frac{1-2a^2-a^2 \operatorname{tg}^2 \beta_*}{1-2a^2-4a^2 \operatorname{tg}^2 \beta_*}. \quad (3.4.52)$$

Si dans la double inégalité obtenue on rejette les termes de troisième ordre en a, elle se réduit à l'égalité

$$-\frac{(A_2+C_1)\langle\dot{\alpha}\rangle}{Ha\cos\beta_*} = \frac{1}{2} a \operatorname{tg} \beta_*. \quad (3.4.53)$$

En y remplaçant le paramètre a par sa valeur suivant la formule (3.4.11) et en tenant compte de la relation (3.4.24), on tire de cette dernière égalité la formule

$$\dot{\alpha}_m = -\frac{Ha^2 \sin\beta_*}{2(A_2+C_1)} = -\frac{\dot{\alpha}_a^2 (A_2+C_1) \operatorname{tg}\beta_*}{2H\cos\beta_*}. \quad (3.4.54)$$

Elle coïncide avec la formule de Magnus (3.3.26), si l'on ne fait pas de distinction entre les quantités β_0 et β_*.

Il n'est pas difficile de voir que la quantité $\frac{1}{2}a \operatorname{tg} \beta_*$ satisfait, elle aussi, à la double inégalité (3.4.52), ce qui implique

$$\left| -\frac{(A_2+C_1)\langle\dot{\alpha}\rangle}{Ha\cos\beta_*} - \frac{1}{2} a \operatorname{tg}\beta_* \right| < \frac{1}{2} a \operatorname{tg}\beta_* \frac{N(a;\ \beta_*)}{\sqrt{(1-a^2)^3}}, \quad (3.4.55)$$

où

$$N(a;\ \beta_*) = \frac{1-2a^2-a^2 \operatorname{tg}^2 \beta_*}{1-2a^2-4a^2 \operatorname{tg}^2 \beta_*} - (1-a^2)^2 \frac{1-2a^2-4a^2 \operatorname{tg}^2 \beta_*}{1-2a^2-3a^2 \operatorname{tg}^2 \beta_*}. \quad (3.4.56)$$

On en tire l'estimation suivante de la formule de Magnus:

$$|\langle\dot{\alpha}\rangle - \dot{\alpha}_m| < |\dot{\alpha}_m| \frac{N(a;\ \beta_*)}{\sqrt{(1-a^2)^3}}, \quad (3.4.57)$$

qui est valable dans le cas où est vérifiée la relation (3.1.27), c'est-à-dire lorsque $A_1 + A = C_1$. Ici $\dot{\alpha}_m$ est la valeur de la dérive systématique du gyroscope, calculée au moyen de la formule (3.4.54).

L'estimation (3.4.57) peut être remplacée par une estimation plus simple si l'on tient compte du fait qu'on a toujours

$$N(a;\ \beta_*) < a^2 \frac{2+4 \operatorname{tg}^2 \beta_*}{1-2a^2-4a^2 \operatorname{tg}^2 \beta_*} \simeq 2a^2 + 4a^2 \operatorname{tg}^2 \beta_*. \quad (3.4.58)$$

La différence entre ces estimations est peu importante.

Dans l'exemple numérique considéré ci-dessus, la dérive systématique de l'anneau extérieur du gyroscope, calculée par la formule de Magnus s'élevait à $-0{,}3365\ s^{-1}$, alors que l'amplitude y_a d'oscillations de l'anneau de cardan intérieur était prise égale à 1° (0,01745).

En remarquant que d'après les égalités (3.4.29) $a = y_a$ et en utilisant dans (3.4.56) les autres données numériques adoptées dans l'exemple considéré plus haut, on obtient

$$|\langle\dot{\alpha}\rangle + 0{,}3365\,| < 0{,}0006158\ s^{-1}.$$

Ainsi, l'erreur introduite dans notre exemple par la formule de Magnus est, en tout cas, inférieure à 1 %. Signalons que le calcul de la même erreur, effectué plus haut au moyen de séries, donne lieu de croire qu'en réalité cette erreur est encore plus petite.

Dans le cas général, lorsque la fonction $J(\beta)$ ne se réduit pas à la constante $A_2 + C_1$, les estimations de la vitesse angulaire $\langle\dot{\alpha}\rangle$ de dérive systématique de l'anneau extérieur du gyroscope ont été obtenues, par des voies différentes, par K. Valéev [1] et V. Jouravlev [2]. De plus, en utilisant les méthodes de programmation linéaire, V. Jouravlev a construit pour le cas de $J(\beta) = A_2 + C_1$ une suite de majorants et de minorants qui converge vers $\langle\dot{\alpha}\rangle$ cherchée.

§ 5. Stabilisateur gyroscopique à un axe

Les gyroscopes sont utilisés dans de nombreux cas pour stabiliser les différents dispositifs (plates-formes pour les accéléromètres, aériens de radar, etc.) placés sur des mobiles et animés, en plus de leur déplacement principal, encore de mouvements angulaires supplémentaires, généralement de caractère aléatoire. La stabilisation gyroscopique peut être indirecte ou directe (asservie). Dans le premier cas, le dispositif à stabiliser reproduit, dans l'essentiel, à l'aide de systèmes d'asservissement, le même mouvement angulaire par rapport au support mobile que celui du gyroscope lui-même. Dans le second cas, le gyroscope fait partie du dispositif à stabiliser et peut, à certains instants, supporter directement tous les efforts qui tendent à troubler cette stabilisation. Plus haut, nous avons déjà étudié certaines propriétés des stabilisateurs gyroscopiques asservis,

---

[1]) *K. Valéev* « Sur la précession d'un gyroscope symétrique suspendu à la cardan » (*Валеев К. Г.* « О прецессии симметричного гироскопа в кардановом подвесе ». — Механика твердого тела. Республиканский межведомственный сборник, № 7, Киев, « Наукова думка », 1974) (en russe).

[2]) *V. Jouravlev* « Sur la question des estimations de l'effet Magnus » (*Журавлев В. Ф.* « К вопросу об оценках эффекта Магнуса ».— Докл. АН СССР, 1976, т. 227, № 1) (en russe).

principalement du fait qu'au point de vue de la théorie de précession des gyroscopes leur mouvement est soumis à des liaisons de caractère non holonome (v. tome I, chap. IV, §§ 1, 4 et 5). Comme il a été dit aux §§ 2 et 5 du chapitre précédent, les équations établies sur la base de la théorie de précession des gyroscopes ne sont applicables ni à une étude détaillée des phénomènes transitoires intervenant dans les stabilisateurs gyroscopiques, ni à l'étude de leur stabilité

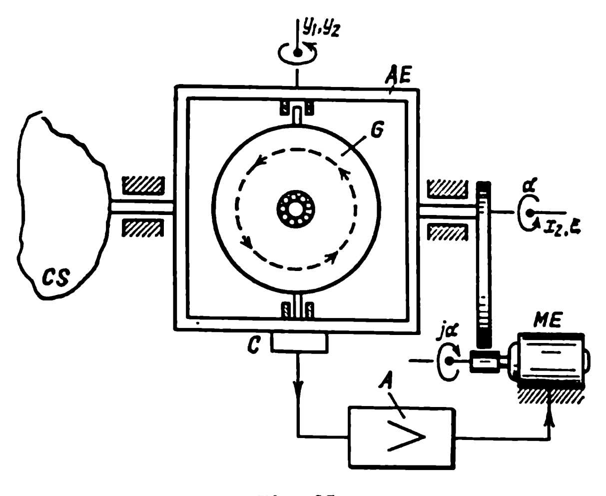


Fig. 95

de fonctionnement. Pour la résolution de ces questions, il faut faire usage des équations complètes du mouvement d'un dispositif gyroscopique donné, en y gardant des termes contenant les dérivées secondes par rapport au temps des coordonnées généralisées.

Les stabilisateurs gyroscopiques asservis sont des systèmes électromécaniques. De ce fait, le système d'équations différentielles qui décrivent leur comportement doit encore inclure les équations des phénomènes transitoires qui se déroulent dans les circuits électriques de tels systèmes [1]).

Le paragraphe actuel se propose d'étudier la théorie linéaire d'un stabilisateur gyroscopique à un axe dont les organes essentiels sont (fig. 95) le gyroscope G et le moteur électrique ME à courant continu et à excitation indépendante, commandé par l'amplificateur le plus simple A. L'anneau de cardan extérieur AE du gyroscope G forme mécaniquement un tout avec le corps à stabiliser CS ou a avec

[1]) Voir, par exemple, *Ишлинский А. Ю.* « Механика гироскопических систем » (*A. Ishlinsky* « Mécanique des systèmes gyroscopiques »). M., Изд-во АН СССР, 1963 (en russe).

lui un axe commun. Le moteur ME que l'on appelle souvent moteur de stabilisation est relié à l'anneau AE par l'intermédiaire d'un démultiplicateur de rapport de réduction j. L'amplificateur reçoit à son entrée la tension prélevée au capteur C à l'aide duquel on enregistre l'angle β de rotation du boîtier de gyroscope G par rapport à son anneau extérieur AE. Posons que la force électromotrice V développée à la sortie de l'amplificateur est liée à l'angle β par la relation différentielle

$$\tau \frac{dV}{dt} + V = \mu\beta. \tag{3.5.1}$$

Ici le paramètre μ est la *pente de caractéristique* de l'amplificateur, rapportée à l'angle β, et τ est la constante de temps. La relation (3.5.1) est une des plus simples.

La variation du courant i_1 dans le circuit électrique de l'induit d'un moteur à courant continu à excitation indépendante se décrit par l'équation différentielle

$$V = Ri_1 + L\frac{di_1}{dt} + C\frac{d\varphi}{dt} \tag{3.5.2}$$

dans laquelle R est la résistance et L l'inductance propre de ce circuit, C le coefficient de force contre-électromotrice du moteur et φ l'angle de rotation du rotor du moteur par rapport au stator.

Le couple moteur M_φ développé sur l'arbre du moteur s'exprime, si l'on néglige les flux de dispersion magnétique, par la formule

$$M_\varphi = \frac{C}{g} i_1, \tag{3.5.3}$$

où g est un coefficient numériquement égal à 9,81 si le couple moteur M_φ est mesuré en kilogrammètres, le coefficient de force contre-électromotrice C en volts multipliés par seconde et l'intensité du courant i_1 en ampères.

Expliquons le principe de fonctionnement du stabilisateur gyroscopique sur la base des lois de la théorie de précession des gyroscopes. A cet effet, considérons son comportement sur un support immobile, tout de suite après l'application à l'axe de l'anneau extérieur AE du gyroscope G d'un couple dit déstabilisant M^* constant en intensité et en direction. Le couple M^* fait précessionner le rotor de gyroscope G qui tourne, en entraînant le boîtier, par rapport à l'anneau extérieur AE autour de l'axe y_1 (y_2) du boîtier. Dès que l'angle β devient différent de zéro, le capteur C commence à envoyer à l'entrée de l'amplificateur A une tension progressivement croissante. Il en résultera une croissance de la tension obtenue à la sortie de l'amplificateur A et, par conséquent, une augmentation de l'intensité du couple M_φ sur l'arbre du moteur ME. L'anneau extérieur du gyroscope sera soumis, par l'intermédiaire du démultiplicateur, à un couple M_α^r croissant en même temps que l'angle β.

Négligeons le frottement dans le démultiplicateur, ainsi que, comme on doit le faire toujours lorsqu'on applique les équations de la théorie de précession des gyroscopes, les moments d'inertie du rotor de moteur et des parties tournantes de démultiplicateur. On peut alors considérer que de façon approchée

$$M_\alpha^r = -jM_\varphi. \tag{3.5.4}$$

Par un branchement convenable de l'enroulement d'induit du moteur ME sur les bornes de sortie de l'amplificateur A, on peut toujours assurer au couple M_α^r un sens tel qu'il soit opposé au sens du couple déstabilisant M^*. C'est pourquoi, lorsque l'égalité

$$M^* + M_\alpha^r = 0 \tag{3.5.5}$$

est réalisée, l'angle β cesse de varier.

Supposons que le frottement dans les paliers de l'axe y_1 du boîtier est négligeable et que la somme des moments, par rapport à cet axe, de toutes les autres forces agissant sur le boîtier et le rotor est nulle. Selon la théorie de précession des gyroscopes (v. chap. II, §§ 1 et 2), l'angle α gardera alors sa valeur initiale pendant tout le temps de variation de l'angle β. Ceci signifie que la stabilisation de l'anneau extérieur dans l'exemple considéré peut se conserver aussi longtemps que l'on veut, si seulement le moteur peut développer un couple M_φ capable de faire équilibre au couple déstabilisant M^*. Dans le cas contraire, l'axe du rotor de gyroscope peut être amené, par suite de la précession, en coïncidence avec l'axe de l'anneau extérieur, et la stabilisation sera dérangée.

Il semble à première vue qu'en choisissant convenablement le rapport de réduction j, on peut, quel que soit le moteur utilisé, assurer l'égalité (au signe près) du couple M_α^r (exercé par le démultiplicateur sur l'anneau extérieur) au couple déstabilisant M^*, quelle que soit l'intensité de ce dernier. Cependant, il n'en est pas ainsi. La valeur maximale admissible du rapport de réduction j se détermine par les conditions de stabilité du stabilisateur gyroscopique. Si les conditions de stabilité ne sont pas réalisées, il en résulte, en règle générale, l'apparition des oscillations angulaires divergentes (c'est-à-dire d'amplitude croissante) de l'anneau extérieur et du boîtier du gyroscope. La pulsation de telles oscillations est généralement incomparablement plus élevée que celle des oscillations du support sur lequel est placé le stabilisateur. C'est pourquoi, pour l'étude des conditions de stabilité du stabilisateur gyroscopique, on convient de supposer que son support est immobile.

Dans des systèmes sans frottement à sec, l'instabilité se manifeste d'abord par des oscillations de faibles amplitudes. Il semble donc logique d'avoir recours, pour établir les conditions de stabilité, aux méthodes de la théorie des petites oscillations et, par conséquent, aux équations linéarisées du mouvement du gyroscope.

Commençons par utiliser les équations complètes (3.3.1) du mouvement d'un gyroscope libre suspendu à la cardan, qui ont été indiquées au § 3 du présent chapitre. Introduisons dans le second membre de la première de ces équations le couple déstabilisant M^* et le couple M_α^r exercé par le démultiplicateur sur l'anneau de cardan extérieur. En conservant les désignations adoptées dans les paragraphes mentionnés, on obtient les équations

$$J(\beta)\frac{d^2\alpha}{dt^2}+J'(\beta)\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\beta}{dt}+H\cos\beta\frac{d\beta}{dt}=M^*+M_\alpha^r, \quad (3.5.6)$$

$$\Theta\frac{d^2\beta}{dt^2}-\frac{1}{2}J'(\beta)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2-H\cos\beta\frac{d\alpha}{dt}=0. \quad (3.5.7)$$

Pour l'analyse qui suit, il est nécessaire de tenir compte de l'équation du mouvement du rotor de moteur de stabilisation. Dans le cas considéré où le support est immobile, elle est de la forme

$$\Phi\frac{d^2\varphi}{dt^2}=M_\varphi-M_\varphi^r, \quad (3.5.8)$$

où Φ est le moment d'inertie du rotor de moteur, φ l'angle de rotation du rotor par rapport au stator ou, ce qui revient au même, par rapport au support immobile du stabilisateur gyroscopique, M_φ^r le couple exercé par le moteur sur le démultiplicateur.

Si l'on néglige le frottement dans les éléments du démultiplicateur et leur inertie, il convient de poser

$$M_\alpha^r=-jM_\varphi^r. \quad (3.5.9)$$

Remarquons que la relation (3.5.4) indiquée plus haut découle de l'égalité (3.5.9) et de l'équation (3.5.8), si l'on pose dans cette dernière $\Phi=0$, c'est-à-dire si l'on néglige l'inertie du rotor de moteur.

Multiplions par le rapport de réduction j le premier et le second membre de l'équation (3.5.8) et soustrayons-les respectivement du premier et du second membre de l'équation (3.5.6). Egalons les différences ainsi obtenues et tenons compte de l'égalité (3.5.9), ainsi que du fait que les vitesses angulaires $d\varphi/dt$ du rotor de moteur et $d\alpha/dt$ de l'anneau extérieur sont liées par la relation

$$\frac{d\varphi}{dt}=-j\frac{d\alpha}{dt}. \quad (3.5.10)$$

Après réduction des termes semblables et remplacement du couple moteur M_φ par son expression (3.5.3), on obtient l'équation suivante :

$$[J(\beta)+j^2\Phi]\frac{d^2\alpha}{dt^2}+J'(\beta)\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\beta}{dt}+H\cos\beta\frac{d\beta}{dt}=$$

$$=-\frac{jC}{g}i_1+M^*. \quad (3.5.11)$$

Les équations (3.5.11), (3.5.7), (3.5.2) et (3.5.1) forment un système complet d'équations différentielles qui décrivent le comportement d'un stabilisateur gyroscopique. Celui-ci est soumis à l'action du couple déstabilisant M^* appliqué à l'axe de l'anneau extérieur du gyroscope. De même que dans les paragraphes précédents du présent chapitre, nous supposons absents: tous les couples extérieurs appliqués au boîtier et au rotor de gyroscope, le frottement dans les paliers de l'axe de l'anneau extérieur et de l'axe du boîtier, ainsi que le moment, par rapport à l'axe du boîtier, des forces exercées par l'anneau extérieur sur le boîtier.

Supposons que le couple déstabilisant M^* reste constant. Il est facile de vérifier que dans ce cas le système d'équations sus-mentionné admet une solution particulière

$$\alpha = \alpha^0, \quad \beta = \beta^*, \quad i_1 = i_1^*, \quad V = V^*, \tag{3.5.12}$$

où α^0 est une constante arbitraire et β^*, i_1^* et V^* sont des quantités définies par les formules

$$\beta^* = \frac{Rg}{\mu jC} M^*, \quad i_1^* = \frac{g}{jC} M^*, \quad V^* = \frac{Rg}{jC} M^*. \tag{3.5.13}$$

Remplaçons dans l'équation (3.5.2) la vitesse angulaire $d\varphi/dt$ du rotor de moteur par son expression (3.5.10). Puis, dans les équations (3.5.11), (3.5.7), (3.5.2) et (3.5.1) posons

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha^0 + x, & i_1 &= i_1^* + z, \\ \beta &= \beta^* + y, & V &= V^* + v \end{aligned} \tag{3.5.14}$$

et n'y gardons que les termes de premier ordre en x, y, z et v, ainsi qu'en leurs dérivées premières et secondes par rapport au temps. On obtient finalement le système suivant d'équations différentielles linéaires à coefficients constants par rapport aux nouvelles variables x, y, z et v:

$$\begin{aligned} &I \frac{d^2x}{dt^2} + H \cos\beta^* \frac{dy}{dt} = -\frac{jC}{g} z, \\ &\Theta \frac{d^2y}{dt^2} - H \cos\beta^* \frac{dx}{dt} = 0, \\ &L \frac{dz}{dt} + Rz - jC \frac{dx}{dt} = v, \\ &\tau \frac{dv}{dt} + v = \mu y. \end{aligned} \tag{3.5.15}$$

Ici, le coefficient

$$I = J(\beta^*) + j^2\Phi \tag{3.5.16}$$

est généralement appelé *moment d'inertie réduit* du stabilisateur gyroscopique.

Le fonctionnement du stabilisateur gyroscopique sera stable si l'équation caractéristique du système d'équations différentielles linéaires (3.5.15) n'a ni de racines réelles positives, ni de racines complexes à parties réelles positives. Cette équation caractéristique est de la forme

$$\begin{vmatrix} I\lambda^2 & H\cos\beta^*\lambda & jC/g & 0 \\ -H\cos\beta^*\lambda & \Theta\lambda^2 & 0 & 0 \\ -jC\lambda & 0 & L\lambda+R & -1 \\ 0 & -\mu & 0 & \tau\lambda+1 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.5.17)$$

Dans certains cas, on peut négliger les phénomènes transitoires qui interviennent dans les circuits de l'amplificateur et poser nulle la constante de temps τ figurant dans les équations (3.5.1) et (3.5.15) [1]. L'équation caractéristique (3.5.17) devient alors après le développement du déterminant:

$$\lambda\,(a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4) = 0, \quad (3.5.18)$$

où

$$\begin{aligned} a_0 &= I\Theta L, \\ a_1 &= I\Theta R, \\ a_2 &= H^2\cos^2\beta^* L + \frac{j^2C^2}{g}\Theta, \\ a_3 &= H^2\cos^2\beta^* R, \\ a_4 &= \frac{\mu jC}{g} H\cos\beta^*. \end{aligned} \quad (3.5.19)$$

L'une des racines de l'équation algébrique (3.5.18) est nulle. Ceci tient à ce que la fonction cherchée x n'intervient pas dans le système d'équations différentielles (3.5.15) (elle n'y est représentée que par ses dérivées première et seconde). Les autres racines de l'équation (3.5.18) sont négatives ou, lorsqu'elles sont complexes, n'ont pas de parties réelles positives si l'inégalité connue de Routh [2])

$$a_1a_2a_3 \geqslant a_1^2a_4 + a_0a_3^2 \quad (3.5.20)$$

---

[1]) Pour le cas de $\tau \neq 0$, voir, par exemple, le livre de *Ya. Reutenberg* « Gyroscopes » (*Ройтенберг Я. Н.* « Гироскопы ». М., « Наука », 1966) (en russe). Des cas plus complexes de la liaison différentielle entre les tensions d'entrée et de sortie de l'amplificateur, considérés dans l'étude de la stabilité d'un stabilisateur gyroscopique, sont exposés, par exemple, dans l'article de *I. Borissenok* « Amélioration des phénomènes transitoires dans un gyrostabilisateur à l'aide de circuits de correction » (*Борисенок И. Т.* « Улучшение переходных процессов в гиростабилизаторе при помощи корректирующих контуров ». — « Вестник МГУ ». Сер. 1, Математика и механика, 1960, № 1 (en russe)).

[2]) Voir, par exemple, *A. Kurosh* « Cours d'algèbre supérieure », Ed. « Mir », Moscou, 1980 (traduit du russe).

est réalisée. En y portant les valeurs des coefficients a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 données par les égalités (3.5.19), on obtient, toutes réductions effectuées, la condition suivante de stabilité d'un stabilisateur gyroscopique à un axe :

$$\frac{jC}{I} \geqslant \frac{\mu}{H \cos \beta^*}, \qquad (3.5.21)$$

qui a été établie pour la première fois en 1943 par V. Kouznetsov. Il y a lieu d'attirer l'attention sur la circonstance suivante. La condition de stabilité (3.5.21) ne comprend ni l'inductance propre L, ni la résistance R du circuit d'induit, ni le moment d'inertie Θ de l'ensemble « boîtier-rotor » du gyroscope par rapport à l'axe du boîtier, ce qui semble un peu surprenant. Cependant, ces grandeurs et, bien entendu, certains autres paramètres du gyrostabilisateur influent sur le caractère des phénomènes transitoires se déroulant dans le gyrostabilisateur et sur l'amplitude de ses oscillations forcées [1]).

La transformation de la condition (3.5.21) en une égalité signifie dans le cas général que l'équation caractéristique (3.5.18) a deux racines imaginaires pures, ce qui correspond au *seuil de stabilité* du stabilisateur gyroscopique. Il est donc logique de prendre pour coefficient de stabilité du stabilisateur gyroscopique que nous décrivons le rapport du premier membre de l'inégalité (3.5.21) à son second membre. Désignons ce coefficient par s. On a

$$s = \frac{jCH \cos \beta^*}{\mu I}. \qquad (3.5.22)$$

Portons dans cette relation l'expression (3.5.16) de I. Puisque d'après la formule (3.1.10) obtenue au § 1 du présent chapitre on a

$$J(\beta^*) = A_2 + (A_1 + A) \cos^2\beta^* + C_1 \sin^2\beta^*, \qquad (3.5.23)$$

l'expression donnant le coefficient de stabilité devient

$$s = \frac{jCH \cos \beta^*}{\mu \left[A_2 + C_1 + j^2\Phi + (A_1 + A - C_1) \cos^2 \beta^*\right]}. \qquad (3.5.24)$$

Le coefficient s dépend, en particulier, de l'angle β^* pour lequel, comme il a été indiqué plus haut, le couple déstabilisant M^* est équilibré par le couple M_α^r que le moteur de stabilisation ME développe autour de l'axe de l'anneau extérieur. Lorsque l'angle β^* est égal à $\pi/2$, le coefficient s devient nul. Si, comme d'habitude,

$$A_2 + C_1 + j^2\Phi > A_1 + A - C_1, \qquad (3.5.25)$$

le coefficient s diminue de façon monotone, lorsque l'angle β^* varie de zéro à $\pi/2$. En vertu de la condition (3.5.21), le stabilisateur

[1]) Voir note au bas de la p. 213.

gyroscopique devient instable dès que le coefficient s devient inférieur à l'unité.

Considérons maintenant la variation du coefficient de stabilité du stabilisateur gyroscopique en fonction du rapport de réduction j. D'après la formule (3.5.24), le coefficient s s'annule pour $j = 0$ et tend vers zéro lorsque ce rapport de réduction croît indéfiniment. Ceci signifie que le fonctionnement du stabilisateur gyroscopique est instable, lorsque les valeurs du rapport de réduction j sont trop petites ou au contraire trop grandes. Le coefficient s prend sa valeur maximale pour une valeur du rapport de réduction j égale à

$$j_m = \sqrt{\frac{J(\beta^*)}{\Phi}}. \tag{3.5.26}$$

Cette valeur maximale s'exprime par

$$s_m = \frac{CH \cos \beta^*}{2\mu \sqrt{J(\beta^*)\,\Phi}}. \tag{3.5.27}$$

Si s_m est inférieure à l'unité pour $\beta^* = 0$, le fonctionnement du stabilisateur est instable, quel que soit le rapport de réduction du démultiplicateur, à condition que soit réalisée l'inégalité (3.5.25) (pratiquement elle l'est toujours). Pour que le stabilisateur gyroscopique devienne de nouveau stable, il faut modifier convenablement ses paramètres et, en particulier, augmenter le moment cinétique propre H du gyroscope ou diminuer la pente de caractéristique de l'amplificateur, c'est-à-dire le paramètre μ. Ceci signifie que si l'on veut assurer la stabilité de fonctionnement du stabilisateur gyroscopique, on ne peut pas choisir arbitrairement le paramètre μ. La valeur maximale admissible de ce paramètre doit satisfaire à l'inégalité (3.5.21). Par là même, se trouve limitée, en vertu de la première formule (3.5.13), la valeur maximale admissible du couple déstabilisant M^* pour une valeur maximale possible donnée de l'angle β^* que le boîtier du gyroscope fait avec l'anneau extérieur. La stabilité du stabilisateur gyroscopique peut être améliorée dans une certaine mesure par un choix rationnel des circuits dits de correction [1]).

Une valeur élevée du rapport de réduction j est indésirable non seulement parce qu'elle peut provoquer la perte de stabilité du stabilisateur gyroscopique. Lorsque le support du stabilisateur effectue des oscillations angulaires, le rotor du moteur de stabilisation reproduit ces oscillations avec une plus grande amplitude (sauf dans le cas, qui sera traité plus loin, où le rapport de réduction j est égal à —1). Il en résultera un couple supplémentaire exercé par le démultiplicateur sur le rotor de moteur, conformément au mouvement angulaire de ce dernier. Suivant le principe de l'égalité de

[1]) Voir note [1]) au bas de la p. 218.

l'action et de la réaction, l'anneau de cardan extérieur du gyroscope sera soumis, à son tour, à un couple supplémentaire. Ce dernier peut provoquer un mouvement angulaire inadmissible du boîtier du gyroscope par rapport à son anneau extérieur.

Supposons que le support du stabilisateur gyroscopique oscille autour de l'axe de stabilisation, en faisant avec le plan fixe un angle θ qui varie suivant une loi harmonique, par exemple, avec l'amplitude θ_a et la pulsation p, soit

$$\theta = \theta_a \cos pt. \tag{3.5.28}$$

Dans ce cas, par quantité α intervenant dans les équations (3.5.6) et (3.5.7), il convient d'entendre maintenant l'angle caractérisant la rotation de l'anneau extérieur du gyroscope par rapport au plan fixe (contenant l'axe de stabilisation). A son tour, l'angle φ de rotation du rotor de moteur, figurant dans l'équation (3.5.8), doit être compté à partir du même plan, et la relation (3.5.10) doit être remplacée par la suivante :

$$\frac{d}{dt}(\varphi-\theta) = -j\frac{d}{dt}(\alpha-\theta). \tag{3.5.29}$$

En effet, les différences $\varphi - \theta$ et $\alpha - \theta$ représentent respectivement les angles de rotation du rotor de moteur et de l'anneau extérieur par rapport au support et sont liées entre elles par la présence du démultiplicateur.

Posons $M^* = 0$ dans l'équation (3.5.6) et remplaçons le couple M_α^r par son expression $-jM_\varphi^r$, conformément à l'égalité (3.5.9) restée inchangée. Après cela, faisons disparaître, à l'aide de l'équation (3.5.8), la quantité M_φ^r et puis, à l'aide de la relation (3.5.29), l'angle φ. Nous obtenons finalement, compte tenu de la formule (3.5.3), l'équation différentielle

$$J(\beta)\frac{d^2\alpha}{dt^2} + J'(\beta)\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\beta}{dt} + H\cos\beta\frac{d\beta}{dt} = \\ = -j^2\Phi\frac{d^2\alpha}{dt^2} + j(j+1)\Phi\frac{d^2\theta}{dt^2} - j\frac{C}{g}i_1. \tag{3.5.30}$$

D'après ce qui précède, étant donné que le support du stabilisateur gyroscopique est animé d'un mouvement angulaire, l'angle φ intervenant dans l'équation (3.5.2) qui décrit les phénomènes transitoires dans le circuit d'induit du moteur de stabilisation, doit être remplacé par la différence $\varphi - \theta$. Après cela, compte tenu de la relation (3.5.29), l'équation (3.5.2) devient

$$V = Ri_1 + L\frac{di_1}{dt} - jC\left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{d\theta}{dt}\right). \tag{3.5.31}$$

Lorsque le couple déstabilisant M^* est nul, la relation différentielle (3.5.1) et la formule (3.5.3) restent, bien entendu, sans modifications.

Si le support du stabilisateur est immobile, le système d'équations (3.5.30), (3.5.7), (3.5.31), (3.5.1) et (3.5.3) admet une solution évidente

$$\alpha = \alpha_0, \quad \beta = 0, \quad i_1 = 0, \quad V = 0, \quad M_\varphi = 0, \quad (3.5.32)$$

où α_0 est une constante qu'on peut poser égale à zéro sans nuire en rien à la généralité des raisonnements qui vont suivre. Par conséquent, lorsque les mouvements angulaires du support sont petits, par exemple lorsque les valeurs de l'amplitude θ_a dans l'expression (3.5.28) déterminant la variation harmonique de l'angle θ sont faibles, toutes les variables sus-énumérées, à savoir: α, β, i_1, M_φ, V et leurs dérivées par rapport au temps peuvent être considérées comme des petits. De ce fait, gardons dans les équations énumérées les seuls termes de premier ordre en ces variables. On obtient, après quelques transformations simples, le système suivant d'équations différentielles linéaires à coefficients constants, par rapport aux variables α, β, i_1:

$$\begin{aligned} I_0 \frac{d^2\alpha}{dt^2} + H \frac{d\beta}{dt} &= -\frac{jC}{g} i_1 + j(j+1)\Phi \frac{d^2\theta}{dt^2}, \\ \Theta \frac{d^2\beta}{dt^2} - H \frac{d\alpha}{dt} &= 0, \qquad (3.5.33) \\ Ri_1 + L\frac{di_1}{dt} - jC\frac{d\alpha}{dt} &= -jC\frac{d\theta}{dt} + \mu\beta. \end{aligned}$$

Notons que la constante de temps τ figurant dans la relation différentielle (3.5.1) est, comme précédemment, posée égale à zéro. En outre, suivant la formule (3.5.16), on a introduit la désignation

$$I_0 = J(0) + j^2\Phi. \quad (3.5.34)$$

Les termes $j(j+1)\Phi d^2\theta/dt^2$ et $-jCd\theta/dt$ interviennent respectivement dans les seconds membres de la première et de la troisième équation du système (3.5.33). Ils jouent le rôle des facteurs qui perturbent l'état stationnaire du stabilisateur, déterminé par les égalités (3.5.32). Le premier de ces termes caractérise l'intensité des forces d'inertie s'exerçant sur l'anneau extérieur du stabilisateur gyroscopique, lesquelles sont dues à la rotation non uniforme forcée du rotor de moteur, en cas des mouvements angulaires du support. Ces forces disparaissent pour $j = -1$, ce qui correspond soit à la disposition directe du rotor de moteur sur l'axe de l'anneau extérieur (sans démultiplicateur), soit à des roues dentées identiques, placées à l'entrée et à la sortie du démultiplicateur avec emploi d'une roue parasite dont le moment d'inertie peut être négligé (fig. 96). Il n'est pas difficile de s'assurer que lorsque le support est animé de

mouvements angulaires, le rotor du moteur ne tourne pas dans ce dernier cas si l'anneau extérieur du stabilisateur est immobile.

Le second terme perturbateur (3.5.34) caractérise une tension supplémentaire qui est engendrée, lorsque le moteur électrique à excitation indépendante fonctionne en génératrice. Le courant électrique que cette tension fait circuler dans le circuit d'induit du moteur de stabilisation provoque l'apparition d'un couple supplémentaire s'exerçant sur l'arbre du moteur et donc d'un couple appliqué à l'axe de l'anneau de cardan extérieur du gyroscope. Les deux termes perturbateurs augmentent, lorsque le rapport de réduction j augmente.

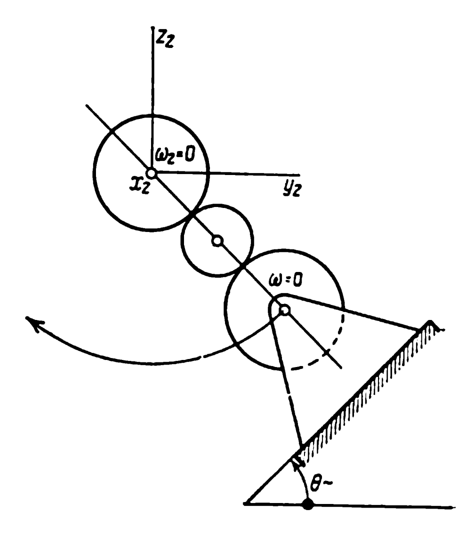


Fig. 96

Les équations différentielles (3.5.33) étant linéaires et leurs coefficients constants, les variables α, β et i_1 suivent (dès que le phénomène transitoire dans le stabilisateur eut pris fin) des lois harmoniques, caractérisées par la même pulsation p que celle de la variation de l'angle θ, ce dernier étant défini en fonction du temps par la formule (3.5.28). Les amplitudes de ces variables peuvent se déterminer par l'application des méthodes habituelles de la théorie des oscillations linéaires [1]).

En choisissant les valeurs à donner aux paramètres d'un stabilisateur gyroscopique, on ne se contente pas, en règle générale, de réaliser seulement les conditions de sa stabilité. Il faut encore assurer que les valeurs maximales prises par les angles α et β au cours de leur variation dans les différentes conditions d'utilisation du stabilisateur ne dépassent pas certaines valeurs établies à l'avance. Ces dernières sont généralement déterminées par la destination du stabilisateur et par les paramètres des éléments et organes dont dispose le constructeur. Les exigences imposées à un stabilisateur gyroscopique

---

[1]) Voir, par exemple, le livre de *A. Ishlinsky* « Mécanique des systèmes gyroscopiques » (*Ишлинский А. Ю.* « Механика гироскопических систем ». М., Изд-во АН СССР, 1963 (en russe)), où il est également montré comment on peut tenir compte, de facon approchée, de l'influence du frottement à sec dans les axes de la suspension lors de la détermination d'un mouvement forcé du stabilisateur gyroscopique.

sont, en règle générale, contradictoires. Aussi, le choix des valeurs de ses paramètres résulte-t-il d'un compromis raisonnable auquel on a si souvent recours dans les calculs d'ingénieur.

§ 6. Stabilisateur gyroscopique à deux axes le plus simple

En plus des stabilisateurs gyroscopiques à un axe, dans les systèmes de navigation par inertie on utilise largement des stabilisateurs à deux axes et surtout à trois axes. Les données de l'expérience montrent que les stabilisateurs à deux et à trois axes sont moins stables (donc plus sujets à des auto-oscillations) que les stabilisateurs à un axe ayant les mêmes paramètres constructifs. Au cours de ce paragraphe, nous allons donner une interprétation théorique de cette propriété des stabilisateurs sur un exemple caractéristique du stabilisateur gyroscopique à deux axes le plus simple.

Dans ce qui suit, pour ne pas compliquer les calculs, nous négligerons (de même qu'au paragraphe précédent) la déformabilité élastique des éléments constitutifs de la suspension du stabilisateur et la constante de temps des amplificateurs de stabilisation. De plus, nous négligerons l'inductance propre du circuit de sortie de chaque amplificateur et supposerons que des charges extérieures (couples déstabilisants) ne sont pas appliquées au stabilisateur. Les moteurs de stabilisation seront supposés identiques, représentés par des moteurs électriques à courant continu à excitation indépendante, de même que seront supposés absolument identiques les gyroscopes du stabilisateur. Enfin, nous supposerons que dans les axes de la suspension du stabilisateur gyroscopique il n'y a pas de frottement.

Comme il sera montré plus loin, la condition de stabilité du stabilisateur gyroscopique à deux axes revêt dans ce cas la forme d'une inégalité algébrique simple, pareille à la condition de stabilité connue d'un stabilisateur à un axe correspondant.

Commençons par établir, dans les hypothèses simplificatrices que nous venons d'adopter, les équations du mouvement de l'ensemble électromécanique du stabilisateur à un axe. A cet effet, reportons-nous au système d'équations différentielles (3.5.33) qui décrivent le comportement d'un stabilisateur gyroscopique à un axe placé sur un support mobile, dans le cas où le couple déstabilisant est nul. Si le support est immobile, c'est-à-dire si $\theta = 0$, et l'inductance propre mentionnée L est, elle aussi, nulle, ces équations peuvent s'écrire, à des désignations près, sous la forme suivante:

$$\begin{gathered} I\frac{d^2\alpha}{dt^2} + H\frac{d\beta}{dt} = -\frac{jC}{g}\sigma, \\ \Theta\frac{d^2\beta}{dt^2} - H\frac{d\alpha}{dt} = 0, \\ R\sigma - jC\frac{d\alpha}{dt} = \mu\beta. \end{gathered} \tag{3.6.1}$$

Pour la commodité de l'exposé, indiquons les désignations de toutes les grandeurs qui se rencontrent dans ces équations:

α est l'angle de rotation de l'anneau de cardan du stabilisateur par rapport à une certaine position initiale,

β l'angle de rotation du boîtier du gyroscope de stabilisateur à partir de la position moyenne dans laquelle l'axe de rotation propre du rotor de gyroscope est perpendiculaire au plan de l'anneau extérieur,

j le rapport de réduction du démultiplicateur entre l'axe du rotor du moteur de stabilisation et l'axe de l'anneau extérieur (axe de stabilisation),

I, la somme des moments d'inertie, par rapport à l'axe de stabilisation, de toutes les parties mobiles du stabilisateur pour l'angle β égal à zéro,

Θ la somme des moments d'inertie du boîtier et du rotor de gyroscope par rapport à l'axe du boîtier,

H le moment cinétique propre du gyroscope,

R la résistance du circuit de sortie de l'amplificateur,

σ la nouvelle désignation de l'intensité du courant dans ce circuit (au paragraphe précédent elle était désignée par i_1),

C le coefficient de force contre-électromotrice du moteur de stabilisation,

μ le coefficient d'amplification de l'amplificateur de stabilisation,

g un nombre doué de dimensions, égal à 9,81 $V\cdot A\cdot s\cdot kg^{-1}\cdot m^{-1}$ (si l'on ne tient pas compte du champ de dispersion magnétique du moteur).

L'équation caractéristique du système (3.6.1) est dans ce cas plus simple que l'équation (3.5.17) du paragraphe précédent, soit

$$S(\lambda)=\begin{vmatrix} I\lambda^2 & H\lambda & jC/g \\ -H\lambda & \Theta\lambda^2 & 0 \\ -jC\lambda & -\mu & R \end{vmatrix}=0. \tag{3.6.2}$$

Comme l'angle α lui-même n'intervient pas directement dans les équations (3.6.1), l'équation caractéristique (3.6.2) possède parmi ses racines une racine $\lambda = 0$ qui est sans importance pour la suite de notre analyse. Aussi, pour pouvoir juger de la stabilité d'un stabilisateur gyroscopique à un axe suffit-il dans ce cas d'analyser les racines de l'équation algébrique du troisième degré

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + d = 0 \tag{3.6.3}$$

qui découle de l'équation (3.6.2). Ici, les coefficients

$$a=\frac{j^2C^2}{RgI}, \qquad b=\frac{H^2}{\Theta I}, \qquad d=\frac{\mu jCH}{RgI\Theta} \tag{3.6.4}$$

sont des quantités positives.

L'équation cubique (3.6.3) ne possède que des racines complexes à parties réelles négatives, à condition que soit réalisée la condition de Routh

$$ab > d. \tag{3.6.5}$$

En y portant les valeurs des coefficients a, b et d données par les désignations (3.6.4), on obtient la condition connue de stabilité d'un stabilisateur gyroscopique à un axe, sous la forme

$$\frac{fC}{I} > \frac{\mu}{H}. \tag{3.6.6}$$

Remarquons que la condition de stabilité d'un stabilisateur gyroscopique à un axe, obtenue au paragraphe précédent, compte tenu

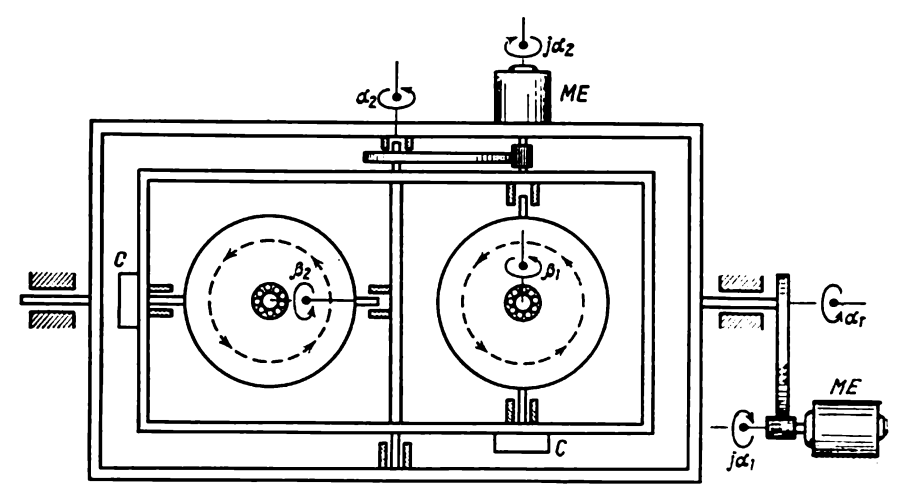


Fig. 97

de l'inductance propre dans le circuit d'induit du moteur, avait la même forme (en l'absence du couple déstabilisant M^* ou, ce qui revient au même, pour $\beta^* = 0$).

Envisageons maintenant un stabilisateur gyroscopique à deux axes (fig. 97) constitué par deux stabilisateurs à un axe identiques à celui que nous venons de décrire et portés par une suspension à la cardan commune. Nous supposerons que les rotors des deux gyroscopes du stabilisateur considéré tournent dans un même sens.

En établissant les équations différentielles des petits mouvements du stabilisateur à deux axes, il convient d'avoir en vue que l'angle de rotation de chacun de ses gyroscopes par rapport au système de coordonnées non tournant vaut, à des petits de deuxième ordre près, la somme de l'angle de rotation de la plate-forme stabilisée P autour de l'axe de stabilisation correspondant et de l'angle

de rotation du boîtier par rapport à la plate-forme. C'est pourquoi, on doit, en particulier, ajouter à la vitesse angulaire $d\beta_1/dt$ de rotation du boîtier du gyroscope de droite par rapport à la plate-forme la vitesse angulaire $d\alpha_2/dt$ de la plate-forme par rapport à l'anneau de cardan extérieur. La somme $d\beta_1/dt + d\alpha_2/dt$ ainsi obtenue et sa dérivée $d^2\beta_1/dt^2 + d^2\alpha_2/dt^2$ doivent être substituées aux termes correspondants $d\beta/dt$ et $d^2\beta/dt^2$ figurant dans les équations (3.6.1) du stabilisateur à un axe, pour obtenir les équations du gyrostabilisateur à deux axes. Par ailleurs, en formant les équations du mouvement du gyroscope de gauche, il convient, pour une raison analogue, de remplacer dans les équations (3.6.1) les termes $d\beta/dt$ et $d^2\beta/dt^2$ respectivement par les différences $d\beta_2/dt - d\alpha_1/dt$ et $d^2\beta_2/dt^2 - d^2\alpha_1/dt^2$ (v. fig. 97). C'est ce qui distingue essentiellement les deux groupes d'équations (3.6.7) indiquées ci-dessous du système d'équations (3.6.1) du stabilisateur à un axe. On a

$$
\begin{aligned}
&I_1 \frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + H\left(\frac{d\beta_1}{dt} + \frac{d\alpha_2}{dt}\right) = -\frac{jC}{g}\sigma_1, \\
&\Theta\left(\frac{d^2\beta_1}{dt^2} + \frac{d^2\alpha_2}{dt^2}\right) - H\frac{d\alpha_1}{dt} = 0, \\
&R\sigma_1 - jC\frac{d\alpha_1}{dt} = \mu\beta_1, \\
&I_2 \frac{d^2\alpha_2}{dt^2} + H\left(\frac{d\beta_2}{dt} - \frac{d\alpha_1}{dt}\right) = -\frac{jC}{g}\sigma_2, \\
&\Theta\left(\frac{d^2\beta_2}{dt^2} - \frac{d^2\alpha_1}{dt^2}\right) - H\frac{d\alpha_2}{dt} = 0, \\
&R\sigma_2 - jC\frac{d\alpha_2}{dt} = \mu\beta_2,
\end{aligned}
\tag{3.6.7}
$$

où en plus des désignations H, Θ, j, C, g, R et μ adoptées plus haut, on a maintenant:

I_1 la somme des moments d'inertie réduits, par rapport à l'axe extérieur de stabilisation, de toutes les parties mobiles du stabilisateur, excepté le moment d'inertie du gyroscope de gauche (v. fig. 97),

I_2 la somme analogue des moments d'inertie, par rapport à l'axe intérieur de stabilisation, de la plate-forme stabilisée avec tous les éléments qu'elle porte, excepté le moment d'inertie, cette fois, du gyroscope de droite par rapport à l'axe de son boîtier,

α_1 l'angle de rotation de l'anneau extérieur du stabilisateur à partir de sa position initiale,

α_2 l'angle de rotation de la plate-forme stabilisée par rapport à l'anneau extérieur,

β_1 et β_2 les angles de rotation des boîtiers des gyroscopes à partir de leur position initiale dans laquelle les axes de rotation propre des rotors sont perpendiculaires à la plate-forme,

σ_1 et σ_2 les intensités du courant dans les circuits de sortie des amplificateurs de stabilisation placés respectivement sur les axes extérieur et intérieur de la suspension.

L'équation caractéristique du système (3.6.7) est de la forme

$$\begin{vmatrix} I_1\lambda^2 & H\lambda & jC/g & H\lambda & 0 & 0 \\ -H\lambda & \Theta\lambda^2 & 0 & \Theta\lambda^2 & 0 & 0 \\ -jC\lambda & -\mu & R & 0 & 0 & 0 \\ -H\lambda & 0 & 0 & I_2\lambda^2 & H\lambda & jC/g \\ -\Theta\lambda^2 & 0 & 0 & -H\lambda & \Theta\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -jC\lambda & -\mu & R \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.6.8)$$

Il se trouve que sous la condition supplémentaire

$$I_1 = I_2 = I \qquad (3.6.9)$$

l'équation caractéristique (3.6.8) peut se mettre sous la forme suivante :

$$S^2(\lambda) + P^2(\lambda) = 0, \qquad (3.6.10)$$

où $S(\lambda)$ est le même déterminant du troisième ordre que celui qui figure dans l'équation (3.6.2) établie pour le stabilisateur à un axe, et

$$P(\lambda) = \frac{\mu j C}{g}\Theta\lambda^2. \qquad (3.6.11)$$

Le premier membre de l'équation (3.6.10) peut se présenter sous la forme du produit de deux facteurs complexes conjugués

$$\begin{aligned} S(\lambda) + iP(\lambda) &= 0, \\ S(\lambda) - iP(\lambda) &= 0, \end{aligned} \qquad (3.6.12)$$

dont chacun est un polynôme de degré 4 en variable λ. Il s'ensuit que l'étude de la stabilité du stabilisateur gyroscopique à deux axes que nous considérons se ramène à celle des conditions de négativité des parties réelles des racines non nulles de deux équations algébriques à coefficients complexes

$$\begin{aligned} \lambda\,[\lambda^3 + a\lambda^2 + (b + ic)\,\lambda + d] &= 0, \\ \lambda\,[\lambda^3 + a\lambda^2 + (b - ic)\,\lambda + d] &= 0. \end{aligned} \qquad (3.6.13)$$

On a utilisé ici les mêmes désignations (3.6.4) et de plus

$$c = \frac{\mu j C}{RgI}. \qquad (3.6.14)$$

Les méthodes générales d'étude des racines des équations algébriques à coefficients complexes permettent d'établir dans le cas considéré les conditions de stabilité suivantes:

$$a > 0, \quad a^2b - ad - c^2 > 0, \quad a\,[(ab-d)^2 - bc^2] > 0. \qquad (3.6.15)$$

En tenant compte du fait que les coefficients a, b, c et d sont positifs, la deuxième et la troisième inégalité (3.6.15) peuvent être mises sous la forme suivante:

$$\frac{d}{ab} < 1 - \frac{c^2}{a^2b}, \quad \frac{d}{ab} < 1 - \frac{c}{a\sqrt{b}}. \qquad (3.6.16)$$

La dernière de ces inégalités ne peut avoir lieu qu'à la condition préliminaire

$$\frac{c}{a\sqrt{b}} < 1. \qquad (3.6.17)$$

Il en résulte que

$$1 - \frac{c^2}{a^2b} > 1 - \frac{c}{a\sqrt{b}}. \qquad (3.6.18)$$

Ainsi, la deuxième inégalité (3.6.15) est une conséquence de la troisième. Mettons la troisième inégalité (3.6.15) sous une forme plus commode

$$ab > d + c\sqrt{b}. \qquad (3.6.19)$$

En introduisant dans l'inégalité (3.6.19) les valeurs des coefficients a, b, c et d définies par (3.6.4) et (3.6.14), nous obtenons la condition de stabilité d'un stabilisateur gyroscopique à deux axes, sous la forme simple suivante:

$$\frac{jC}{I} > \frac{\mu}{H}\left(1 + \sqrt{\frac{\Theta}{I}}\right). \qquad (3.6.20)$$

Du fait de ce qui précède, cette dernière formule est valable pour le cas où les rotors des deux gyroscopes du stabilisateur à deux axes tournent dans un même sens. Si les rotors tournent dans des sens opposés, il convient, dans le second groupe d'équations (3.6.7), d'inverser les signes des termes qui contiennent les facteurs H et μ. Il en résulte une modification correspondante de l'équation caractéristique (3.6.8) et de sa représentation sous la forme (3.6.10) dans laquelle la somme des carrés des quantités $S^2(\lambda)$ et $P^2(\lambda)$ est remplacée par leur différence. On obtient finalement deux équations algébriques à coefficients réels

$$\begin{aligned} \lambda\,[\lambda^3 + a\lambda^2 + (b+c)\lambda + d] &= 0, \\ \lambda\,[\lambda^3 + a\lambda^2 + (b-c)\lambda + d] &= 0. \end{aligned} \qquad (3.6.21)$$

La condition de stabilité du stabilisateur gyroscopique à deux axes devient maintenant un peu différente, soit

$$a\,(b-c) > d. \tag{3.6.22}$$

En utilisant les valeurs des coefficients a, b, c et d données par les formules (3.6.4) et (3.6.14), mettons la condition (3.6.22) sous la forme

$$\frac{jC}{I} > \frac{\mu}{H}\left(1+\frac{j^2C^2\Theta}{RgIH}\right). \tag{3.6.23}$$

Les conditions (3.6.20) et (3.6.23) sont plus sévères que l'inégalité correspondante (3.6.6) qui assure la stabilité d'un stabilisateur gyroscopique à un axe. C'est ce qui explique une plus faible stabilité d'un gyrostabilisateur à deux axes par rapport à celle d'un stabilisateur à un axe, le fait que nous avons déjà mentionné plus haut. Un résultat analogue s'obtient également dans le cas d'un stabilisateur à trois axes.

Montrons, avant de clore ce paragraphe, comment on peut obtenir la condition (3.6.19) à partir des considérations bien simples suivantes. Chacune des équations (3.6.13) a un seul coefficient complexe. Ceci signifie que ces équations ne peuvent posséder que des racines complexes (en plus des racines nulles qui sont sans importance). En cas de variation de leurs coefficients, par exemple du coefficient d, le passage de l'état stable à l'état instable se produira, certes, si l'une des racines de ces équations se transforme en une quantité imaginaire pure. Posons dans la deuxième équation (3.6.13)

$$\lambda = i\omega. \tag{3.6.24}$$

En séparant les parties réelle et imaginaire de l'expression entre crochets, figurant au premier membre de cette équation, on obtient

$$\omega^3 - b\omega = 0, \qquad -a\omega^2 + c\omega + d = 0. \tag{3.6.25}$$

En faisant disparaître, à l'aide de la première égalité, la quantité ω dans la deuxième égalité, on obtient la condition

$$ab = d + c\sqrt{b} \tag{3.6.26}$$

d'existence du mouvement périodique du stabilisateur gyroscopique. Maintenant, augmentons un peu le coefficient d, en le remplaçant par la quantité $d+\delta$. Dans ce cas, on obtient, à des termes de deuxième ordre en δ près, la valeur suivante pour la racine de la nouvelle équation qui en résulte :

$$\lambda = \frac{2\delta b}{4b^2+(c-2a\sqrt{b})^2} + i\left[\omega - \delta\frac{b-2a\sqrt{b}}{4b^2+(c-2a\sqrt{b})^2}\right]. \tag{3.6.27}$$

La dernière formule montre que pour $\delta > 0$ la partie réelle de la racine de l'équation modifiée est positive et donc, d'après ce qui pré-

cède, le stabilisateur gyroscopique à deux axes est instable. Il n'est pas difficile d'en conclure que le fonctionnement du stabilisateur gyroscopique sera stable si la valeur choisie pour le coefficient d est inférieure à sa valeur tirée de l'égalité (3.6.26). Il en résultera que les coefficients a, b, c et d satisferont, cette fois, à l'inégalité (3.6.19) qui doit être considérée dans ce cas comme condition de stabilité.

§ 7. Prise en compte de la déformabilité élastique des éléments du gyrostabilisateur

Les équations différentielles linéaires du stabilisateur gyroscopique ont été établies au cours du § 5 du présent chapitre dans l'hypothèse où ses éléments (anneaux de cardan, paliers, axe du rotor,

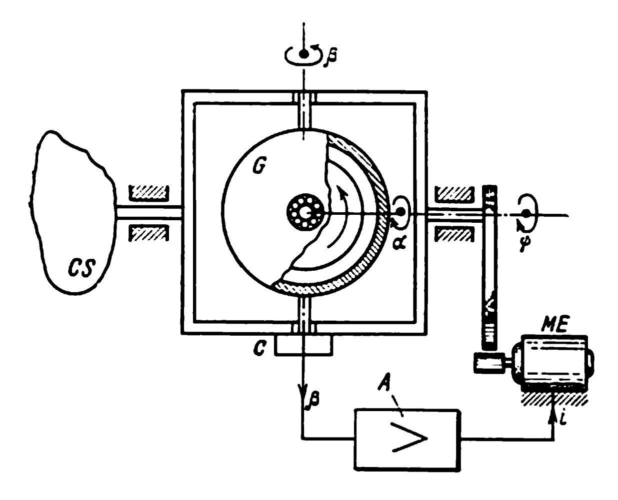


Fig. 98

axe du moteur de stabilisation, etc.) sont absolument rigides. C'est pourquoi les valeurs des fréquences d'oscillations propres subies par l'ensemble électromécanique du stabilisateur gyroscopique peuvent différer notablement des valeurs réellement observées. Pour la même raison, une conclusion faite sur la stabilité du stabilisateur peut se trouver erronée. Malgré qu'elle apporte à l'étude une nouvelle complication considérable, la prise en compte de la déformabilité élastique du dispositif de suspension du gyroscope et des transmissions mécaniques du gyrostabilisateur s'avère dans de tels cas tout à fait indispensable.

L'ensemble mécanique d'un stabilisateur gyroscopique (fig. 98) est en fait un ensemble à constantes réparties. Si on le suppose sans frottement, il peut être considéré, lorsque les circuits électriques du

moteur sont interrompus, comme un ensemble conservatif caractérisé par un spectre discontinu infini de fréquences, tout comme de nombreuses constructions élastiques telles que les poutres, les plaques, les cadres, etc.

Pourtant, dans le cas d'un stabilisateur gyroscopique, le problème de la détermination des fréquences d'oscillations propres se trouve fortement simplifié grâce aux circonstances suivantes. La déformabilité élastique des paliers du rotor de gyroscope dans le sens radial et la compression des dents en contact du démultiplicateur sont nettement plus grandes que la déformabilité élastique des autres éléments du stabilisateur. C'est pourquoi, en déterminant les basses fréquences des petites oscillations d'une telle construction, on peut la considérer comme si elle était constituée par quatre solides rigides : le rotor de gyroscope, le boîtier du gyroscope, l'anneau extérieur de la suspension (avec le corps à stabiliser et la roue menée du démultiplicateur) et enfin, le rotor du moteur (avec la roue menante). Les deux premiers corps sont reliés entre eux élastiquement, par l'intermédiaire du palier dans lequel tourne l'axe du rotor ; l'articulation reliant le boîtier du gyroscope à l'anneau de cardan extérieur peut être supposée indéformable, et la liaison entre l'anneau extérieur et le rotor du moteur élastique. De plus, négligeons la masse du boîtier et le frottement dans les paliers de son axe. Avec ces hypothèses simplificatrices, les équations des petites oscillations de l'ensemble gyroscopique idéalisé (avec le moteur de stabilisation à l'arrêt), placé sur un support immobile, que nous venons de décrire, peuvent, d'après ce qui a été établi aux paragraphes précédents du présent chapitre, se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} &A \frac{d^2\alpha}{dt^2} + H \frac{d\beta}{dt} = K(\psi - \alpha), \\ &A \frac{d^2\beta}{dt^2} - H \frac{d\alpha}{dt} = 0, \\ &\Psi \frac{d^2\psi}{dt^2} = K(\alpha - \psi) + N(\theta - \psi), \\ &\Theta \frac{d^2\theta}{dt^2} = N(\psi - \theta). \end{aligned} \qquad (3.7.1)$$

On a ici :

A le moment d'inertie équatorial du rotor de gyroscope ;

H son moment cinétique propre ;

α et ψ sont les angles de rotation, autour de l'axe de stabilisation, respectivement du rotor et du boîtier du gyroscope (le boîtier tourne avec l'anneau de cardan extérieur, le corps à stabiliser et la roue menée du démultiplicateur) par rapport au support ;

β un petit angle d'écart du boîtier du gyroscope par rapport à sa position moyenne (dans laquelle l'axe de rotation propre du rotor est perpendiculaire à l'axe de stabilisation) ;

K la rigidité correspondant au déplacement élastique $\alpha - \psi$ du rotor de gyroscope par rapport au boîtier;

Ψ la somme des moments d'inertie de l'anneau extérieur, du corps à stabiliser et de la roue menée du démultiplicateur par rapport à l'axe de stabilisation;

θ l'angle de rotation du rotor du moteur, ramené à l'axe de stabilisation (c'est-à-dire l'angle de rotation par rapport au stator, divisé par le rapport de réduction j du démultiplicateur);

N la rigidité du démultiplicateur, ramenée, elle aussi, à l'axe de stabilisation;

Θ le moment d'inertie, par rapport à l'axe de stabilisation, du rotor du moteur avec la roue menante du démultiplicateur (le moment d'inertie total de ces corps, par rapport à l'axe du rotor du moteur, augmenté de j^2 fois).

Les deux premières équations différentielles du système (3.7.1) décrivent le mouvement du rotor de gyroscope dans le cas où il est soumis à l'action des forces élastiques exercées par les paliers de son axe. La différence $\psi - \alpha$ caractérise le degré de déformation des paliers. Le moment des forces élastiques qui en résulte est supposé proportionnel à la déformation. Dans le cas des paliers à billes, une telle supposition ne peut se faire qu'avec une certaine approximation. Les équations sus-mentionnées sont des équations linéarisées. Elles ne sont pas difficiles à obtenir si l'on applique la méthode décrite au § 1 du présent chapitre, en posant $\Theta = J(\beta) = A$ et en remarquant que le moment correspondant à la coordonnée β est nul (absence de frottement dans les paliers de l'axe du boîtier).

La troisième équation du système (3.7.1) est une équation différentielle décrivant la rotation du corps à stabiliser (avec l'anneau extérieur de la suspension du gyroscope, le boîtier du gyroscope et la roue menée du démultiplicateur) autour de l'axe de stabilisation. Le corps à stabiliser subit l'action de deux couples élastiques: de la part du rotor de gyroscope et de la part du moteur de stabilisation. Enfin, la dernière équation du même système décrit, à un facteur constant près, qui est égal au rapport de réduction j, la rotation du rotor du moteur de stabilisation sous l'action des forces d'interaction élastique avec le corps à stabiliser.

La deuxième équation différentielle du système (3.7.1) peut s'intégrer. On obtient la relation

$$A\frac{d\beta}{dt} - H\alpha = 0, \tag{3.7.2}$$

dans laquelle la constante arbitraire, sans importance pour la suite, est omise. Si l'on fait disparaître, à l'aide de cette relation, la vitesse angulaire $d\beta/dt$ dans la première équation, on est conduit à une autre forme du système d'équations qui décrivent le mouvement du même

système gyroscopique, soit

$$A\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\frac{H^2}{A}\alpha=K(\psi-\alpha),$$

$$\Psi\frac{d^2\psi}{dt^2}=K(\alpha-\psi)+N(\theta-\psi), \tag{3.7.3}$$

$$\Theta\frac{d^2\theta}{dt^2}=N(\psi-\theta).$$

Envisageons maintenant trois masses placées sur une même droite : A, Ψ et Θ dont les écarts de la position d'équilibre seront désignés respectivement par α, ψ et θ (fig. 99). Supposons que la

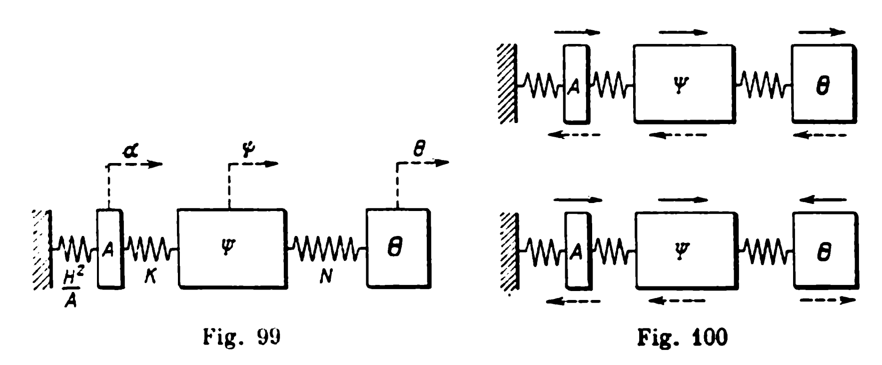


Fig. 99

Fig. 100

masse A est liée à la masse Ψ par un ressort de raideur K, et la masse Ψ à son tour est liée à la masse Θ par un ressort de raideur N. De plus, supposons que la masse A est liée à un corps fixe de grande masse (à l'espace « inertiel ») au moyen d'un ressort dont la raideur est égale à H^2/A. Il est évident que le système d'équations décrivant les oscillations d'un tel ensemble mécanique est constitué par les mêmes équations que celles qui font partie du système (3.7.3). Ceci signifie qu'un stabilisateur gyroscopique sans frottement, « mis hors tension », peut avoir un analogue mécanique sous forme de trois masses successives A, Ψ et Θ liées élastiquement l'une à l'autre, dont la première est encore liée par une sorte de ressort « gyroscopique » à l'espace « inertiel ».

Cet analogue et les analogues pareils permettent d'appliquer à l'étude des phénomènes gyroscopiques les procédés et les méthodes utilisés dans la théorie des oscillations des systèmes élastiques à masses concentrées. Soit, par exemple

$$A \ll \Theta < \Psi, \tag{3.7.4}$$

ce qui est généralement vrai pour les stabilisateurs gyroscopiques. Dans ce cas, il faut s'attendre que la masse A ne doit pas avoir une influence quelque peu notable sur les valeurs des basses fréquences

des oscillations du système considéré. Il est presque évident qu'à la fréquence la plus basse ω_1 correspond un mouvement en concordance de phases de toutes les trois masses (fig. 100) ; à la fréquence suivante ω_2 correspond le mouvement en concordance de phases des masses A et Ψ et en opposition de phase de la masse Θ.

Lorsque le système oscille aux basses fréquences ω_1 et ω_2, la présence de la petite masse A est presque sans effet sur la valeur de son écart α. Ceci permet de déterminer cet écart de façon approchée à partir de la première équation du système (3.7.3), si l'on y néglige le terme $Ad^2\alpha/dt^2$. Il vient

$$\alpha = \frac{KA}{KA + H^2}\psi. \tag{3.7.5}$$

Portons cette expression dans la deuxième équation du système (3.7.3). Il en résulte que ce dernier se réduit à deux équations différentielles linéaires par rapport aux variables ψ et θ, soit

$$\begin{gathered} \Psi\frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{KH^2}{KA + H^2}\psi = N(\theta - \psi), \\ \Theta\frac{d^2\theta}{dt^2} = N(\psi - \theta). \end{gathered} \tag{3.7.6}$$

L'équation des fréquences de ce nouveau système est de la forme

$$\omega^4 - \left(\frac{\nu^2\varkappa^2}{\nu^2 + k^2} + n^2 + \xi n^2\right)\omega^2 + \frac{\nu^2\varkappa^2 n^2}{\nu^2 + k^2} = 0. \tag{3.7.7}$$

On a introduit ici les désignations

$$\nu = \frac{H}{A}, \quad k^2 = \frac{K}{A}, \quad \varkappa^2 = \frac{K}{\Psi}, \quad n^2 = \frac{N}{\Theta}, \quad \xi = \frac{\Theta}{\Psi}. \tag{3.7.8}$$

Lorsque les conditions (3.7.4) sont satisfaites, les racines de l'équation (3.7.7) ne diffèrent presque pas des racines les plus petites ω_1 et ω_2 de l'équation des fréquences

$$\begin{aligned} \omega^6 - (\nu^2 + k^2 + \varkappa^2 + n^2 + \xi n^2)\,\omega^4 + [\nu^2(\varkappa^2 + n^2 + \xi n^2) + \\ + n^2(k^2 + \xi k^2 + \varkappa^2)]\,\omega^2 - \nu^2 n^2\varkappa^2 = 0 \end{aligned} \tag{3.7.9}$$

correspondant au système d'équations différentielles (3.7.3), si on laisse de côté deux racines nulles, sans importance, du système initial (3.7.1).

A la plus grande racine de l'équation (3.7.9) correspond la fréquence la plus élevée ω_3 des oscillations de l'ensemble mécanique idéalisé. A cette fréquence, les masses Ψ et Θ sont pratiquement immobiles, c'est seulement la masse A qui oscille. Par suite, si dans la première équation du système (3.7.3) on pose $\psi = 0$, on obtient finalement la formule

$$\omega_3^2 = \frac{1}{A}\left(K + \frac{H^2}{A}\right) = k^2 + \nu^2 \tag{3.7.10}$$

permettant un calcul approché de la plus grande racine ω_3 de l'équation (3.7.9).

Exemple numérique. — Soient $\nu = 200$ s^{-1}; $k = 100$ s^{-1}; $\varkappa = 40$ s^{-1}; $n = 80$ s^{-1}; $\xi = 0,2$. Les racines de l'équation caractéristique approchée (3.7.7) ont les valeurs suivantes: $\omega_1 = 32,15$ s^{-1}; $\omega_2 = 89,03$ s^{-1}. En outre, la formule (3.7.10) donne $\omega_3 = 223,61$ s^{-1}. Si les fréquences d'un stabilisateur gyroscopique hors tension sont déterminées à partir de l'équation caractéristique (3.7.9) du système d'équations différentielles initial (3.7.3), on obtient les valeurs suivantes: $\omega_1 = 32,07$ s^{-1}, $\omega_2 = 88,96$ s^{-1}, $\omega_3 = 224,36$ s^{-1}.

Considérons maintenant le même stabilisateur gyroscopique mais avec le moteur à courant continu (à excitation indépendante) mis en marche. D'après ce qui a été établi aux §§ 5 et 6 du présent chapitre, pour la description du comportement d'un tel stabilisateur, la dernière des équations du système (3.7.3) doit être remplacée par trois équations suivantes:

$$\Theta \frac{d^2\theta}{dt^2} = N(\psi - \theta) - \frac{jCi_1}{g},$$
$$Ri_1 - jC\frac{d\theta}{dt} = V, \qquad (3.7.11)$$
$$V = \mu\Phi(p)\beta.$$

En plus des désignations déjà rencontrées dans le présent paragraphe, on a ici:

C le coefficient de force contre-électromotrice;

i_1 l'intensité du courant dans le circuit d'induit du moteur;

R la résistance du circuit d'induit du moteur avec la résistance de sortie de l'amplificateur (la réactance inductive de ce circuit est ici négligée);

V la force électromotrice obtenue à la sortie de l'amplificateur;

μ le coefficient d'amplification de tension continue;

$\Phi(p)$ la fonction de transfert de l'amplificateur, normée de telle sorte que $\Phi(0) = 1$ (p étant l'opérateur de dérivation);

g un coefficient numériquement égal à 9,81 si, comme dans les deux paragraphes qui précèdent, l'intensité du courant i_1 est exprimée en ampères et le couple sur l'arbre du moteur en kilogrammètres [1]).

L'analogue du stabilisateur gyroscopique à moteur en marche peut être constitué par le même ensemble mécanique que dans le cas du stabilisateur hors tension, mais avec adjonction (fig. 101) d'une force « artificielle »

$$P = -\frac{\mu jC}{Rg}\Phi(p)\beta \qquad (3.7.12)$$

[1]) Remarquons que les équations ont une forme analogue dans le cas où le moteur utilisé est à courant alternatif.

et d'une force de frottement « visqueux »

$$F = -\frac{j^2C^2}{Rg}\frac{d\theta}{dt}, \qquad (3.7.13)$$

appliquées à la masse Θ. En effet, en faisant disparaître dans la première équation (3.7.11) l'intensité du courant i_1, à l'aide de la deuxième équation, et ensuite la force électromotrice V, à l'aide de la troisième équation, on obtient

$$\Theta\frac{d^2\theta}{dt^2} = N(\psi-\theta) + \frac{jC}{Rg}\left[-\mu\Phi(p)\beta - jC\frac{d\theta}{dt}\right]. \qquad (3.7.14)$$

Ainsi, dans le cas où le moteur de stabilisation est en marche, on doit introduire dans le second membre de la troisième équation du système

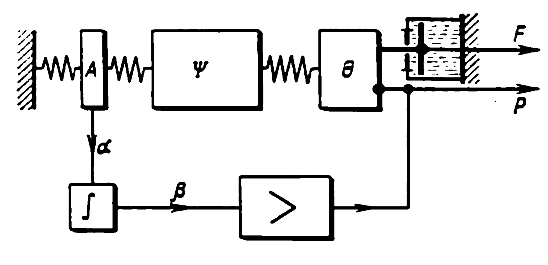


Fig. 101

(3.7.3) deux termes supplémentaires P et F définis par les formules (3.7.12) et (3.7.13).

Pour produire la force « artificielle » P dans l'analogue mécanique considéré (v. fig. 101), on utilise une cellule « intégratrice » qui élabore la quantité β suivant la loi (3.7.2), et un amplificateur à fonction de transfert $\Phi(p)$ (au facteur constant $-\mu jC/Rg$ près). La cellule intégratrice et l'amplificateur constituent ici une boucle de réaction. Lorsque le coefficient d'amplification μ est élevé, ce qui est parfois dicté par les exigences techniques, la présence de cette boucle peut rendre divergentes les oscillations de l'analogue mécanique. Dans un tel cas, le fonctionnement du stabilisateur gyroscopique sera instable.

La mise en marche du moteur de stabilisation ne modifie généralement que très peu les fréquences les plus basses d'oscillations du stabilisateur gyroscopique, si bien que le caractère des oscillations de ses masses à ces fréquences reste sans modifications importantes par rapport à ce qui a été exposé plus haut. Dans certains cas, cette circonstance permet de juger des propriétés d'un stabilisateur gyroscopique sans procéder au préalable à une analyse numérique du système complet de ses équations.

Soit, par exemple, un amplificateur dont la caractéristique de transfert est de la forme

$$\Phi(p) = 1 + p^2T^2. \qquad (3.7.15)$$

Il amplifie, sans modifier la phase, d'autant plus l'amplitude de la tension à variation harmonique, appliquée à son entrée, que la fréquence de cette tension est plus élevée. Une telle propriété de l'amplificateur ne peut pas contribuer à l'amélioration de la stabilité du stabilisateur gyroscopique. En effet, supposons que, le moteur de stabilisation étant convenablement branché, la force artificielle P produite conformément aux égalités (3.7.12) et (3.7.15) favorise l'amortissement des oscillations de fréquence ω_1 du stabilisateur. Comme cela a été dit plus haut, à cette fréquence les masses A, Ψ et Θ oscillent en concordance de phases, et à la fréquence suivante $\omega_2 > \omega_1$, les oscillations des masses Θ et A sont en opposition de phase (v. fig. 100). Il en résulte qu'à la fréquence ω_2 la force P, dont l'amplitude devient d'ailleurs relativement plus grande, tend à « faire pomper » le système et donc à compromettre sa stabilité.

Comme il a été indiqué précédemment, le moment d'inertie équatorial A du rotor est pratiquement beaucoup plus petit que les moments d'inertie Ψ et Θ. Par conséquent, en étudiant les oscillations du gyrostabilisateur aux basses fréquences, il y a tout lieu de négliger le terme $A(d^2\alpha/dt^2)$ dans la première équation du système (3.7.1). Il vient

$$\alpha = \psi - \frac{H}{K}\frac{d\beta}{dt}. \qquad (3.7.16)$$

En introduisant cette expression dans la deuxième et la troisième équation du même système (3.7.1), on obtient le système approché d'équations du mouvement d'un stabilisateur gyroscopique hors tension, sous la forme suivante:

$$\begin{gathered}\Psi\frac{d^2\psi}{dt^2} + H\frac{d\beta}{dt} = N(\theta - \psi),\\ \left(A + \frac{H^2}{K}\right)\frac{d^2\beta}{dt^2} - H\frac{d\psi}{dt} = 0, \qquad (3.7.17)\\ \Theta\frac{d^2\theta}{dt^2} = N(\psi - \theta).\end{gathered}$$

L'équation des fréquences de ce dernier système coïncide, comme il fallait s'y attendre, avec l'équation (3.7.7) (si l'on ne tient pas compte de la racine $\omega_0 = 0$).

Lorsque $K \to \infty$, les équations (3.7.17) tendent à se transformer en un système d'équations d'un stabilisateur gyroscopique à paliers absolument rigides du rotor de gyroscope (toujours dans l'hypothèse

supplémentaire où $A \ll \Psi$), soit

$$\begin{aligned} \Psi \frac{d^2\psi}{dt^2} + H \frac{d\beta}{dt} &= N(\theta - \psi), \\ A \frac{d^2\beta}{dt^2} - H \frac{d\psi}{dt} &= 0, \\ \Theta \frac{d^2\theta}{dt^2} &= N(\psi - \theta). \end{aligned} \qquad (3.7.18)$$

Ceci étant, l'angle α de rotation du rotor autour de l'axe de stabilisation doit être posé égal à l'angle ψ de rotation du boîtier et du corps à stabiliser.

La forme des équations (3.7.17) qui tiennent compte de la déformabilité élastique des paliers du rotor est la même que celle des équations (3.7.18) se rapportant au gyrostabilisateur dont les paliers du rotor sont absolument rigides. Ces deux systèmes ne diffèrent que par le premier coefficient dans la deuxième équation (coefficient de la dérivée seconde de l'angle β par rapport au temps). Ainsi, le remplacement du coefficient A par $A + H^2/K$ peut être considéré comme une prise en compte approchée de la rigidité des paliers mentionnés.

Les mêmes équations (3.7.18) peuvent s'obtenir directement, à la substitution de Ψ à $A + \Psi$ près, à partir du système (3.7.1). A cet effet, il suffit de supposer que le coefficient de rigidité K croît indéfiniment et, en conséquence, la différence des angles α et ψ tend vers zéro. Les valeurs du moment des forces d'interaction du rotor et du boîtier étant bornées, il convient de considérer dans ce cas qu'il en est de même des valeurs du produit $K(\alpha - \psi)$. Additionnons membre à membre la première et la troisième des équations (3.7.1). En posant $\alpha = \psi$, on obtient le système de trois équations

$$\begin{aligned} (\Psi + A) \frac{d^2\psi}{dt^2} + H \frac{d\beta}{dt} &= N(\theta - \psi), \\ A \frac{d^2\beta}{dt^2} - H \frac{d\psi}{dt} &= 0, \\ \Theta \frac{d^2\theta}{dt^2} &= N(\psi - \theta), \end{aligned} \qquad (3.7.19)$$

qui ne diffère du système (3.7.18) que par le coefficient de la dérivée seconde de l'angle ψ figurant dans la première équation de ce système.

Les équations établies au cours du présent paragraphe ne tiennent pas compte du moment d'inertie du boîtier du gyroscope par rapport à son axe. Il n'est pas quand même difficile de le faire. Les calculs correspondants ne sont qu'un peu plus compliqués et conduisent à remplacer le terme $A d^2\beta/dt^2$ par $(A + B_1)\, d^2\beta/dt^2$ (où B_1 est le moment d'inertie du boîtier par rapport à son axe) dans toutes les équations différentielles du présent paragraphe. Physiquement,

ceci équivaut à négliger la déformabilité élastique des paliers du rotor lors des mouvements de rotation de celui-ci autour de l'axe du boîtier. Une telle manière de procéder se justifie par la faible valeur du moment d'inertie du boîtier et, en conséquence, par une grande valeur de la fréquence supplémentaire des oscillations élastiques qui prennent naissance dans le stabilisateur gyroscopique par suite de la déformabilité mentionnée.

BIBLIOGRAPHIE

Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний (*A. Andronov, A. Witt, S. Khaïkine.* Théorie des oscillations). М., Физматгиз, 1959 (en russe).

Бесекерский В. А., Фабрикант Е. А. Динамический синтез систем гироскопической стабилизации (*V. Bessekerski, E. Fabricant.* Synthèse dynamique des systèmes de stabilisation gyroscopique). Л., « Судостроение », 1968 (en russe).

Борзов В. И. Влияние моментов сил вязкого трения на уход гироскопа в кардановом подвесе при вибрации основания (*V. Borzov.* Influence des moments des forces de frottement visqueux sur la dérive d'un gyroscope suspendu à la cardan, en cas de vibrations du support). — Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 2 (en russe).

Будняцкий И. М., Лунц Я. Л. О движении гироскопа, установленного на вибрирующей платформе, с неточно насаженным ротором на вал (*I. Boudniatski, Ya. Lounts.* Sur le mouvement d'un gyroscope placé sur une plateforme vibrante, avec rotor incorrectement emmanché sur l'arbre). — Изв. высш. учебн. заведений. Приборостроение, 1961, т. 4, № 6 (en russe).

Будняцкий И. М., Лунц Я. Л. Уходы динамически неуравновешенного гироскопа, установленного на колеблющемся основании (*I. Boudniatski, Ya. Lounts.* Dérives d'un gyroscope dynamiquement déséquilibré, placé sur une plate-forme oscillante). — Изв. высш. учебн. заведений. Приборостроение, 1965, т. 8, № 1 (en russe).

Булгаков Б. В. Колебания (*B. Boulgakov.* Oscillations). М., Гостехиздат, 1954 (en russe).

Булгаков Б. В. Прикладная теория гироскопов (*B. Boulgakov.* Théorie appliquée des gyroscopes). М., Гостехиздат, 1955 (en russe).

Бунатян Л. А. Движение свободного гироскопа на подвижном основании с учетом масс колец карданова подвеса (*L. Bounatian.* Mouvement d'un gyroscope libre sur un support mobile, compte tenu des masses des anneaux de la suspension à la cardan). — Докл. АН СССР, 1963, т. 152, № 2 (en russe).

Бутенин Н. В. Элементы теории нелинейных колебаний (*N. Bouténine.* Eléments de théorie des oscillations non linéaires). Л., Судпромгиз, 1962 (en russe).

Василенко В. П., Темченко М. Е. К теории гирокомпаса на торсионном подвесе (*V. Vassilenko, M. Temtchenko.* Sur la théorie du gyrocompas à suspension par barres de torsion). — Инж. ж. МТТ, 1966, № 1 (en russe).

Жбанов Ю. К. Гирогоризонткомпас на вибрирующем основании (*You. Zbanov.* Gyrohorizon-compas sur un support vibrant). — ПММ, 1961, т. 25, вып. 5 (en russe).

Журавлев В. Ф. Динамика ротора в неидеальных шариковых подшипниках (*V. Jouravlev.* Dynamique d'un rotor tournant dans des paliers à billes non parfaits). — Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 5 (en russe).

Зиненко В. А. О систематических уходах трехосной гироскопической платформы, вызванных ее угловыми колебаниями (*V. Zinenko.* Sur les dérives

systématiques d'une plate-forme gyroscopique à trois axes, provoquées par ses oscillations angulaires). — Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 3 (en russe).

Зиненко В. А. Об уходах гиростабилизированной платформы (*V. Zinenko.* Sur les dérives d'une plate-forme gyrostabilisée). — Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 4 (en russe).

Зубов В. И. Аналитическая динамика гироскопических систем (*V. Zoubov.* Dynamique analytique des systèmes gyroscopiques). Л., «Судостроение», 1970 (en russe).

Ишлинский А. Ю. Механика специальных гироскопических систем (*A. Ishlinsky.* Mécanique des systèmes gyroscopiques spéciaux). Киев, Изд-во АН УССР, 1952 (en russe).

Ишлинский А. Ю. Механика гироскопических систем (*A. Ishlinsky.* Mécanique des systèmes gyroscopiques). М., Изд-во АН СССР, 1963 (en russe).

Ишлинский А. Ю. Об одной механической аналогии гироскопического стабилизатора при наличии упругой податливости его элементов (*A. Ishlinsky.* Sur un analogue mécanique du stabilisateur gyroscopique, qui tient compte de la déformabilité élastique de ses éléments). — Докл. АН СССР, 1965, т. 161, № 6 (en russe).

Климов Д. М. О движении гироскопа в кардановом подвесе с неаксиально насаженным ротором (*D. Klimov.* Sur le mouvement d'un gyroscope suspendu à la cardan, à rotor calé non axialement). — Докл. АН СССР, 1959, т. 124, № 3 (en russe).

Климов Д. М., Слёзкин Л. Н. Применение асимптотических методов к решению задач о движении астатического гироскопа в кардановом подвесе (*D. Klimov, L. Slezkine.* Application des méthodes asymptotiques à la résolution des problèmes sur le mouvement d'un gyroscope astatique suspendu à la cardan). — Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1963, № 3 (en russe).

Климов Д. М. Исследование уходов астатического гироскопа в кардановом подвесе на качающемся основании (*D. Klimov.* Etude des dérives d'un gyroscope astatique suspendu à la cardan sur un support oscillant). — Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1963, № 5 (en russe).

Климов Д. М., Потапенко В. А. К уходам гироскопа в кардановом подвесе на подвижном основании (*D. Klimov, V. Potapenko.* Sur les dérives d'un gyroscope suspendu à la cardan sur un support mobile). — Инж. ж. МТТ, 1966, № 1 (en russe).

Климов Д. М., Космодемьянская Г. Н., Черноусько Ф. Л. О движении гироскопа с неконтактным подвесом (*D. Klimov, G. Kosmodémianskaïa, F. Tchernoousko.* Sur le mouvement d'un gyroscope à suspension sans contact). — Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 2 (en russe).

Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику (*N. Krylov, N. Bogolioubov.* Introduction à la mécanique non linéaire). Киев, Изд-во АН УССР, 1937 (en russe).

Лестев А. М. О движении статически сбалансированного гироскопа в кардановом подвесе, установленного на вибрирующем основании (*A. Lestev.* Sur le mouvement d'un gyroscope statiquement équilibré suspendu à la cardan, sur un support vibrant). — Изв. высш. учебн. заведений. Приборостроение, 1962, т. 5, № 1 (en russe).

Лунц Я. Л. О движении по инерции гироскопа в кардановом подвесе (*Ya. Lounts.* Sur le mouvement par inertie d'un gyroscope suspendu à la cardan). — Изв. высш. учебн. заведений. Приборостроение, 1959, № 3 (en russe).

Лунц Я. Л. Движение неуравновешенного гироскопа с учетом трения в опорах (*Ya. Lounts.* Mouvement d'un gyroscope déséquilibré compte tenu du frottement dans les paliers). — Изв. высш. учебн. заведений. Приборостроение, 1959, т. 2, № 4 (en russe).

16—01247

Лунц Я. Л. О движении гироскопа в кардановом подвесе, установленного на подвижной платформе (*Ya. Lounts.* Sur le mouvement d'un gyroscope suspendu à la cardan, placé sur une plate-forme mobile). — Изв. высш. учебн. заведений. Приборостроение, 1960, т. 3, № 4 (en russe).
Лунц Я. Л. О систематических уходах платформы трехосного гиростабилизатора при колебаниях основания (*Ya. Lounts.* Sur les dérives systématiques de la plate-forme d'un gyrostabilisateur à trois axes en cas des oscillations du support). — Изв. высш. учебн. заведений. Приборостроение, 1964, т. 7, № 4 (en russe).
Лунц Я. Л. Ошибки гироскопических приборов (*Ya. Lounts.* Erreurs des appareils gyroscopiques). Л., « Судостроение », 1968 (en russe).
Лунц Я. Л. Введение в теорию гироскопов (*Ya. Lounts.* Introduction à la théorie des gyroscopes). М., « Наука », 1972 (en russe).
Меркин Д. Р. Об устойчивости движения гирорамы (*D. Merkine.* Sur la stabilité du mouvement d'une plate-forme gyroscopique). — ПММ, 1961, т. 25, вып. 6 (en russe).
Метелицын И. И. К вопросу о гироскопической стабилизации (*I. Métélitsine.* Sur la question de la stabilisation gyroscopique). — Докл. АН СССР, 1952, т. 86, № 1 (en russe).
Назаров Б. И. О погрешностях гиростабилизаторов (*B. Nazarov.* Sur les erreurs des gyrostabilisateurs). — Изв. АН СССР. ОТН, Техн. кибернетика, 1963, № 2 (en russe).
Николаи Е. Л. К теории девиаций гироскопических приборов (*E. Nicolaï.* Sur la théorie des déviations des appareils gyroscopiques). — Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1941, № 3 (en russe).
Николаи Е. Л. Теория гироскопов (*E. Nicolaï.* Théorie des gyroscopes). Л.-М., Гостехиздат, 1948 (en russe).
Николаи Е. Л. Гироскоп в кардановом подвесе (*E. Nicolaï.* Gyroscope suspendu à la cardan). Изд. 2-е. М., « Наука », 1964 (en russe).
Новожилов И. В. О понижении порядка уравнений гироскопических систем (*I. Novojilov.* Sur la réduction de l'ordre des équations des systèmes gyroscopiques). — Инж. ж. МТТ, 1966, № 5 (en russe).
Новожилов И. В. Об одной из форм уравнений малых колебаний гироскопа в кардановом подвесе (*I. Novojilov.* Sur l'une des formes des équations des petites oscillations d'un gyroscope suspendu à la cardan). — Инж. ж. МТТ, 1968, № 1 (en russe).
Новожилов И. В. О « магнусовых уходах » гироскопа в кардановом подвесе конечной жесткости (*I. Novojilov.* Sur les « dérives de Magnus » d'un gyroscope de rigidité finie suspendu à la cardan). — Инж. ж. МТТ, 1968, № 3 (en russe).
Новожилов И. В. Уходы трехосного силового гиростабилизатора в зависимости от расположения гироблоков на платформе (*I. Novojilov.* Dérives d'un gyrostabilisateur asservi à trois axes, suivant la position des blocs gyroscopiques sur la plate-forme). — Инж. ж. МТТ, 1968, № 2 (en russe).
Новожилов И. В. О применении асимптотических разложений теории дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной для исследования гироскопических систем (*I. Novojilov.* Sur l'application des développements asymptotiques étudiés en théorie des équations différentielles à petit paramètre de la dérivée d'ordre le plus élevé, à l'étude des systèmes gyroscopiques). — Изв. АН СССР, МТТ, 1970, № 4 (en russe).
Пельпор Д. С. Свободное движение гироскопа, заключенного в кардановом подвесе (*D. Pelpor.* Mouvement libre d'un gyroscope suspendu à la cardan). Ч. 1. — Научн. докл. высш. школы. Машиностроение и приборостроение, 1958, № 3 (en russe).
Пельпор Д. С. Движение гироскопа, заключенного в кардановом подвесе, ротор которого динамически несбалансирован (*D. Pelpór.* Mouvement d'un gyroscope suspendu à la cardan dont le rotor n'est pas équilibré dynami-

quement). Ч. 2. — Научн. докл. высш. школы. Машиностроение и приборостроение, 1959, № 1 (en russe).

Пельпор Д. С. Влияние инерции рамок кардана на движение гироскопа установленного на вибрирующей платформе (*D. Pelpor.* Influence de l'inertie des anneaux de cardan sur le mouvement d'un gyroscope installé sur une plate-forme vibrante). — Изв. высш. учебн. заведений. Приборостроение, 1959, т. 2, № 5 (en russe).

Пельпор Д. С., Сумароков Н. П. Движение трехосного гироскопического стабилизатора на качающемся основании (*D. Pelpor, N. Soumarokov.* Mouvement d'un stabilisateur gyroscopique à trois axes sur un support oscillant). — Изв. высш. учебн. заведений. Приборостроение, 1962, т. 5, № 2 (en russe).

Пельпор Д. С. Гироскопические приборы и автопилоты (*D. Pelpor.* Appareils gyroscopiques et autopilotes). М., « Машиностроение », 1964 (en russe).

Пельпор Д. С. Теория гироскопических стабилизаторов (*D. Pelpor.* Théorie des stabilisateurs gyroscopiques). М., « Машиностроение », 1965 (en russe).

Пельпор Д. С. Гироскопические системы. Ч. 1. Теория гироскопов и гироскопических стабилизаторов (*D. Pelpor.* Systèmes gyroscopiques. P. 1. Théorie des gyroscopes et des stabilisateurs gyroscopiques). М., « Высш. школа », 1971 (en russe).

Ройтенберг Я. Н. Некоторые вопросы теории силовых гироскопических стабилизаторов (*Ya. Reutenberg.* Certaines questions de la théorie des stabilisateurs gyroscopiques asservis). — Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1962, № 4 (en russe).

Ройтенберг Я. Н. Гироскопы (*Ya. Reutenberg.* Gyroscopes). М., « Наука », 1966 (en russe).

Румянцев В. В. Об устойчивости движения гироскопа в кардановом подвесе (*V. Roumiantsev.* Sur la stabilité du mouvement d'un gyroscope suspendu à la cardan). — ПММ, 1958, т. 22, вып. 3 (en russe).

Скимель В. Н. Некоторые задачи движения и устойчивости тяжелого гироскопа (*V. Skimel.* Certains problèmes sur le mouvement et sur la stabilité d'un gyroscope pesant). — Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1958, т. 38 (en russe).

Скимель В. Н. К устойчивости стационарных движений гироскопической рамы (*V. Skimel.* Sur la stabilité des mouvements stationnaires d'une plateforme gyroscopique). — ПММ, 1960, т. 24, № 4 (en russe).

Слезкин Л. Н. О применении асимптотических методов к исследованию гироскопических систем (*L. Slezkine.* Sur l'application des méthodes asymptotiques à l'étude des systèmes gyroscopiques). — Докл. АН СССР, 1962, т. 147, № 1 (en russe).

Слезкин Л. Н. О влиянии инерционности колец карданова подвеса на движение гироскопического интегратора линейных ускорений (*L. Slezkine.* Sur l'influence de l'inertie des anneaux de la suspension à la cardan sur le mouvement d'un intégrateur gyroscopique d'accélérations linéaires). — Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 4 (en russe).

Сломянский Г. А. Об интегрировании уравнений движения симметричного астатического гироскопа (*G. Slomiansky.* Sur l'intégration des équations du mouvement d'un gyroscope astatique symétrique). — ПММ, 1953, т. 17, вып. 4 (en russe).

Степаненко Н. П. Об уходе двух связанных гироскопов (*N. Stépanenko.* Sur la dérive de deux gyroscopes liés). — Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 1 (en russe).

Степаненко Н. П. О гироскопе в кардановом подвесе на свободном основании (*N. Stépanenko.* Sur un gyroscope suspendu à la cardan, placé sur un support libre). — Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 3 (en russe).

Стороженко В. А., Темченко М. Е. О применении теории конечных вращений к задаче автономного определения координат места движущегося объекта (*V. Storojenko, M. Temtchenko.* Sur l'application de la théorie des

rotations finies à la résolution du problème de la détermination autonome des coordonnées du point d'un mobile). — Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 3 (en russe).

Стороженко В. А. Применение энергетического метода к исследованию устойчивости некоторых колебательных систем (*V. Storojenko.* Application de la méthode énergétique à l'étude de la stabilité de certains systèmes oscillants). — Инж. ж. МТТ, 1966, № 3 (en russe).

Тихменев С. С. К вопросу об « уводе » гироскопа на кардановом подвесе при его нутации (*S. Tikhménev.* Sur la question de la dérive d'un gyroscope suspendu à la cardan lors de son mouvement de nutation). — Изв. высш. учебн. заведений. Приборостроение, 1959, т. 2, № 5 (en russe).

Харламов С. А. О движении гироскопа в кардановом подвесе при наличии момента вокруг оси собственного вращения (*S. Kharlamov.* Sur le mouvement d'un gyroscope suspendu à la cardan en présence d'un moment par rapport à l'axe de rotation propre). — Докл. АН СССР, 1961, т. 139, № 2 (en russe).

Харламов С. А. О движении гироскопа, установленного на шариковых подшипниках в кардановом подвесе (*S. Kharlamov.* Sur le mouvement d'un gyroscope suspendu à la cardan dans des paliers à billes). — ПММ, 1962, т. 26, вып. 2 (en russe).

Харламов С. А. К теории астатического гироскопа с электрическим приводом, установленного в кардановом подвесе (*S. Kharlamov.* Sur la théorie d'un gyroscope astatique suspendu à la cardan, à commande électrique). — Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1963, № 6 (en russe).

Четаев Н. Г. О гироскопе в кардановом подвесе (*N. Tchétaev.* Sur le gyroscope suspendu à la cardan). — ПММ, 1958, т. 22, вып. 3 (en russe).

Grammel R. Der Kreisel, seine Theorie und seine Anwendungen. Bd. 1-2. Berlin, Springer, 1950.

Ishlinsky A. Yu. On the dynamics of a system of rigid bodies. In: Theoretical and applied mechanics. (Proc. 13th Int. Congress of Theoret. and Appl. Mech. Moscow University, 1972). Berlin, e. a., Springer-Verlag, 1973.

Magnus K. Auswanderungserscheinungen an schwingenden Kreiseln in kardanischer Lagerung. — In: Advances Aeronautical Sciences. Vol. 1. London, e. a., Pergamon Press, 1959, p. 507-523.

Magnus K. Beiträge zur Dynamik des Kräftefreien, Kardanisch gelagerten Kreisels. — Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. Januar-Februar, 1955, Bd. 35, H. 1/2.

Magnus K. Der Kreisel, eine Einführung in die Lehre vom Kreisel, mit Anleitung zur Durchfürung von Versuchen. Göttingen, Industrie-Druck, 1965.

Magnus K. Kreisel. Theorie und Anwendungen. Berlin, e. a., Springer-Verlag, 1971.

Scarborough J.B. The gyroscope. Theory and applications. New York-London. Interscience, Publ., 1958.

Stewart R.M. Some effects of vibration and rotation on the drift of gyroscopic instruments. — ARS Journal, 1959, vol. 29, No. 1.

Strett Joan W. The Theory of sound. Macmillan and Co., Limited, London, 1926.

Wrigley W., Hollister W.M., Denhard W.G. Gyroscopic theory, design, and instrumentation. Cambridge (Mass.), — London, M.I.T. 1969.

CHAPITRE IV

NAVIGATION PAR INERTIE LE LONG DE L'ÉQUATEUR ET SUR UN ARC DE GRAND CERCLE DE LA TERRE NON TOURNANTE

§ 1. Eléments sensibles des systèmes de navigation par inertie. Accéléromètres

Le problème de la navigation par inertie consiste, dans le cas général, à déterminer la position d'un mobile se déplaçant de façon quelconque sur la sphère terrestre [1]), ainsi que son orientation par rapport aux points cardinaux sans avoir à tenir compte d'information provenant de l'extérieur du véhicule (repères terrestres, observations des étoiles, du Soleil, de la Lune, mesure du champ magnétique de la Terre, réception des signaux émis par les radiophares, etc.). Les données de départ pour la résolution de ce problème sont constituées par les indications des éléments dits sensibles des systèmes de navigation par inertie, lesquels sont représentés par des dispositifs gyroscopiques simples et complexes (gyroscopes libres, tachymètres gyroscopiques, gyrocompas, plates-formes gyrostabilisées, etc.), ainsi que par des accéléromètres destinés à divers usages (masses à suspension élastique, intégrateurs gyroscopiques, pendules à volant intégrateur de Boykow et autres).

Les grandeurs élaborées par les éléments sensibles sont introduites dans un calculateur électromécanique ou électronique qui effectue la résolution des équations de la navigation par inertie, celles-ci ayant pour inconnues les coordonnées du mobile sur la sphère terrestre et son cap. Ces équations seront indiquées plus loin, au début du cinquième chapitre. Quant au chapitre actuel, il traite d'un problème particulier de la navigation par inertie, qui consiste à déterminer la position d'un mobile se déplaçant sur un arc de grand cercle d'une sphère non tournante S, concentrique à la Terre (v. plus haut. chap. I, § 2) ou, ce qui revient au même, sur un arc de grand cercle terrestre dans l'hypothèse où la Terre ne tourne pas.

Les éléments sensibles que comportent les systèmes de navigation par inertie servent, en règle générale, à déterminer les changements d'orientation (de déplacement angulaire, de vitesse angulaire) d'une plate-forme spéciale, stabilisée par gyroscopes, par rapport à un

---

[1]) Les systèmes à inertie pure qui comportent également des éléments servant à déterminer l'altitude (navigation spatiale) sont instables; ils ne sont pas étudiés dans le présent ouvrage. Voir page 320.

certain système de coordonnées non tournant. En outre, ces éléments sont utilisés pour la mesure directe ou indirecte de certains paramètres (accélération et vitesse apparentes) qui caractérisent dans une certaine mesure le mouvement « absolu » du centre de la suspension de la plate-forme en mouvement avec le véhicule à bord duquel elle est installée. D'après ce qui a été exposé au chapitre I du présent tome, par mouvement « absolu » on doit entendre ici le déplacement de la plate-forme par rapport à un système de référence galiléen fixe.

Les mouvements de rotation d'une plate-forme stabilisée peuvent être mesurés à l'aide de gyroscopes de haute précision. Quant à la détermination du déplacement du centre de la plate-forme par rapport au système de référence galiléen choisi, elle n'est possible que théoriquement parce que le fonctionnement des systèmes inertiels à trois dimensions est instable. Cette détermination exige, bien entendu, que l'on connaisse tant le champ de gravitation que la position de départ et la vitesse initiale du centre de la plate-forme.

Les éléments sensibles dont l'action est basée sur les lois de la mécanique classique ne permettent de mesurer que l'accélération dite apparente $\bar{a}$ qui est égale à la différence géométrique entre l'accélération absolue $\bar{w}$ (c'est-à-dire par rapport à un système galiléen) et l'accélération de la gravitation $\bar{j}$ (accélération absolue d'un point matériel libre, en un lieu donné de l'espace, par suite de son attraction par la Terre et les autres corps célestes).

Dans ce qui suit, il suffira (v. chap. I, § 1) d'entendre par accélération absolue $\bar{w}$ l'accélération rapportée à un système de coordonnées non tournant $\xi^s\eta^s\zeta^s$ ayant son origine au centre de la Terre, et par vecteur $\bar{j}$ l'accélération, par rapport au même système $\xi^s\eta^s\zeta^s$, d'un point libre sous la seule action de l'attraction terrestre.

Les éléments sensibles mesurant l'accélération ont été appelés *accéléromètres* [1]). Dans le cas le plus simple, l'accéléromètre mesurant la projection de l'accélération apparente sur une direction donnée v de son axe sensible peut être constitué par le dispositif suivant (fig. 102). Un poids de masse m se déplace, avec un jeu minimal, à l'intérieur d'un cylindre du boîtier de l'appareil. Le boîtier est relié au poids par un ressort de raideur c.

Il n'est pas difficile de se convaincre que l'écart δ du poids par rapport à la position dans laquelle le ressort n'est pas contraint (c'est-à-dire ni tendu, ni comprimé) caractérise la projection a_v de l'accélération apparente du boîtier de l'accéléromètre sur la direction de l'axe v. Ce dernier est dans le cas donné l'axe de la cavité cylindrique considérée. En effet, supposons que le boîtier

[1]) Cette appellation est mal fondée. Il serait plus correct de donner à ces appareils le nom de newtonmètres.

de l'accéléromètre est animé, de même que le mobile qui le porte, d'un mouvement de translation avec une accélération absolue $\overline{w}$. Alors, en négligeant la masse du ressort et le frottement entre le poids et les parois du cylindre, on peut représenter l'équation du mouvement du poids par rapport au boîtier de l'appareil sous la forme suivante:

$$m\frac{d^2\delta}{dt^2} = -c\delta - mw_\nu + mj_\nu. \qquad (4.1.1)$$

Ici, δ désigne, comme il a déjà été dit, l'écart du poids par rapport au boîtier le long de la direction ν ou, ce qui revient au même, la valeur de la déformation du ressort, w_ν la projection de l'accélération du boîtier sur la direction ν, j_ν la projection de l'accélération de la gravitation sur la même direction.

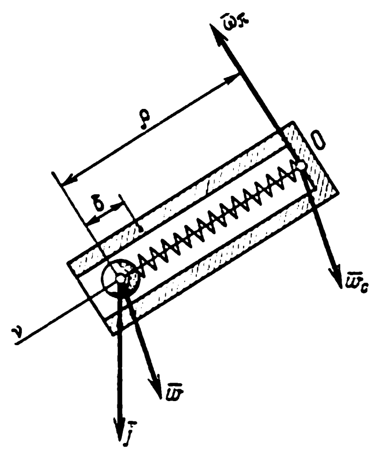


Fig. 102

Admettons que la période d'oscillations propres du poids par rapport au boîtier immobile, définie par la formule connue

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}, \qquad (4.1.2)$$

est beaucoup plus petite que le temps caractéristique de variation de l'accélération du boîtier de l'accéléromètre, par exemple le temps pendant lequel l'accélération subit une croissance ou décroissance intense. Dans ce cas, on peut, avec une approximation suffisante pour la pratique, omettre dans l'équation (4.1.1) la dérivée seconde de l'écart δ par rapport au temps. Il vient

$$\delta = \frac{-mw_\nu + mj_\nu}{c}. \qquad (4.1.3)$$

L'écart observé du poids par rapport à la position dans laquelle le ressort n'est pas contraint peut être gradué de telle sorte qu'il mesure directement une grandeur a_ν liée à la déformation δ du ressort par la relation

$$a_\nu = -\frac{c}{m}\delta. \qquad (4.1.4)$$

Dans ce cas, le produit ma_ν détermine la force $c\delta$ (changée de signe) avec laquelle est tendu le ressort. L'égalité (4.1.3) donne maintenant

$$a_\nu = w_\nu - j_\nu. \qquad (4.1.5)$$

Il en résulte, d'après la définition de l'accélération apparente donnée au début de ce paragraphe, que la quantité a_ν est la projection de l'accélération apparente $\bar{a}$ sur la direction ν. Comme il a déjà été indiqué, cette direction est appelée *axe sensible* de l'accéléromètre, et l'accéléromètre que nous venons de décrire est dit *à un seul axe sensible*.

Pour pouvoir mesurer le vecteur accélération apparente $\bar{a}$, il est nécessaire d'utiliser trois accéléromètres à un axe, en les plaçant sur la plate-forme stabilisée de telle sorte que leurs axes sensibles ne soient pas tous parallèles à un même plan. Des accéléromètres plus complexes peuvent mesurer directement le vecteur accélération apparente ou sa projection sur un plan donné.

Si le boîtier d'un accéléromètre à un seul axe sensible est encore animé de mouvements angulaires, par grandeur w_ν figurant dans l'équation du mouvement (4.1.5) il faut entendre la projection de l'accélération d'entraînement du poids sur la direction ν, c'est-à-dire l'accélération absolue d'un point du boîtier de l'appareil, où se trouve à l'instant courant le poids pris dans ce cas pour point matériel. Désignons par $\bar{w}_0$ l'accélération absolue du point O de fixation du ressort de l'accéléromètre sur son boîtier, ou l'accélération d'un autre point fixe quelconque du boîtier de l'accéléromètre, situé, lui aussi, sur l'axe sensible ν (v. fig. 102). Désignons par ρ la distance entre ce point et le poids, et par ω_π la composante de la vitesse angulaire du boîtier, suivant le plan perpendiculaire à l'axe sensible. On peut montrer [1]) que la différence entre les projections de l'accélération $\bar{w}_0$ et de l'accélération d'entraînement $\bar{w}^e$ du poids sur l'axe ν est égale au produit $\omega_\pi^2\rho$. Si les dimensions de l'accéléromètre sont petites, ce produit est peu élevé et, en règle générale, peut être négligé. D'après ce qui précède, dans le cas où le boîtier de l'accéléromètre est placé sur une plate-forme stabilisée, les mouvements angulaires de cette dernière peuvent être négligés lors de la détermination de l'accélération apparente du centre de sa suspension. Dans ce qui suit, nous admettons donc que l'accélération apparente du centre d'une plate-forme stabilisée est mesurée directement par les accéléromètres qu'elle porte.

Le cas où les axes sensibles des accéléromètres ne passent pas par le centre de la suspension exige une étude supplémentaire qui tient compte des accélérations angulaires de la plate-forme. Ces dernières prédéterminent en principe la différence entre les indications couran-

[1]) A cet effet, il convient de se reporter aux formules (v. chap. I, § 1 du présent livre) qui expriment les projections de l'accélération des points d'un corps solide (boîtier de l'accéléromètre) sur les axes d'un système de coordonnées ayant son origine au point de fixation du ressort. En faisant usage de ces formules, il convient de calculer la projection, sur l'axe sensible de l'accéléromètre, de l'accélération d'un point quelconque situé sur cet axe.

tes des accéléromètres à axes sensibles parallèles, en cas d'une stabilisation imparfaite de la plate-forme. Cependant, on peut s'attendre que même dans un tel cas les indications des accéléromètres peuvent être utilisées pour la mesure de l'accélération apparente du centre de la plate-forme si seulement la distance entre le centre et l'axe sensible n'est pas grande.

Pour de faibles valeurs des accélérations apparentes, par exemple en cas de leur mesure à bord d'un satellite artificiel, les conclusions faites plus haut sur l'égalité pratique des indications des accéléromètres à axes sensibles parallèles cessent d'être valables. De plus, d'après les indications de plusieurs accéléromètres à un seul axe sensible, écartés l'un par rapport à l'autre, et, en particulier, ayant leurs axes sensibles disposés de façon différente, on peut déterminer (il est vrai de façon non univoque) le vecteur vitesse angulaire du satellite sans avoir recours à un système gyroscopique quelconque.

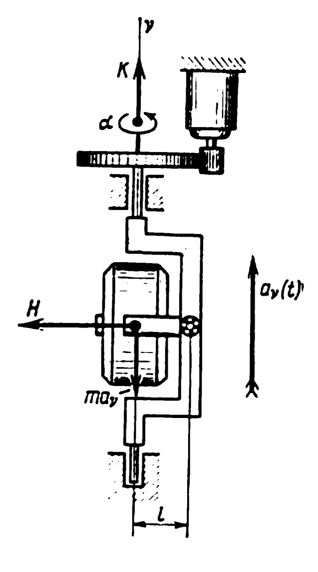


Fig. 103

Les constructions des accéléromètres à un seul axe sensible peuvent être des plus variées. Certains de tels appareils mesurent non pas l'accélération apparente elle-même, mais son intégrale par rapport au temps. C'est le cas de l'intégrateur gyroscopique d'accélérations apparentes, appareil hautement perfectionné [1]). Dans cet appareil, la vitesse angulaire $d\alpha/dt$ de précession du gyroscope (fig. 103) est proportionnelle à la projection a_v, sur l'axe de l'anneau de cardan extérieur, du vecteur accélération apparente du centre de masse du système déséquilibré « boîtier — rotor » du gyroscope. Il en résulte que l'angle α de rotation de l'anneau extérieur par rapport au boîtier est proportionnel à l'intégrale de cette projection; cet angle est également proportionnel à la masse m du système « boîtier — rotor » et à la distance l du centre de cette masse à l'axe du boîtier, et inversement proportionnel au moment cinétique propre H du gyroscope (v. chap. II, § 7 du présent livre). Ainsi, on a

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{ml}{H}\tilde{V}_v, \qquad \tilde{V}_v = \int_0^t a_v(t)\,dt, \tag{4.1.6}$$

[1]) Voir, par exemple, *Пельпор Д. С.* « Гироскопические приборы и автопилоты » (*D. Pelpor* « Appareils gyroscopiques et autopilotes »). M., « Машиностроение », 1964 (en russe).

où α_0 est la valeur initiale de l'angle α à l'instant $t = 0$, et $\tilde{V}_v$ la projection de la vitesse dite apparente sur l'axe v.

Pour que le fonctionnement d'un intégrateur gyroscopique soit correct, on applique, à l'anneau extérieur de la suspension de son gyroscope, des forces créées artificiellement. Leur moment résultant K par rapport à l'axe de l'anneau extérieur doit provoquer une précession supplémentaire du gyroscope, grâce à laquelle le vecteur moment cinétique propre H (ou, ce qui revient au même, l'axe de rotation propre du rotor) est constamment perpendiculaire à l'axe de cet anneau. Nous avons calculé, au chap. II, § 7 du présent livre, l'erreur de l'intégrateur gyroscopique dans le cas où ce vecteur fait avec l'axe de l'anneau extérieur un angle qui diffère de l'angle droit par une constante δ.

Les intégrateurs d'accélérations apparentes sont largement utilisés dans les systèmes de guidage par inertie des fusées balistiques. Mais ils peuvent également trouver des applications dans les systèmes de navigation par inertie.

§ 2. Schéma de Kofmann-Levental (variante à un seul axe)

Supposons qu'un véhicule se déplace sur un arc de grand cercle d'une sphère non tournante imaginaire S dont le centre coïncide avec le centre de la Terre (v. plus haut chap. I, § 2). Comme il a été indiqué précédemment, l'introduction d'une telle sphère, qui ne participe pas à la rotation de la Terre, s'avère bien commode pour l'étude et l'exposé ultérieur de nombreuses questions ayant trait à la théorie des gyroscopes et à la navigation par inertie.

Associons à la sphère S, qui vient d'être introduite, un système de coordonnées non tournant arbitrairement choisi $\xi^s\eta^s\zeta^s$ ayant son origine au centre de la sphère. Il est évident que la vitesse angulaire absolue $\bar{\omega}^s$ de ce système est nulle.

Le problème de navigation par inertie consiste dans ce cas à déterminer la longueur $s = s(t)$ de l'arc de grand cercle mentionné, compris entre la position initiale et la position actuelle du mobile ou plus exactement d'un certain point qui lui est lié. En particulier, le mobile peut se déplacer dans le plan de l'équateur à une altitude constante, de valeur connue, au-dessus de la Terre. Dans un tel cas, la détermination de la position du mobile par rapport à la Terre se réduit à un simple comptage du temps qui s'est écoulé depuis le commencement du mouvement, pour pouvoir calculer la rotation de la Terre par rapport à la sphère S correspondant à ce temps.

Pour la résolution pratique de ce problème particulier de navigation par inertie, on peut proposer [1]) un dispositif suivant (fig. 104).

[1]) Voir *Кофман Л. М., Левенталь Е. Б.* «Навигационный прибор для регистрации пройденного пути и скорости». Авт. свид. № 184465 от 26 де-

Un gyroscope suspendu à la cardan est installé sur une plate-forme dite stabilisée qui est à son tour suspendue à bord d'un mobile. La plate-forme est stabilisée, à l'aide de systèmes d'asservissement, de telle sorte qu'elle est constamment perpendiculaire à l'axe de rotation propre du gyroscope ou, ce qui revient au même, au vecteur H de son moment cinétique propre.

On suppose que lors du mouvement du mobile, le centre de la suspension de la plate-forme stabilisée, appelé par la suite tout

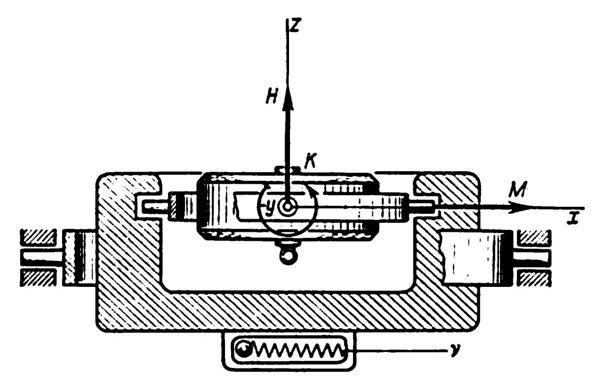


Fig. 104

simplement centre de la plate-forme, se déplace sur un arc du grand cercle mentionné, et que l'axe de l'anneau extérieur de la suspension à la cardan du gyroscope est orienté de telle sorte qu'il se trouve en permanence dans le plan de ce cercle. Le vecteur moment cinétique propre H du gyroscope est amené, lui aussi, continuellement dans ce plan. A cet effet, on applique à l'axe du boîtier du gyroscope un couple de correction K [1]). A la plate-forme stabilisée est rigidement relié le boîtier d'un accéléromètre à un seul axe sensible, par exemple de celui qui a été décrit au paragraphe précédent. L'axe sensible v de l'accéléromètre se trouve, lui aussi, dans le plan du grand cercle

кабря 1932 г. (*L. Kofmann, E. Levental* « Appareil de navigation pour enregistrement de la distance et de la vitesse ». Certificat d'auteur nº 184465, le 26 décembre 1932). Официальный бюллетень Комитета по делам изобретений и открытий при СМ СССР, 1966, № 15 (en russe). L'étude théorique de ce schéma a été entreprise par B. Boulgakov dès 1938, mais n'a été publiée qu'en 1969, voir *Булгаков Б. В.* « Теория одной гироскопической системы навигации » (*B. Boulgakov.* « Théorie d'un système gyroscopique de navigation »).— Изв. АН СССР, МТТ, 1969, № 3 (en russe). Signalons une autre étude de ce thème: *Ткачев Л. И.* « О 84-минутном периоде для систем со связанными и свободными гироскопами » (*L. Tkatchev.* « Sur la période de 84 minutes pour les systèmes à gyroscopes liés et libres »).— ПММ, 1949, т. 13, вып. 2 (en russe).

[1]) Voir plus haut chap. II où sont exposées les lois de la théorie de précession des gyroscopes.

et est parallèle à l'axe x de l'anneau extérieur du gyroscope. D'après ce qui a été établi au paragraphe précédent, on peut admettre que l'accéléromètre mesure la valeur courante $a_v = a_v(t)$ de la projection, sur l'axe sensible v, du vecteur accélération apparente du centre de la plate-forme.

La quantité $a_v(t)$ est introduite dans un calculateur qui élabore, avec un retard négligeable, une fonction

$$F_v(t) = \int_0^t a_v(t)\,dt + b_v, \tag{4.2.1}$$

où b_v est une constante dont la valeur sera déterminée un peu plus loin.

La fonction $F_v(t)$ est reproduite, au facteur constant k près, au moyen d'un électro-aimant, sous la forme du moment $M = M(t)$ qui s'exerce sur l'axe de l'anneau extérieur du gyroscope. Il en résulte que sous l'action du moment mentionné

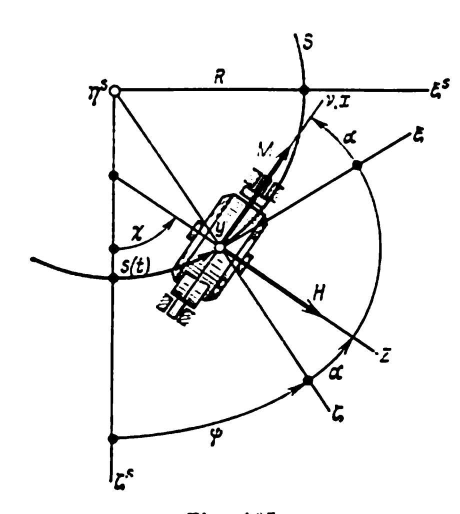


Fig. 105

$$M = kF_v(t) = k\left[\int_0^t a_v(t)\,dt + b_v\right] \tag{4.2.2}$$

le gyroscope précessionne dans le plan du grand cercle (fig. 105). La vitesse angulaire ω de cette précession s'exprime (v. chap. II, § 2 du présent livre) par la formule connue

$$\omega = \frac{M}{H}. \tag{4.2.3}$$

C'est à la même vitesse angulaire $\omega = \omega(t)$ que les systèmes d'asservissement font tourner aussi la plate-forme stabilisée par rapport au système de coordonnées non tournant $\xi^s\eta^s\zeta^s$ introduit au début du présent paragraphe.

Une chose importante est que la position initiale du gyroscope et les constantes b_v et k figurant dans les formules (4.2.1) et (4.2.2) peuvent être choisies de telle sorte que la direction du moment cinétique propre H passe à tout instant par le centre de la sphère S et donc par le centre de la Terre [1]), quel que soit le mouvement du

[1]) D'autres variantes de disposition relative du gyroscope et de la plate-forme stabilisée sont également possibles. Par exemple, on peut faire de sorte que la plate-forme soit assujettie, au moyen de systèmes d'asservissement, à rester

centre de la plate-forme sur un arc de grand cercle. Dans ce cas, la longueur de l'arc $s(t)$ compris entre les positions initiale et courante du centre de la plate-forme sur la sphère s'exprime par une formule bien simple

$$s(t) = \int_0^t F_v(t)\,dt. \tag{4.2.4}$$

Ainsi, pour pouvoir déterminer la valeur courante de la longueur de l'arc $s(t)$, il faut prévoir dans l'appareil que nous décrivons encore un calculateur pour intégrer la fonction $F_v(t)$. Ainsi donc, le problème de navigation par inertie sur un arc de grand cercle de la sphère non tournante S se trouvera résolu.

Justifions les propositions qui viennent d'être énoncées. Faisons coïncider le plan de coordonnées $\zeta^s\xi^s$ du système non tournant $\xi^s\eta^s\zeta^s$ avec le plan du grand cercle de la sphère S sur lequel se déplace le mobile. Supposons que la position initiale du centre de la plate-forme (v. fig. 105) se trouve sur l'axe ζ^s. Par ailleurs, introduisons un système de coordonnées mobile $\xi\eta\zeta$ ayant son origine au centre de la plate-forme. Dirigeons l'axe ζ de ce système suivant le prolongement du rayon de la sphère S, passant par la position courante du centre de la plate-forme, et l'axe ξ suivant la tangente au grand cercle. A l'instant initial $t = 0$, les axes ζ et ζ^s sont orientés suivant une même droite, et les axes ξ et ξ^s sont parallèles. L'angle des axes ζ^s et ζ (ou, ce qui revient au même, des axes ξ^s et ξ) à l'instant courant t sera désigné par $\psi = \psi(t)$.

Attachons à la plate-forme elle-même un système de coordonnées xyz, en plaçant son origine également au centre de la plate-forme. Dirigeons l'axe z du système xyz suivant le vecteur moment cinétique propre H du gyroscope et plaçons l'axe x dans le plan du grand cercle; l'axe y sera donc parallèle aux axes η et η^s. Désignons par $\alpha = \alpha(t)$ l'angle inclus entre l'axe ζ et le vecteur H ou, ce qui revient au même, l'axe z. Ceci étant, remarquons que l'angle que la plate-forme perpendiculaire au vecteur H fait avec l'axe ξ tangent au grand cercle est encore l'angle $\alpha(t)$.

Il est évident que

$$s(t) = R\psi(t) \tag{4.2.5}$$

et

$$\psi + \alpha = \chi, \tag{4.2.6}$$

---

constamment parallèle au vecteur H. Dans un tel cas et avec le même choix des constantes b_V et k, le vecteur H sera invariablement perpendiculaire au rayon de la Terre mené vers le centre de la plate-forme, si telle était sa position initiale.

où $\chi = \chi(t)$ est l'angle formé par le vecteur H (c'est-à-dire par l'axe z) avec la direction de l'axe ζ^s du système de coordonnées non tournant $\xi^s\eta^s\zeta^s$.

La vitesse angulaire ω de précession du gyroscope, qui est la vitesse angulaire de rotation, autour de l'axe η, du boîtier du gyroscope et en même temps la vitesse angulaire de son anneau extérieur et de la plate-forme stabilisée, s'exprime par la formule

$$\omega = \frac{d\chi}{dt} = \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\alpha}{dt}. \qquad (4.2.7)$$

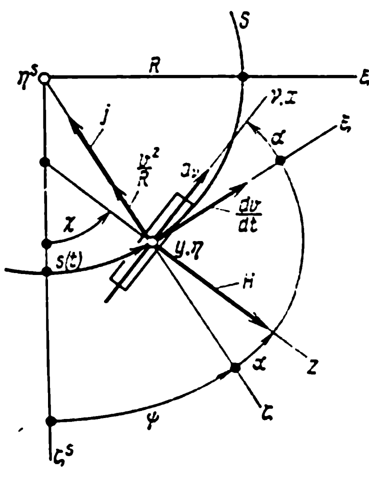


Fig. 106

Lorsque la valeur de la dérivée $d\psi/dt$ est strictement positive, le système de coordonnées $\xi\eta\zeta$ tourne en sens inverse des aiguilles d'une montre par rapport au système $\xi^s\eta^s\zeta^s$, si la rotation est observée du côté de la partie positive de l'axe η^s parallèle à l'axe η. Il en est de même, lorsque $d\alpha/dt > 0$, de la plate-forme stabilisée avec le gyroscope, ainsi que du système de coordonnées xyz, qui lui est lié, qui tourne autour de l'axe η ou, ce qui revient au même, autour de l'axe y par rapport au système $\xi\eta\zeta$.

L'accélération absolue du centre de la plate-forme vaut la somme géométrique de l'accélération centripète w_n et de l'accélération tangentielle w_τ. Par hypothèse, ce centre se déplace suivant un arc de grand cercle de la sphère non tournante S. En appliquant les formules bien connues, on obtient

$$w_\tau = \frac{dv}{dt}, \qquad w_n = \frac{v^2}{R}, \qquad (4.2.8)$$

où v est la vitesse de mouvement du centre de la plate-forme suivant le cercle, et R le rayon de ce dernier.

Il n'est pas difficile de voir (fig. 106) que la projection w_ν de l'accélération absolue sur l'axe sensible ν de l'accéléromètre, qui se confond avec l'axe x du système de coordonnées xyz, s'exprime par la formule suivante :

$$w_\nu = w_x = \frac{dv}{dt}\cos\alpha + \frac{v^2}{R}\sin\alpha, \qquad (4.2.9)$$

où $\alpha = \alpha(t)$ est l'angle, introduit plus haut, que le vecteur H forme avec l'axe ζ.

L'accélération de la gravitation j est dirigée vers le centre de la Terre, et sa projection sur l'axe ν (ou, ce qui revient au même, sur

l'axe x) a pour valeur

$$j_\nu = j_x = j \sin \alpha. \qquad (4.2.10)$$

Pour déterminer la projection de l'accélération apparente sur la direction ν, utilisons maintenant la formule (4.1.5) du paragraphe précédent. Compte tenu de deux dernières égalités, on obtient

$$a_\nu = a_x = \frac{dv}{dt} \cos \alpha + \left(\frac{v^2}{R} - j\right) \sin \alpha. \qquad (4.2.11)$$

Ainsi, dans le cas général, pour $\alpha(t) \neq 0$, la fonction $F_\nu(t)$ se présente, suivant les formules (4.2.1) et (4.2.11), sous la forme

$$F_\nu(t) = \int_0^t \left[\frac{dv}{dt} \cos \alpha + \left(\frac{v^2}{R} - j\right) \sin \alpha\right] dt + b_\nu. \qquad (4.2.12)$$

Introduisons maintenant l'expression obtenue pour la fonction $F_\nu(t)$ dans la formule (4.2.2) donnant le moment M. Après cela, l'équation (4.2.3) de la précession du gyroscope se transforme, compte tenu de la formule (4.2.7), en une équation intégro-différentielle suivante déterminant la fonction inconnue $\alpha = \alpha(t)$:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{k}{H} \int_0^t \left[\frac{dv}{dt} \cos \alpha + \left(\frac{v^2}{R} - j\right) \sin \alpha\right] dt + \frac{kb_\nu}{H} - \frac{d\psi}{dt}. \qquad (4.2.13)$$

Elle sert de base pour l'analyse qui suit.

Pour simplifier les raisonnements ultérieurs, introduisons une plate-forme auxiliaire imaginaire ayant son centre confondu avec le centre de la plate-forme principale. Plaçons sur cette plate-forme un accéléromètre supplémentaire dont l'axe sensible ν_* est situé, lui aussi, dans le plan du grand cercle de la sphère S. Communiquons à la plate-forme auxiliaire un mouvement tel qu'elle soit constamment perpendiculaire au rayon du grand cercle, mené vers son centre. Dans ces conditions, la projection de l'accélération centripète w_n du centre de la suspension de la plate-forme et la projection de l'accélération de la gravitation j sur la direction de l'axe sensible ν_* de l'accéléromètre supplémentaire seront nulles, et les indications a_{ν_*} de cet accéléromètre seront données par la formule simple

$$a_{\nu_*} = w_\tau = \frac{dv}{dt}, \qquad (4.2.14)$$

ce qui découle directement aussi de la formule (4.2.11) si l'on y pose $\alpha = 0$ et remplace a_ν par a_{ν_*}.

Admettons que le moment M_*, appliqué maintenant à l'anneau de cardan extérieur du gyroscope installé sur la plate-forme auxiliaire, est produit, lui aussi, suivant la formule (4.2.2), mais au lieu des indications a_ν de l'accéléromètre principal on introduit dans le

calculateur les indications a_{v_*} de l'accéléromètre supplémentaire. Dans ce cas, la fonction F_{v_*} obtenue à la sortie du calculateur est de la forme

$$F_{v_*}(t)=\int_0^t \frac{dv}{dt}\,dt+b_{v_*}. \tag{4.2.15}$$

Donnons à la constante b_{v_*} figurant dans la dernière formule la valeur

$$b_{v_*}=v(0), \tag{4.2.16}$$

où $v(0)$ est la vitesse du centre de la plate-forme à l'instant $t=0$. Alors, la formule (4.2.15) prend, après une simplification évidente, la forme

$$F_{v_*}(t)=v(t). \tag{4.2.17}$$

Utilisons maintenant l'égalité (4.2.2) pour représenter le moment M_* appliqué au gyroscope, par la formule

$$M_*=kv(t). \tag{4.2.18}$$

Par conséquent, en vertu des formules (4.2.3) et (4.2.7), la vitesse angulaire de précession du gyroscope aura pour valeur

$$\frac{d\chi}{dt}=\frac{kv(t)}{H}=\frac{k}{H}\,\frac{ds}{dt}. \tag{4.2.19}$$

Choisissons le facteur de proportionnalité intervenant dans la formule (4.2.18), de manière à réaliser l'égalité

$$\frac{k}{H}=\frac{1}{R}. \tag{4.2.20}$$

Dans ce cas, les relations (4.2.19) et (4.2.5) donnent

$$\frac{d\chi}{dt}=\frac{1}{R}\,\frac{ds}{dt}=\frac{d\psi}{dt}, \tag{4.2.21}$$

où ψ est, comme précédemment, l'angle que font entre elles les directions initiale et courante du rayon de grand cercle mené vers le centre de la plate-forme, c'est-à-dire l'angle des axes ζ^s et ζ (fig. 106). A l'instant $t=0$, on a

$$\psi(0)=0. \tag{4.2.22}$$

Admettons qu'en position de départ, le gyroscope est installé de telle sorte que le vecteur H de son moment cinétique propre soit dirigé suivant le prolongement du rayon courant du grand cercle, c'est-à-dire suivant l'axe ζ. Dans ce cas, il convient de poser, compte tenu de l'égalité (4.2.6), que

$$\chi(0)=\alpha(0)=0, \tag{4.2.23}$$

ce qui donne en vertu de la relation (4.2.21), après intégration.

$$\chi(t) = \psi(t). \qquad (4.2.24)$$

La dernière égalité signifie que le vecteur H est orienté suivant le prolongement du rayon courant du grand cercle, c'est-à-dire le long de l'axe ζ, non seulement à l'instant initial mais également à tout instant du mouvement de la plate-forme auxiliaire. En même temps, les systèmes d'asservissement maintiennent continuellement la plate-forme principale dans la position perpendiculaire à ce rayon. Il en résulte que les plates-formes principale et auxiliaire sont orientées d'une façon tout à fait identique et, en conséquence, les indications a_v et a_{v_*} des accéléromètres principal et supplémentaire seront les mêmes. Du fait de ce qui précède, rien ne sera changé si au lieu des indications a_{v_*} de l'accéléromètre supplémentaire on introduit dans le calculateur les indications a_v de l'accéléromètre principal. La fonction $F_v(t)$ aura la même forme (4.2.17) que la fonction $F_{v_*}(t)$. Ceci étant, il est nécessaire que soit réalisée la condition analogue à l'égalité (4.2.16), soit

$$b_v = v(0). \qquad (4.2.25)$$

Il est évident que l'intégration de la fonction $F_v(t)$ dans le calculateur supplémentaire conduit dans ce cas à la formule

$$\int_0^t F_v(t)\,dt = \int_0^t v(t)\,dt = s(t), \qquad (4.2.26)$$

où $s(t)$ est, comme précédemment, la longueur de l'arc compris entre les positions initiale et courante du centre de la plate-forme et, bien entendu, $s(0) = 0$.

La formule (4.2.26) représente la solution du problème de navigation par inertie sur un arc de grand cercle d'une sphère non tournante S, avec la réalisation obligatoire des conditions (4.2.23) et (4.2.25).

Supposons maintenant que la condition (4.2.25) est remplie avec une certaine erreur ou qu'à l'instant initial $t = 0$ la plate-forme principale fait avec l'axe ξ un angle $\alpha(0) = \alpha_0$ légèrement différent de zéro, ou enfin, comme il faut s'y attendre le plus souvent en pratique, que ces deux cas se présentent à la fois. Alors la quantité

$$\sigma(t) = \int_0^t F_v(t)\,dt, \qquad (4.2.27)$$

obtenue par l'intégration de la fonction $F_v(t)$ dans le calculateur, sera différente de la valeur vraie de la longueur $s(t)$ de l'arc compris entre les positions initiale et courante du centre de la plate-forme. La fonction $F_v(t)$ est définie toujours par la formule (4.2.12), mais l'angle $\alpha = \alpha(t)$ n'est plus identiquement nul.

Déterminons la différence entre les quantités $\sigma(t)$ et $s(t)$. Remarquons d'abord que suivant les égalités (4.2.3), (4.2.2) et (4.2.7), la vitesse angulaire de précession du gyroscope s'exprime par

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{k}{H} F_{\nu}(t). \tag{4.2.28}$$

On en déduit, compte tenu de la formule (4.2.27), que

$$\chi(t) = \chi(0) + \frac{k}{H}\sigma(t). \tag{4.2.29}$$

Ici,

$$\chi(0) = \alpha(0) = \alpha_0 \tag{4.2.30}$$

est l'angle, non nul dans le cas général, que le vecteur moment cinétique propre H du gyroscope fait à l'instant initial avec l'axe ζ^s du système de coordonnées non tournant $\xi^s\eta^s\zeta^s$. Il est évident qu'à ce même instant $t = 0$, la quantité $\alpha(0)$ exprime également la valeur de l'angle fait par l'axe ξ avec l'axe sensible ν de l'accéléromètre. Comme il a été indiqué précédemment, l'axe sensible de l'accéléromètre coïncide avec l'axe x du système de coordonnées xyz lié à la plate-forme (fig. 106). L'angle $\alpha(0)$ est appelé *erreur de décalage initial* de la plate-forme.

Supposons que l'égalité (4.2.20) est vérifiée exactement. On déduit alors de la relation (4.2.29) et de l'égalité (4.2.30) que

$$\sigma(t) = R[\chi(t) - \alpha(0)]. \tag{4.2.31}$$

En tenant compte des égalités (4.2.6) et (4.2.5), on obtient

$$\Delta s = \sigma(t) - s(t) = R[\alpha(t) - \alpha(0)]. \tag{4.2.32}$$

Ici, Δs est l'erreur cherchée dans la détermination de la position vraie du centre de la plate-forme sur le grand cercle.

Ainsi, l'erreur Δs du système considéré de navigation par inertie est déterminée en cas d'un fonctionnement parfait de tous ses organes: gyroscope, systèmes d'asservissement, calculateurs, par la différence des angles $\alpha(t)$ et $\alpha(0)$. Dans ces conditions, l'angle $\alpha(t)$ exprime l'erreur courante dans la stabilisation de la plate-forme par rapport à la direction de l'axe ξ, c'est-à-dire son écart par rapport à la tangente au grand cercle de la sphère S, menée par la position courante du centre de la plate-forme. Quant à l'angle $\alpha(0)$, il résulte, comme il a déjà été dit, d'une orientation initiale imprécise de la plate-forme à l'instant $t = 0$.

Proposons-nous maintenant d'étudier la stabilité d'un mouvement non perturbé de la plate-forme, pour lequel $\alpha(t) = 0$. A cet effet, il est nécessaire d'établir la variation de l'angle $\alpha(t)$ dans le temps, lorsque la condition (4.2.23) de $\alpha(0) = 0$, ainsi que la condition (4.2.25) de choix de la constante b_{ν} ne sont pas réalisées exacte-

ment. D'après la formule (4.2.5), on a

$$\frac{d\psi}{dt}=\frac{1}{R}\,\frac{ds}{dt}. \qquad (4.2.33)$$

L'équation intégro-différentielle (4.2.13) peut donc se mettre sous la forme

$$\frac{d\alpha}{dt}=\frac{k}{H}\int_0^t\left[\frac{dv}{dt}\cos\alpha+\left(\frac{v^2}{R}-j\right)\sin\alpha\right]dt+\frac{kb_v}{H}-\frac{v(t)}{R}. \qquad (4.2.34)$$

En y posant $t=0$ et en conservant l'égalité (4.2.20), on obtient

$$\left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_{t=0}=\dot{\alpha}_0=\frac{1}{R}\,[b_v-v(0)]. \qquad (4.2.35)$$

Ainsi, la non-observation de la condition (4.2.25) provoque l'apparition d'une dérivée non nulle de l'angle $\alpha=\alpha(t)$ à l'instant initial $t=0$.

Dérivons la relation (4.2.34) par rapport au temps et de nouveau tenons compte de l'égalité (4.2.20). Il en résulte l'équation différentielle suivante par rapport à la fonction $\alpha(t)$:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}=-\frac{1}{R}\left(j-\frac{v^2}{R}\right)\sin\alpha-\frac{1}{R}(1-\cos\alpha)\frac{dv}{dt}, \qquad (4.2.36)$$

dans laquelle la vitesse $v(t)$ de mouvement du centre de la plate-forme sur le grand cercle est à considérer comme fonction connue du temps. Les conditions initiales de cette équation sont données par les relations (4.2.30) et (4.2.35), soit

$$\alpha(0)=\alpha_0,\qquad \left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_{t=0}=\dot{\alpha}_0. \qquad (4.2.37)$$

La fonction constante $\alpha(t)=0$ est une solution triviale de l'équation différentielle (4.2.36). Cette solution est, en particulier, stable si

$$v=v_0=\text{const}, \qquad (4.2.38)$$

c'est-à-dire si le centre de la plate-forme se déplace sur un arc de grand cercle avec une vitesse v_0, constante en module, par rapport à la sphère S ou, ce qui revient au même, par rapport au système de coordonnées non tournant $\xi^s\eta^s\zeta^s$. Un de tels mouvements est représenté par le déplacement du mobile sur l'équateur, à vitesse constante par rapport à la Terre.

La recherche des conditions nécessaires de stabilité de la solution $\alpha=0$ de l'équation différentielle non linéaire (4.2.36) se heurte dans le cas général à des difficultés considérables. Nous nous contenterons donc d'examiner la stabilité de la solution de cette équation, d'une façon approchée. Gardons dans cette équation les seuls termes de premier ordre en angle α. Il vient une nouvelle équa-

tion différentielle

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + n_s^2\alpha = 0 \qquad (4.2.39)$$

dans laquelle

$$n_s^2 = \frac{1}{R}\left(j - \frac{v^2}{R}\right) = \frac{j}{R}\left(1 - \frac{v^2}{v_I^2}\right). \qquad (4.2.40)$$

La quantité

$$v_I = \sqrt{jR} \qquad (4.2.41)$$

figurant dans la formule (4.2.40) traduit la valeur de la première vitesse cosmique pour des corps qui quittent la Terre. Si

$$v \ll v_I \qquad (4.2.42)$$

et est, par exemple, de l'ordre de la vitesse dont sont animés les points situés sur l'équateur de la Terre lors de sa rotation sur elle-même, on peut poser de façon approchée que

$$n_s^2 \simeq \frac{j}{R} \simeq \frac{g}{R} = \text{const.} \qquad (4.2.43)$$

Ici, j est l'accélération de la gravitation et g l'accélération de la pesanteur (v. plus haut chap. I, § 1).

La solution de l'équation différentielle (4.2.39) vérifiant les conditions initiales (4.2.37), dans l'hypothèse où la valeur de n_s est constante, s'exprime par la formule suivante :

$$\alpha = \alpha_0 \cos n_s t + \frac{\dot{\alpha}_0}{n_s} \sin n_s t. \qquad (4.2.44)$$

Ainsi, l'erreur $\alpha = \alpha(t)$ de stabilisation de la plate-forme, provoquée par la non-observation des conditions (4.2.23) et (4.2.25), suit en première approximation une loi harmonique. La quantité

$$n_s \simeq \sqrt{\frac{g}{R}}, \qquad (4.2.45)$$

porte le nom, comme il a déjà été dit au chap. II, § 4 du présent tome, de *pulsation de Schüler*, et la période de la fonction $\alpha(t)$ (c'est-à-dire de l'angle d'écart de la plate-forme par rapport à la tangente au grand cercle)

$$T_s = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \qquad (4.2.46)$$

s'appelle *période de Schüler*.

Ainsi, dans l'hypothèse où la quantité n_s est constante, le mouvement non perturbé de la plate-forme, c'est-à-dire un mouvement dans lequel l'angle $\alpha = \alpha(t)$ est identiquement nul, est stable [1]).

Voyons, avant de clore ce paragraphe, comment apparaît une erreur dans la détermination de la position d'un mobile en mouvement sur un arc de grand cercle si le fonctionnement du gyroscope et de l'accéléromètre utilisés dans le système de navigation par inertie que nous venons de décrire n'est pas parfait. A savoir, supposons que la vitesse angulaire ω de rotation de la plate-forme stabilisée est définie maintenant non par la formule (4.2.3) dans laquelle la valeur de M est donnée par l'expression (4.2.2), mais se présente sous la forme suivante:

$$\omega = \frac{M}{H} + \mu(t). \tag{4.2.47}$$

Ici, $\mu(t)$ est la vitesse angulaire supplémentaire de dérive du gyroscope, qui prend naissance par suite de l'action de tous les facteurs perturbateurs possibles (frottement dans les axes de la suspension, tension des conducteurs électriques, moments des forces de gravitation et des forces d'inertie d'Euler dues à un déséquilibre, influence de l'inertie des anneaux de cardan, etc.).

Supposons également que l'indication a_v de l'accéléromètre diffère de la valeur vraie de l'accélération apparente par une quantité $u(t)$. Ainsi, au lieu de la formule (4.2.11), il convient maintenant de poser que

$$a_v = \frac{dv}{dt}\cos\alpha + \left(\frac{v^2}{R} - j\right)\sin\alpha + u(t). \tag{4.2.48}$$

En introduisant cette expression dans la formule (4.2.1), on obtient pour la fonction $F_v(t)$ la représentation suivante:

$$F_v(t) = \int_0^t \left[\frac{dv}{dt}\cos\alpha + \left(\frac{v^2}{R} - j\right)\sin\alpha + u(t)\right] dt + b_v. \tag{4.2.49}$$

Ainsi, en tenant compte aussi de la formule (4.2.2), on est conduit, suivant l'égalité (4.2.47), à l'expression suivante pour la vitesse angulaire de la plate-forme stabilisée:

$$\omega = \frac{k}{H}\int_0^t \left[\frac{dv}{dt}\cos\alpha + \left(\frac{v^2}{R} - j\right)\sin\alpha + u(t)\right] dt + \frac{kb_v}{H} + \mu(t). \tag{4.2.50}$$

---

[1]) Si la vitesse de mouvement du mobile sur un arc de grand cercle varie périodiquement, la quantité n_s est, elle aussi, en vertu de la formule (4.2.40), une fonction périodique. L'équation différentielle (4.2.39) se transforme donc en équation de Hill. Dans un tel cas, il devient en principe possible l'apparition d'une résonance paramétrique et donc d'un mouvement instable de la plateforme.

Or, comme le montre la formule (4.2.7), la vitesse angulaire ω vaut la somme de la vitesse angulaire $d\psi/dt$ du trièdre $\xi\eta\zeta$ (dont l'axe ξ est tangent au grand cercle; v. fig. 106) et de la vitesse angulaire (relative) $d\alpha/dt$ du système de coordonnées xyz lié à la plate-forme, par rapport au trièdre $\xi\eta\zeta$. Ce qui nous conduit, compte tenu de l'égalité (4.2.5), à l'équation intégro-différentielle

$$\frac{d\alpha}{dt}=-\frac{k}{H}\int_0^t\left[\frac{dv}{dt}\cos\alpha+\left(\frac{v^2}{R}-j\right)\sin\alpha+u(t)\right]dt+\frac{kb_v}{H}+$$

$$+\mu(t)-\frac{1}{R}\frac{ds}{dt}\quad(4.2.51)$$

par rapport à l'angle α, où α est l'erreur de stabilisation de la plate-forme dans le plan de l'horizon local (c'est-à-dire dans le plan tangent à la sphère terrestre, au point où se trouve le mobile).

Désignons comme précédemment par $\sigma(t)$ la grandeur qui est obtenue suivant la formule (4.2.27), à la sortie du calculateur utilisé dans le système de navigation par inertie que nous considérons. Comme il a déjà été montré, la valeur de cette grandeur est égale à la valeur de la distance vraie $s(t)$ parcourue par le mobile à partir de sa position de départ, si le fonctionnement de tous les organes du système de navigation par inertie est parfait et les conditions initiales sont convenablement choisies. En particulier, dans le calculateur qui assure l'intégration de la fonction $F_v(t)$, on doit introduire la constante b_v vérifiant la condition (4.2.25). Ainsi, dans le cas général, au lieu de la valeur vraie de la distance $s(t)$ le système de navigation par inertie fournit une certaine distance « calculée » $\sigma(t)$. Suivant les formules (4.2.27) et (4.2.49), la distance calculée $\sigma(t)$ est donnée par l'expression

$$\sigma=\int_0^t\left\{\int_0^t\left[\frac{dv}{dt}\cos\alpha+\left(\frac{v^2}{R}-j\right)\sin\alpha+u(t)\right]dt\right\}dt+b_vt.\quad(4.2.52)$$

Intégrons maintenant les deux membres de l'égalité (4.2.51) entre 0 et la valeur courante du temps t, en posant $s(0)=0$. Il vient l'égalité

$$\alpha(t)=-\frac{k}{H}\int_0^t\left\{\int_0^t\left[\frac{dv}{dt}\cos\alpha+\left(\frac{v^2}{R}-j\right)\sin\alpha+u(t)\right]dt\right\}dt+$$

$$+\frac{kb_v}{H}t+\int_0^t\mu(t)\,dt+\alpha(0)-\frac{s(t)}{R}\quad(4.2.53)$$

qui permet de faire disparaître l'intégrale double dans la formule (4.2.52). Si l'on tient compte de la condition (4.2.20), on obtient

finalement la relation

$$\Delta s = \sigma(t) - s(t) = R[\alpha(t) - \alpha(0)] - R\int_0^t \mu(t)\,dt. \quad (4.2.54)$$

Cette relation, de même que la formule (4.2.32), découle également des considérations géométriques. A cet effet, il suffit dans la formule (4.2.6) qui est facile à établir en examinant la fig. 105, de tenir compte de l'expression (4.2.5) donnant l'angle ψ, et des formules (4.2.29) et (4.2.30) relatives à l'angle χ. Pour $\mu = 0$, c'est-à-dire en l'absence de dérive supplémentaire du gyroscope, les deux formules (4.2.32) et (4.2.54) se confondent, comme il fallait s'y attendre.

On peut s'attendre à ce que dans la plupart des cas, la solution de l'équation intégro-différentielle (4.2.51) est de caractère oscillatoire et ne croît pas avec le temps. Cette supposition est basée sur la circonstance suivante. Si l'on linéarise l'équation intégro-différentielle (4.2.51) et pose les fonctions μ (t) et u (t) égales respectivement aux quantités constantes μ et u, sa solution devient une fonction harmonique du temps, lorsque la vitesse v est constante. En effet, gardons dans l'équation (4.2.51) les seuls termes de premier ordre en variable cherchée α et remplaçons les fonctions μ (t) et u (t) par les constantes μ et u. Il vient

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{k}{H}\int_0^t \left[\frac{dv(t)}{dt} + \left(\frac{v^2}{R} - j\right)\alpha + u\right] dt + \frac{kb_v}{H} + \mu - \frac{v(t)}{R}. \quad (4.2.55)$$

En supposant que les conditions (4.2.20) et (4.2.25) sont toujours réalisées, on obtient, toutes simplifications effectuées, l'équation intégro-différentielle

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\int_0^t n_s^2\alpha(t)\,dt + \frac{ut}{R} + \mu. \quad (4.2.56)$$

Comme précédemment, la quantité n_s sera supposée constante. Il est aisé de vérifier que la solution de l'équation (4.2.56) est alors de la forme

$$\alpha = \alpha_0 \cos n_s t + \frac{u}{g}(1 - \cos n_s t) + \frac{\mu}{n_s}\sin n_s t, \quad (4.2.57)$$

où α_0 est la valeur de l'angle α à l'instant initial $t = 0$.

Compte tenu de la formule (4.2.54), on a maintenant la formule

$$\Delta s = \sigma(t) - s(t) = -R\mu t + R\left(\frac{u}{g} - \alpha_0\right)(1 - \cos n_s t) + R\frac{\mu}{n_s}\sin n_s t. \quad (4.2.58)$$

Ainsi, dans le cas considéré, si l'on néglige dans l'expression de Δs les termes à variation harmonique, l'imperfection du gyroscope fait apparaître une erreur $-R\mu t$, linéairement croissant avec le temps, dans les indications de la position du mobile à l'aide du système de navigation par inertie considéré. En même temps, l'imperfection de l'accéléromètre ne fait naître qu'une erreur constante (« statique ») Ru/g dont l'apparition peut s'expliquer comme suit. Pour déterminer la position d'un mobile sur un méridien terrestre donné, il suffit de mesurer l'altitude de l'Etoile polaire par rapport au plan horizontal. Supposons que le mobile est au point fixe. Dans ce cas, la position du plan horizontal peut être recherchée à l'aide de l'accéléromètre du système de navigation par inertie, en l'utilisant en qualité d'appareil de niveau. A cet effet, il suffit d'orienter son axe sensible de telle sorte que l'indication a_v soit nulle. Or, par suite de l'imperfection de l'accéléromètre, son axe sensible peut dans ce cas s'écarter de la direction horizontale d'une quantité égale précisément à u/g. Un comportement analogue caractérise aussi un pendule composé lorsqu'il indique un plan horizontal et dont l'axe tourne avec un frottement à sec.

Ainsi donc, l'erreur dans la détermination de la position d'un mobile à l'aide d'un système à inertie, provoquée par l'imperfection de l'accéléromètre, et l'erreur dans la détermination de la position à l'aide des étoiles, due à une détermination imprécise du plan horizontal, sont de même nature.

§ 3. Pendule de Boykow à volant intégrateur

Au cours du paragraphe précédent, nous avons décrit un dispositif servant à déterminer la longueur d'arc $s = s(t)$ qui détermine la position actuelle d'un mobile sur le grand cercle d'une sphère non tournante S. La fonction $s(t)$ se calculait en dernier ressort par deux intégrations successives, effectuées dans des calculateurs. Or, il se trouve qu'on peut réaliser un autre dispositif dans lequel la longueur cherchée de l'arc $s(t)$ est obtenue comme une quantité proportionnelle à l'angle de rotation d'un certain volant qui tourne d'une façon convenablement réglée [1]). Ce dispositif se compose d'un gyroscope de haute précision, d'une plate-forme stabilisée et d'un pendule composé à volant sus-mentionné, suspendu à la plate-forme (fig. 107). L'axe de l'anneau de cardan extérieur du gyroscope est parallèle au plan de la plate-forme. Le moment K appliqué à l'axe du boîtier du gyroscope amène continuellement le vecteur H du moment cinétique propre du gyroscope dans le plan du grand cercle

[1]) *Boykow J. M.* Einrichtung zum Messen von Wegstrecken. Deutsch Patentschrift No. 661822, $Kl_0$42-17. Siemens Apparaten und Maschienen, Berlin, 11 Januar 1935.

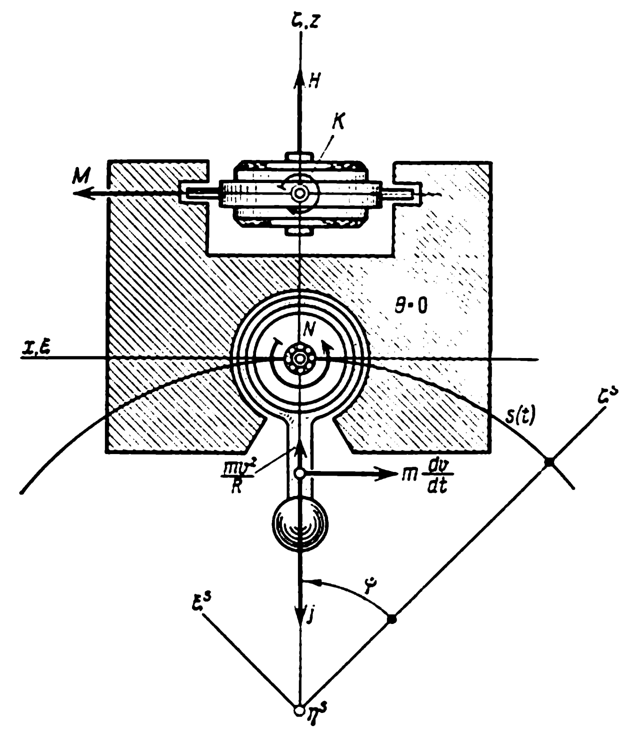


Fig. 107

sur l'arc duquel se déplace le mobile. Grâce à l'action d'un système d'asservissement, la plate-forme est assujettie à rester en permanence dans une position perpendiculaire à l'axe de rotation propre du rotor de gyroscope, c'est-à-dire au vecteur H. L'axe du pendule composé et celui du volant sont parallèles à la plate-forme et perpendiculaires au plan du grand cercle de la sphère S.

Introduisons, comme nous l'avons fait au § 2 du présent chapitre, un système de coordonnées mobile $\xi\eta\zeta$ ayant son origine au centre de la plate-forme, c'est-à-dire au centre de sa suspension (v. fig. 107 et 108). Dirigeons l'axe ζ de ce système, dans le plan du grand cercle, de telle sorte qu'il passe par le centre commun de la Terre et de la sphère S et orientons son axe ξ suivant la tangente au grand cercle, dans le sens de croissance de l'angle ψ que font entre eux les axes ζ et ζ^s. Ce dernier se trouve, lui aussi, dans le plan du grand cercle et constitue un des axes du système de coordonnées non tournant $\xi^s\eta^s\zeta^s$ ayant son origine au centre de la sphère S.

Les axes η et η^s des deux systèmes sont parallèles et dirigés perpendiculairement au plan du grand cercle.

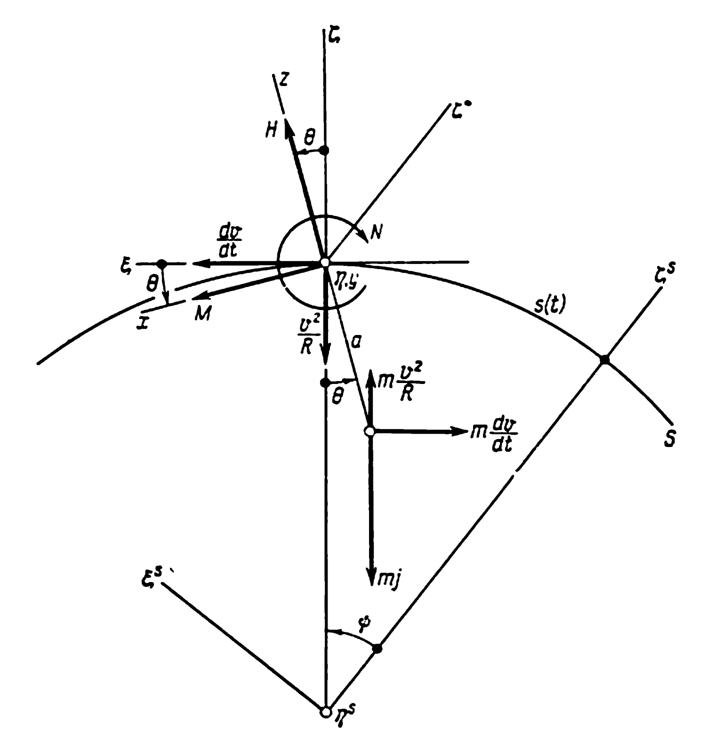


Fig. 108

Pareillement à ce que nous avons fait précédemment, attachons à la plate-forme stabilisée un système de coordonnées xyz en plaçant son origine au centre de la plate-forme (fig. 108). Dirigeons l'axe z de ce système parallèlement au vecteur moment cinétique propre H du gyroscope et l'axe y perpendiculairement au plan du grand cercle. Désignons par θ l'angle des axes z et ζ et convenons que le sens positif de l'angle θ est le même que celui de l'angle ψ.

Le volant constitue le rotor du moteur électrique dont le stator est incorporé au pendule composé. Désignons par N la somme des moments, par rapport à l'axe de rotation du rotor, de toutes les forces qui lui sont appliquées, c'est-à-dire des forces développées par le stator et des forces de frottement (v. fig. 107). Posons que $N > 0$ si ce moment est dirigé en sens inverse des aiguilles d'une montre. En vertu du principe de Newton sur l'égalité de l'action et de la réaction, les forces exercées par le rotor sur le pendule sont les mêmes en intensité mais de sens opposé. On peut donc considérer que le moment des forces appliquées au pendule composé est de sens contraire et est donc égal à $-N$. La valeur de ce moment dépend de

l'intensité du courant dans le stator. Ce courant est réglé à l'aide d'un circuit électrique spécial de telle sorte que le moment $-N$ amène le pendule dans une position où sa ligne (la droite passant par le centre de masse du pendule perpendiculairement à l'axe de sa suspension) se trouve en permanence dans le plan yz rigidement lié à la plate-forme.

Le mouvement du pendule composé sera considéré par rapport au système de coordonnées mobile mais non tournant, c'est-à-dire animé d'un mouvement de translation, $\xi^*\eta^*\zeta^*$ ayant son origine au centre de la suspension de la plate-forme (v. fig. 108). Pour simplifier les calculs, supposons que l'axe du pendule et celui de son volant coïncident avec les axes y, η, ainsi qu'avec η^*. Les forces d'inertie d'Euler (v. plus haut chap. I, § 1) dues au mouvement du système de coordonnées $\xi^*\eta^*\zeta^*$ par rapport au système $\xi^s\eta^s\zeta^s$ que nous convenons de prendre pour système fixe absolu ou système galiléen, se réduisent à une seule force P passant par le centre de gravité du pendule composé. Elle est égale au produit de la masse de ce dernier par l'accélération absolue de l'origine du système de coordonnées $\xi^*\eta^*\zeta^*$. Cette accélération et la force P sont dirigées suivant une même droite mais dans des sens opposés. La force P admet deux composantes: une force d'inertie normale ou centrifuge P_n et une force d'inertie tangentielle P_τ. La première s'exprime par la formule

$$P_n = m\frac{v^2}{R}, \tag{4.3.1}$$

elle est parallèle à l'axe ζ (v. fig. 108). La formule donnant la seconde composante s'écrit sous la forme suivante:

$$P_\tau = m\frac{dv}{dt}. \tag{4.3.2}$$

Ici et dans la formule précédente, m est la masse du pendule. La force d'inertie P_τ est parallèle à l'axe ξ et, lorsque $dv/dt > 0$, elle est orientée dans le sens négatif de cet axe. Le pendule est encore soumis aux forces de gravitation. Les dimensions du pendule étant très petites devant celles de la Terre, ces forces peuvent être remplacées, avec une haute précision, par une force unique

$$F = mj, \tag{4.3.3}$$

où j est la valeur de l'accélération de la gravitation au point où se trouve le centre de la plate-forme.

Pour la même raison, la force F est pratiquement parallèle et de sens contraire à l'axe ζ et passe par le centre de gravité du pendule (fig. 108).

Enfin, désignons par I le moment d'inertie du pendule composé par rapport à l'axe de sa suspension, et par a la distance de cet axe

au centre de masse du pendule. Il n'est pas difficile d'établir l'équation suivante du mouvement du pendule par rapport au système de coordonnées mobile non tournant $\xi^*\eta^*\zeta^*$ ayant son origine au point de suspension du pendule, qui se confond avec le centre de la plate-forme stabilisée, soit

$$I \frac{d^2}{dt^2}(\psi+\theta) = m\frac{dv}{dt} a\cos\theta - m\left(j - \frac{v^2}{R}\right) a\sin\theta - N. \quad (4.3.4)$$

En établissant cette équation, on a tenu compte du fait que grâce à l'action du moment réglable N, le centre de gravité du pendule se situe constamment dans le plan yz ou, en particulier, sur l'axe z du système de coordonnées xyz lié à la plate-forme.

Considérons l'angle de rotation du volant par rapport au boîtier du pendule composé, en le désignant par φ (fig. 109). Si le système de réglage de la vitesse angulaire du moteur électrique fonctionne normalement, l'angle φ caractérise à la fois la rotation du volant par rapport au système de coordonnées xyz. L'équation de la rotation du volant par rapport au système de coordonnées $\xi^*\eta^*\zeta^*$ se présente dans ce cas sous la forme suivante:

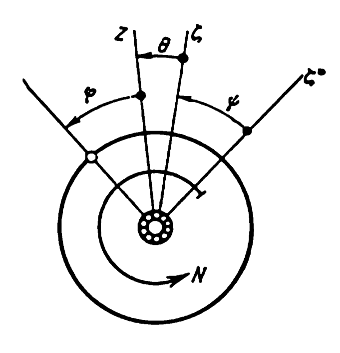


Fig. 109

$$\Theta \frac{d^2}{dt^2}(\psi+\theta+\varphi) = N, \quad (4.3.5)$$

où Θ est le moment d'inertie du volant par rapport à son axe de rotation, et les autres désignations sont celles rencontrées plus haut.

Supposons qu'à l'aide des organes électromécaniques de l'appareil considéré est produit un moment

$$M = h\frac{d\varphi}{dt} \quad (4.3.6)$$

appliqué à l'axe de l'anneau extérieur du gyroscope (v. fig. 107). Ici, h est un facteur de proportionnalité dont la valeur sera déterminée plus loin.

La vitesse angulaire de précession du gyroscope qui prend naissance sous l'action du moment M s'exprime dans ce cas par la formule (4.2.3) obtenue au paragraphe précédent. On a donc (v. fig. 108)

$$H\frac{d}{dt}(\psi+\theta) = h\frac{d\varphi}{dt}. \quad (4.3.7)$$

Additionnons maintenant membre à membre les équations (4.3.4) et (4.3.5). On obtient, après quelques transformations simples, la

relation

$$(I+\Theta)\frac{d^2}{dt^2}(\psi+\theta)+ma\left(j-\frac{v^2}{R}\right)\sin\theta-ma\frac{dv}{dt}\cos\theta=-\Theta\frac{d^2\varphi}{dt^2}, \tag{4.3.8}$$

qui, jointe à l'égalité (4.3.7), peut être considérée comme un système de deux équations différentielles permettant de déterminer les angles $\theta=\theta(t)$ et $\varphi=\varphi(t)$, lorsque la fonction du temps $\psi=\psi(t)$ est donnée. Cette dernière définit la loi du mouvement du mobile, ou plus exactement du mouvement du centre de sa plate-forme stabilisée, sur un arc de grand cercle donné. Dans ce cas, comme au paragraphe précédent, on a

$$v=R\frac{d\psi}{dt}. \tag{4.3.9}$$

Le système des équations différentielles (4.3.7) et (4.3.8) que nous venons de mentionner possède une solution particulière importante suivante:

$$\theta=0,\quad \varphi=\frac{maR-I-\Theta}{\Theta}\psi \tag{4.3.10}$$

si le facteur h est choisi suivant la formule

$$h=\frac{\Theta H}{maR-I-\Theta}. \tag{4.3.11}$$

En effet, si l'on élimine la variable φ entre les équations (4.3.7) et (4.3.8), on obtient l'égalité

$$\left(I+\Theta+\frac{\Theta H}{h}\right)\frac{d^2\theta}{dt^2}+ma\left(j-\frac{v^2}{R}\right)\sin\theta=$$
$$=ma\cos\theta R\frac{d^2\psi}{dt^2}-\left(I+\Theta+\frac{\Theta H}{h}\right)\frac{d^2\psi}{dt^2}, \tag{4.3.12}$$

qui est une équation différentielle de deuxième ordre par rapport à une seule fonction cherchée $\theta(t)$. L'équation (4.3.12) admet pour solution $\theta=0$, à condition que

$$I+\Theta+\frac{\Theta H}{h}=maR, \tag{4.3.13}$$

d'où résulte la formule (4.3.11) pour la détermination du facteur h. Il est évident que les conditions initiales de l'équation différentielle (4.3.12) doivent être dans ce cas les suivantes:

$$\theta(0)=\theta_0=0,\qquad \left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{t=0}=\dot\theta_0=0. \tag{4.3.14}$$

Si l'on porte la dernière de ces conditions dans l'équation (4.3.7) et qu'on tient compte de la condition (4.3.11) et de l'égalité (4.3.9), on obtient pour la valeur initiale de la vitesse angulaire du volant par rapport au boîtier du pendule l'expression suivante:

$$\left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{t=0} = \dot{\varphi}_0 = -\frac{H}{h}\left.\frac{d\psi}{dt}\right|_{t=0} = \frac{maR-I-\Theta}{\Theta R}\,v(0). \qquad (4.3.15)$$

La réalisation de la valeur initiale trouvée pour la vitesse angulaire du volant assure celle de la seconde des conditions initiales (4.3.14).

Ainsi, la mise en position initiale de l'appareil se ramène à faire coïncider, à l'instant $t = 0$, l'axe z, lié à la plate-forme, avec l'axe ζ passant par le centre de la Terre et par le centre de la plate-forme. A l'instant $t = 0$, l'axe ζ est confondu avec l'axe ζ^s, parce que l'angle ψ qu'ils font à cet instant est nul. De plus, la vitesse angulaire initiale $\dot{\varphi}_0$ de rotation du volant doit être mise en accord, suivant la formule (4.3.15), avec la vitesse initiale v (0) de mouvement du centre de la plate-forme sur un arc de grand cercle. Une réalisation exacte des conditions initiales (4.3.14), ainsi que de la condition (4.3.15) rend possible la solution particulière (4.3.10). Il faut seulement, vu que ψ (0) = 0, poser

$$\varphi(0) = \varphi_0 = 0, \qquad (4.3.16)$$

c'est-à-dire compter l'angle de rotation du volant par rapport au boîtier du pendule, à partir de l'instant initial.

Compte tenu des égalités (4.3.10), on obtient, à partir de la relation (4.2.5), la formule

$$s(t) = \frac{\Theta R}{maR-I-\Theta}\,\varphi(t) \qquad (4.3.17)$$

qui traduit justement la solution du problème de la navigation par inertie sur un arc de grand cercle de la sphère S au moyen de l'appareil décrit au cours du présent paragraphe.

Gardons dans l'équation différentielle (4.3.12) les seuls termes de premier ordre par rapport à la fonction cherchée $\theta = \theta(t)$, et en outre, de même qu'au paragraphe précédent, supposons valable l'égalité approchée suivante:

$$j - \frac{v^2}{R} \simeq g = \text{const.} \qquad (4.3.18)$$

Etant donné que la condition (4.3.11) est satisfaite, on obtient alors l'équation suivante des petites oscillations:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + n^2\theta = 0, \qquad (4.3.19)$$

qui coïncide, à la désignation de la fonction cherchée près, avec l'équation différentielle (4.2.39) du paragraphe précédent.

On est conduit finalement à la conclusion que, si les conditions initiales (4.3.14) ne sont pas réalisées, l'angle θ varie suivant une loi harmonique avec une période de Schüler T_s dont la valeur est donnée par la formule (4.2.46).

BIBLIOGRAPHIE

Андреев В. Д. Теория инерциальной навигации (*V. Andréev.* Théorie de la navigation par inertie). М., « Наука », 1966 (en russe).

Андреев В. Д., Девянин Е. А. Автономные инерциальные навигационные системы (*V. Andréev, E. Dévianine.* Systèmes autonomes de navigation par inertie). — Dans le livre: Развитие механики гироскопических и инерциальных систем (Développement des systèmes gyroscopiques et inertiels). М., « Наука », 1973 (en russe).

Булгаков Б. В. Теория одной гироскопической системы навигации (*B. Boulgakov.* Théorie d'un système gyroscopique de navigation) — Изв. АН СССР, МТТ, 1969, № 3 (en russe).

Горенштейн И. А., Шульман И. А., Сафарян А. С. Инерциальная навигация (*I. Gorenstein, I. Schülmann, A. Safarian.* Navigation par inertie). М., « Сов. радио », 1962 (en russe).

Горенштейн И. А., Шульман И. А. Инерциальные навигационные системы (*I. Gorenstein, I. Schülmann.* Systèmes de navigation par inertie). М., « Машиностроение », 1970 (en russe).

Ишлинский А. Ю. Механика специальных гироскопических систем (*A. Ishlinsky.* Mécanique des systèmes gyroscopiques spéciaux). Киев, Изд-во АН УССР, 1952 (en russe).

Ишлинский А. Ю. Об уравнениях задачи определения местоположения движущегося объекта посредством гироскопов и измерителей ускорений (*A. Ishlinsky.* Sur les équations du problème de la détermination de la position d'un mobile au moyen de gyroscopes et d'accéléromètres). — ПММ, 1957, т. 21, вып. 6 (en russe).

Ишлинский А. Ю. Механика гироскопических систем (*A. Ishlinsky.* Mécanique des systèmes gyroscopiques). М., Изд-во АН СССР, 1963 (en russe).

Ишлинский А. Ю. Инерциальное управление баллистическими ракетами (*A. Ishlinsky.* Guidage par inertie des fusées balistiques). М., « Наука », 1968 (en russe).

Литвин-Седой М. З. О гироскопическом измерителе линейного ускорения (*M. Litvine-Sedoï.* Sur le mesureur gyroscopique d'accélération linéaire). Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1961, № 2 (en russe).

Пельпор Д. С. Гироскопические приборы и автопилоты (*D. Pelpor.* Appareils gyroscopiques et autopilotes). М., « Машиностроение », 1964 (en russe).

Фридлендер Г. О. Инерциальные системы навигации (*G. Friedlender.* Systèmes de navigation par inertie). М., Физматгиз, 1961 (en russe).

Boykow J.M. Instrument for indicating navigational. USA. Cl. 73-178. Brevet No. 2109283, 1934.

CHAPITRE V

NAVIGATION PAR INERTIE EN CAS DE MOUVEMENT QUELCONQUE D'UN MOBILE SUR LA SPHÈRE TERRESTRE

§ 1. Equations différentielles initiales du problème principal de navigation par inertie

Le problème principal de navigation par inertie consiste à déterminer la position d'un mobile et son orientation par rapport aux points cardinaux en cas de son déplacement quelconque sur la sphère terrestre, en n'utilisant à cet effet que les indications des éléments sensibles dits à inertie, c'est-à-dire de divers gyroscopes et accéléromètres (mesureurs d'accélération apparente, v. plus haut chap. IV, § 1). Il existe plusieurs systèmes de navigation par inertie qui diffèrent l'un de l'autre par la composition et la disposition des éléments sensibles utilisés. La marche à suivre adoptée dans ces divers systèmes pour résoudre le problème, c'est-à-dire pour rechercher les coordonnées géographiques et le cap du mobile à l'aide de calculateurs électromécaniques ou électroniques à partir des indications courantes des éléments sensibles, varie, elle aussi, en règle générale, d'un système à l'autre. Néanmoins, dans le cas assez général, la détermination des coordonnées géographiques et du cap d'un mobile se ramène à la résolution d'un système déterminé de trois équations différentielles. C'est à l'établissement de ces équations qu'est consacré le paragraphe actuel, alors que l'étude de leurs applications aux divers schémas de navigation par inertie est réservée pour les §§ 3 et 4 du présent chapitre.

Comme il sera montré plus loin, les seconds membres des équations différentielles sus-mentionnées sont représentés par des fonctions traduisant les valeurs courantes de trois projections, sur les axes x, y et z, de la vitesse angulaire absolue (c'est-à-dire rapportée aux étoiles fixes; v. chap. I, § 1 du présent tome) d'un système de coordonnées quelconque xyz rigidement lié à une plate-forme stabilisée. Cette dernière est généralement montée à bord du mobile à l'aide de suspensions à la cardan à deux axes (fig. 110) ou à trois axes (fig. 111) et est stabilisée (en particulier, par des gyroscopes et des accéléromètres faisant partie du système de navigation par inertie considéré) de manière que l'axe z perpendiculaire à la plate-forme soit invariablement dirigé suivant le rayon de la Terre.

Introduisons un système de coordonnées $\xi\eta\zeta$ tournant avec la Terre (fig. 112). Plaçons son origine au centre de la Terre, dirigeons

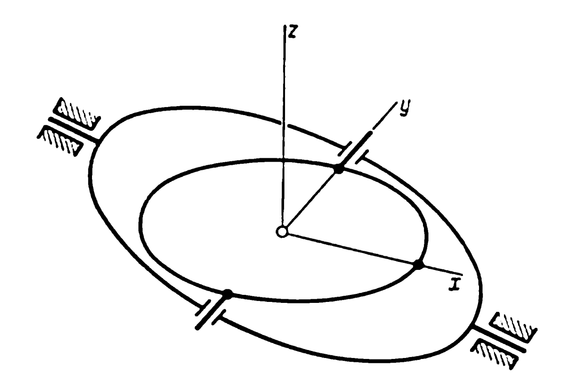


Fig. 110

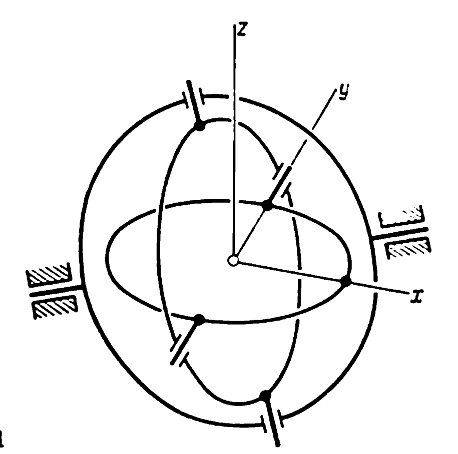


Fig. 111

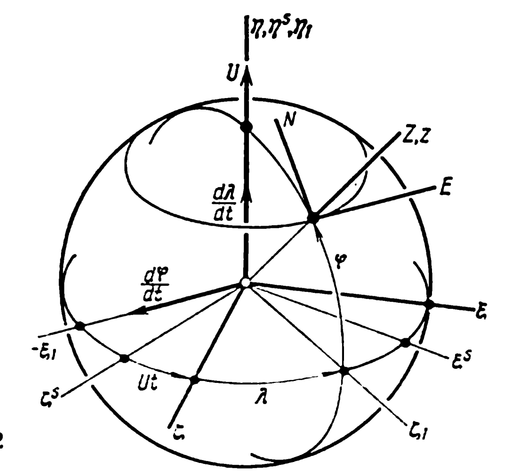


Fig. 112

son axe η vers le pôle Nord et plaçons son axe ζ dans le plan du méridien de Greenwich, et son axe ξ de telle sorte que le système de coordonnées $\xi\eta\zeta$ détermine un repère direct. Nous l'appellerons *système de Greenwich*. Il est évident que la disposition relative du système de coordonnées xyz lié à la plate-forme stabilisée et du système de Greenwich $\xi\eta\zeta$ détermine parfaitement la longitude λ et la latitude φ (v. fig. 112) tant de l'origine du système xyz que de celle du système de coordonnées géographique local ENZ (dont l'axe E est dirigé vers l'est, l'axe N vers le nord et l'axe Z vers le haut suivant le rayon de la Terre passant par l'origine commune des systèmes de coordonnées xyz et ENZ). En effet, l'angle φ que fait l'axe Z (ou, ce qui revient au même, l'axe z) avec le plan $\zeta\xi$ de l'équateur représente la latitude (géocentrique) du lieu, alors que l'angle formé entre la projection ζ_1 de l'axe z sur le même plan et l'axe ζ donne la longitude λ du point où se trouve le mobile. Par ailleurs, l'angle $\varkappa$ (fig. 113) inclus entre l'axe y et la direction N (direction du nord) ou, ce qui revient au même, l'angle formé par l'axe y avec le plan ηz (c'est-à-dire le plan du méridien du lieu) détermine la rotation dans le sens des aiguilles d'une montre (pour $\varkappa > 0$) du système de coordonnées xyz lié à la plate-forme stabilisée, par rapport aux points cardinaux. Ainsi, en connaissant la position de la plate-forme stabilisée par rapport au mobile lui-même, on peut déterminer le cap du mobile. Dans ce qui suit, l'angle $\varkappa$ que nous venons d'introduire sera appelé *azimut de la plate-forme*.

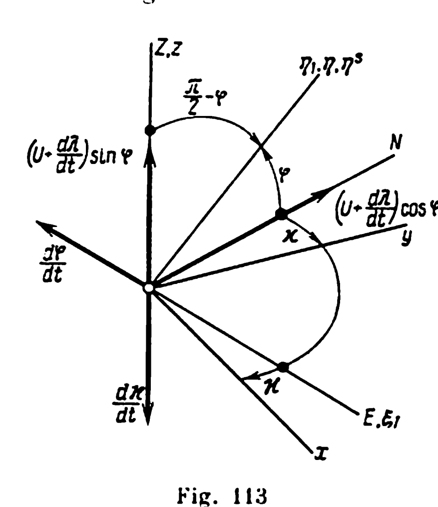


Fig. 113

Le vecteur vitesse angulaire U de la Terre (fig. 112) étant orienté suivant l'axe η, ses projections sur les axes E, N, Z ont pour expressions :

$$U_E = 0, \quad U_N = U\cos\varphi, \quad U_Z = U\sin\varphi. \qquad (5.1.1)$$

Lorsque la longitude λ du mobile est variable et sa latitude φ est constante, le système de coordonnées géographique ENZ tourne par rapport au système de Greenwich $\xi\eta\zeta$ autour de l'axe η avec une vitesse angulaire relative $d\lambda/dt$ (v. fig. 112). Ainsi, la direction du vecteur de cette vitesse angulaire est celle du vecteur vitesse angulaire U de la Terre. Si c'est la latitude φ qui varie à son tour, alors que la longitude λ est constante, le vecteur de la vitesse angulaire

relative correspondante (pour $d\varphi/dt > 0$) est dirigé parallèlement à l'axe E dans le sens de sa partie négative (c'est-à-dire vers l'ouest) et est égal, en module, à la dérivée $d\varphi/dt$. Maintenant, il n'est pas difficile de voir (v. fig. 113) que les projections de la vitesse angulaire absolue u (c'est-à-dire rapportée à un système de coordonnées non tournant quelconque) du système ENZ sur ses axes E, N et Z ont pour expressions

$$u_E = -\frac{d\varphi}{dt},$$
$$u_N = \left(U + \frac{d\lambda}{dt}\right)\cos\varphi, \quad (5.1.2.)$$
$$u_Z = \left(U + \frac{d\lambda}{dt}\right)\sin\varphi.$$

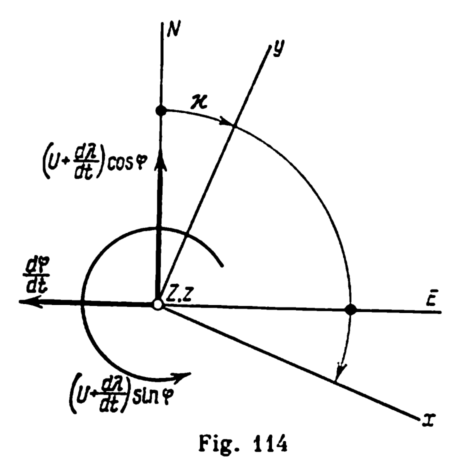


Fig. 114

Le système de coordonnées xyz lié à la plate-forme stabilisée tourne par rapport au système géographique ENZ autour des axes confondus z et Z avec la vitesse angulaire $d\varkappa/dt$ dont le vecteur est dirigé (pour $d\varkappa/dt > 0$) dans le sens des cotes décroissantes de la partie négative de l'axe z (fig. 114). Aussi, en se reportant à la fig. 114 et aux formules (5.1.2), peut-on obtenir pour les projections $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$ et $\omega_z(t)$ de la vitesse angulaire absolue de la plate-forme stabilisée, sur les axes x, y et z, les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} -\left(U + \frac{d\lambda}{dt}\right)\cos\varphi\sin\varkappa - \frac{d\varphi}{dt}\cos\varkappa &= \omega_x(t), \\ \left(U + \frac{d\lambda}{dt}\right)\cos\varphi\cos\varkappa - \frac{d\varphi}{dt}\sin\varkappa &= \omega_y(t), \\ \left(U + \frac{d\lambda}{dt}\right)\sin\varphi - \frac{d\varkappa}{dt} &= \omega_z(t). \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

Dans le cas où le mobile est porteur d'un système de navigation par inertie, les seconds membres des égalités (5.1.3) sont à considérer comme des fonctions du temps connues. Les valeurs de ces fonctions sont soit représentées directement par les indications courantes des éléments sensibles, soit élaborées, à partir de ces indications, par les calculateurs que comporte le système à inertie (v. plus loin §§ 3 et 4 du présent chapitre). Ainsi, les égalités (5.1.3) doivent être considérées comme un système de trois équations différentielles non linéaires par rapport à trois fonctions du temps inconnues $\lambda = \lambda(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $\varkappa = \varkappa(t)$, à condition que les fonctions $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$, $\omega_z(t)$ soient définies.

Soient connues la position et l'orientation de la plate-forme stabilisée à l'instant initial, c'est-à-dire soient données les quantités suivantes :

$$\lambda_0 = \lambda (t_0), \quad \varphi_0 = \varphi (t_0), \quad \varkappa_0 = \varkappa (t_0), \tag{5.1.4}$$

où t_0 est l'instant initial. Dans ce cas, en utilisant un calculateur (électromécanique, électronique ou autre), on peut élaborer directement à bord du mobile, par intégration continue du système d'équations différentielles (5.1.3), les valeurs courantes de la longitude λ,

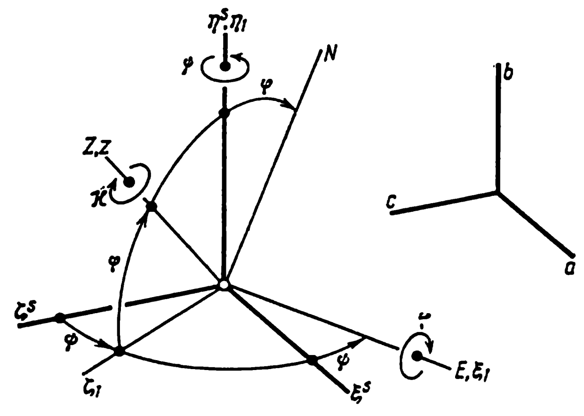


Fig. 115

de la latitude φ et de l'azimut $\varkappa$ qui caractérisent, à l'instant donné, la position de la plate-forme stabilisée et son orientation par rapport aux points cardinaux. Nous donnerons aux équations (5.1.3) le nom d'*équations différentielles initiales* (ou *de base*) *du problème principal de navigation par inertie.*

Introduisons maintenant un système de coordonnées non tournant $\xi^s\eta^s\zeta^s$ avec les axes duquel se confondent, à l'instant $t = 0$, les axes respectifs du système de Greenwich $\xi\eta\zeta$ (fig. 112). L'angle de rotation du système de Greenwich par rapport au système non tournant $\xi^s\eta^s\zeta^s$ est évidemment égal au produit Ut et l'angle

$$\psi = Ut + \lambda \tag{5.1.5}$$

caractérise la position du plan du méridien du lieu par rapport au plan de coordonnées $\eta^s\zeta^s$. Les quantités ψ, φ et $\varkappa$ (plus exactement, ψ, $-\varphi$ et $-\varkappa$) peuvent s'interpréter comme les angles d'Euler-Krylov qui déterminent l'orientation du système de coordonnées xyz par rapport au système $\xi^s\eta^s\zeta^s$. En effet, imaginons, comme nous l'avons fait au chap. III, § 5 du tome I, un trièdre abc dont les arêtes coïncident, dans la position de départ, respectivement avec les axes

ξ^s, η^s, ζ^s (fig. 115). Supposons que ce trièdre effectue des rotations finies successives : de l'angle ψ autour de l'arête b, ensuite de l'angle $-\varphi$ autour de l'arête a et enfin, de l'angle $-\varkappa$ autour de l'arête c (le signe moins devant les angles φ et $\varkappa$ signifie qu'à leurs valeurs positives correspondent des rotations s'effectuant dans le sens des aiguilles d'une montre pour un observateur placé du côté de la partie positive des arêtes a ou c). Par suite de ce déplacement angulaire de deuxième espèce, le trièdre abc passera de la position $\xi^s\eta^s\zeta^s$ dans la position xyz. Les angles ψ, $-\varphi$ et $-\varkappa$ sont dans ce cas les angles d'Euler-Krylov.

Faisons usage de la formule (5.1.5) pour mettre les équations (5.1.3) sous la forme suivante :

$$\begin{gathered}
-\frac{d\psi}{dt}\cos\varphi\sin\varkappa-\frac{d\varphi}{dt}\cos\varkappa=\omega_x(t),\\
\frac{d\psi}{dt}\cos\varphi\cos\varkappa-\frac{d\varphi}{dt}\sin\varkappa=\omega_y(t),\\
\frac{d\psi}{dt}\sin\varphi-\frac{d\varkappa}{dt}=\omega_z(t).
\end{gathered}\qquad(5.1.6)$$

Les fonctions inconnues sont représentées ici par les angles ψ, φ et $\varkappa$. Il s'avère que pour l'étude de plusieurs questions théoriques, le système d'équations différentielles (5.1.6) est plus commode que le système (5.1.3). De nombreuses études sont consacrées à la résolution des équations (5.1.6) correspondant à des mouvements concrets des mobiles sur la sphère terrestre (par exemple le long des parallèles). Dans certaines d'entre elles, on étudie les propriétés des équations obtenues à partir du système (5.1.6) par suite de diverses transformations, par exemple en remplaçant les angles cherchés φ, ψ et $\varkappa$ par les paramètres de Rodrigues-Hamilton qui caractérisent la position du système de coordonnées xyz par rapport au système non tournant $\xi^s\eta^s\zeta^s$ [1]). En suivant cette voie (elle sera décrite plus loin au sixième chapitre), on peut parvenir à certains résultats utiles pour la pratique. Par ailleurs, si l'on introduit les paramètres de Cayley-Klein, la recherche de la solution générale des équations (5.1.6) se ramène, comme l'a montré Darboux, à celle d'une solution particulière d'une équation de Riccati. Pourtant, la méthode de Darboux n'a pas été développée.

Les équations (5.1.6) peuvent être résolues par rapport aux dérivées des fonctions cherchées. On obtient alors le système suivant d'équations différentielles du problème principal de navigation par

---

[1]) Voir, par exemple, *Кошляков В. Н.* « Об уравнениях местоположения движущегося объекта » (*V. Kochliakov* « Sur les équations de la position d'un mobile »).— ПММ, 1964, т. 28, вып. 6 (en russe).

inertie :

$$\frac{d\psi}{dt}=\frac{-\omega_x(t)\sin\varkappa+\omega_y(t)\cos\varkappa}{\cos\varphi},$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=-\omega_x(t)\cos\varkappa-\omega_y(t)\sin\varkappa, \qquad (5.1.7)$$

$$\frac{d\varkappa}{dt}=-\omega_z(t)-[\omega_x(t)\sin\varkappa-\omega_y(t)\cos\varkappa]\operatorname{tg}\varphi.$$

Ce système présente ses avantages et sera utilisé, lui aussi, par la suite.

§ 2. Etude géométrique de la stabilité de la solution des équations différentielles du problème principal de navigation par inertie

Proposons-nous maintenant d'étudier la question relative à la stabilité de la solution du système d'équations différentielles du problème principal de navigation par inertie. Dans son énoncé classique, le problème de stabilité de la solution du système d'équations différentielles est étudié par rapport à de petites variations de leurs conditions initiales. Dans le cas des équations (5.1.3) de la navigation par inertie, la stabilité doit donc être étudiée par rapport à de petites variations de λ_0, φ_0 et $\varkappa_0$, et, si l'on passe du système (5.1.3) au système (5.1.6) ou (5.1.7), respectivement par rapport à de petites variations des valeurs initiales des fonctions cherchées $\psi(t)$, $\varphi(t)$ et $\varkappa(t)$, c'est-à-dire des quantités ψ_0, φ_0 et $\varkappa_0$.

Dans la position énoncée du problème, pour l'étude de la stabilité de la solution il convient d'analyser non seulement la solution exacte

$$\psi=\psi(t), \quad \varphi=\varphi(t), \quad \varkappa=\varkappa(t) \qquad (5.2.1)$$

du système d'équations différentielles (5.1.6), qui satisfait aux conditions initiales

$$\psi_0=\psi(t_0), \quad \varphi_0=\varphi(t_0), \quad \varkappa_0=\varkappa(t_0), \qquad (5.2.2)$$

mais également une autre solution exacte du même système, qui vérifie des conditions initiales légèrement modifiées. Soit

$$\psi^*=\psi^*(t), \quad \varphi^*=\varphi^*(t), \quad \varkappa^*=\varkappa^*(t) \qquad (5.2.3)$$

cette autre solution que nous appellerons solution perturbée. Désignons par

$$\psi_0^*=\psi^*(t_0), \quad \varphi_0^*=\varphi^*(t_0), \quad \varkappa_0^*=\varkappa^*(t_0) \qquad (5.2.4)$$

les conditions initiales relatives à la nouvelle solution.

Pour pouvoir juger de la stabilité, il convient dans ce cas de voir si les différences entre les fonctions $\psi^*(t)$, $\varphi^*(t)$, $\varkappa^*(t)$ et les fonc-

tions respectives $\psi(t)$, $\varphi(t)$, $\varkappa(t)$ sont, à tout instant t, aussi insignifiantes que les différences entre leurs valeurs à l'instant initial t_0. Les seconds membres des équations (5.1.6), c'est-à-dire les fonctions $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$, $\omega_z(t)$, restent dans ce cas, bien entendu, inchangées.

Il n'est pas difficile de former les équations différentielles pour les perturbations elles-mêmes, c'est-à-dire pour les différences

$$\Delta\psi = \psi^* - \psi, \quad \Delta\varphi = \varphi^* - \varphi, \quad \Delta\varkappa = \varkappa^* - \varkappa. \tag{5.2.5}$$

Il se trouve que pour ces équations il existe la fonction de Liapounov. C'est ce qui démontre la stabilité (au sens de Liapounov) de la solution générale du système (5.1.6) d'équations différentielles du problème principal de navigation par inertie. La marche à suivre pour la construction de la fonction de Liapounov est indiquée à la fin du présent paragraphe.

Dans la région des pôles de la Terre, à de petits déplacements du mobile peuvent correspondre des variations très grandes de la longitude λ (et donc de l'angle ψ), ainsi que celles de l'azimut $\varkappa$ (pour plus de détails sur cette question, v. plus loin chap. VI, § 5). C'est pourquoi la position classique du problème de stabilité de la solution du problème principal de navigation par inertie devient ici trop gênante. Il semble plus naturel de caractériser la proximité de deux positions et l'orientation réelle en azimut d'une plate-forme stabilisée dans le plan de l'horizon local EN non par le voisinage des valeurs correspondantes des angles λ (ou ψ), φ, $\varkappa$, mais par la petitesse de l'angle δ de rotation finie de cette plate-forme, lorsque le mobile qui la porte se déplace d'une position dans une autre. Dans ce cas, la question concernant la stabilité de la solution du problème de navigation par inertie se pose de la façon suivante.

Désignons par $x_0y_0z_0$ la position initiale du système de coordonnées xyz lié à la plate-forme stabilisée et par $x_0^*y_0^*z_0^*$ la position également initiale mais un peu modifiée du même système. Soit $D(t_0)$ une rotation finie d'angle $\delta(t_0)$, autour d'un axe d_0, qu'il faut faire pour passer de la position $x_0y_0z_0$ dans la position $x_0^*y_0^*z_0^*$. Considérons dans ce qui suit, deux mouvements de la plate-forme stabilisée: le mouvement principal à partir de la position initiale $x_0y_0z_0$ et le mouvement perturbé à partir de la position initiale $x_0^*y_0^*z_0^*$. Tout comme dans l'étude classique de la question de stabilité, les deux mouvements sont tels que les projections $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$, $\omega_z(t)$, sur les axes x, y et z, de la vitesse angulaire absolue de la plate-forme en mouvement principal sont, à tout instant, égales aux projections respectives, sur les axes x^*, y^*, z^*, de la vitesse angulaire du mouvement perturbé.

Désignons par $D(t_1)$ la rotation finie d'angle $\delta(t_1)$ autour de l'axe d_1, qui permet au système de coordonnées xyz de passer de la position $x_1y_1z_1$, qu'il occupe à un instant fixé quelconque $t = t_1$, lors du mouvement principal de la plate-forme, dans la position $x_1^*y_1^*z_1^*$

correspondant à la position de la plate-forme au même instant, lors du mouvement perturbé. Dans ce nouvel énoncé, la question de stabilité de la solution du problème de navigation par inertie se ramène à l'étude du comportement de la fonction $\delta(t_1)$, quelles que soient sa valeur initiale $\delta(t_0)$ et les fonctions $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$, $\omega_z(t)$. On peut se demander, en particulier, si dans le cas général l'angle $\delta(t_1)$ ne croîtra indéfiniment avec le temps t_1. Il se trouve que contre toute attente, la réponse à cette question est bien simple : les rotations finies $D(t_1)$ et $D(t_0)$ sont absolument identiques pour tout instant fixé t_1 et donc la solution des équations différentielles (5.1.6) est, en ce sens, stable. Ainsi, l'angle $\delta(t_1)$ se trouve constant et égal à sa valeur initiale $\delta(t_0)$, alors que l'axe d_1 de la rotation finie $D(t_1)$ conserve, à tout instant, son orientation par rapport au système de coordonnées non tournant $\xi^s\eta^s\zeta^s$, c'est-à-dire reste parallèle à l'axe d_0 de la rotation finie $D(t_0)$.

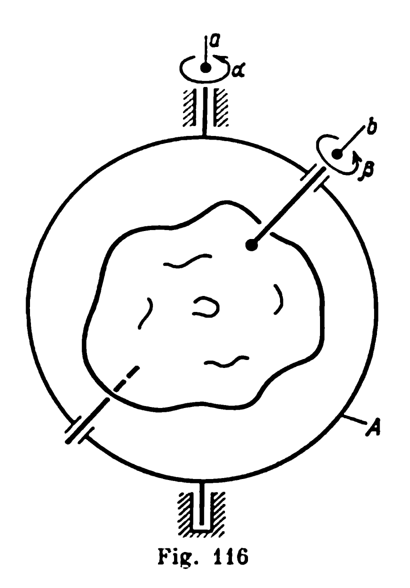


Fig. 116

La démonstration de l'assertion énoncée plus haut est basée sur un théorème intéressant qui concerne les rotations finies. Deux rotations finies d'un corps solide : une rotation A s'effectuant de l'angle α autour de l'axe a d'orientation constante par rapport au système de coordonnées non tournant $\xi^s\eta^s\zeta^s$ et une rotation B qui s'effectue de l'angle β autour de l'axe b rigidement relié au corps sont permutables. Ceci signifie qu'étant donné la position initiale d'un corps à un point fixe, par rapport au système de coordonnées $\xi^s\eta^s\zeta^s$ mentionné, sa position d'arrivée ne dépend pas de l'ordre des rotations A et B. Dans un énoncé non essentiellement différent, ce théorème a été démontré analytiquement par A. Lourier [1]). Nous donnerons ici la démonstration géométrique de ce théorème qui est bien simple.

Remarquons tout d'abord que, quel que soit l'ordre des rotations, l'angle inclus entre l'axe immobile a et l'axe b rigidement lié au corps reste inchangé. On peut lier à ces deux axes un corps intermédiaire (par exemple, l'anneau A ; fig. 116) qui ne limite pas le mouvement du corps principal. La rotation A peut maintenant

[1]) Voir *Лурье А. И.* « Аналитическая механика » (*A. Lourier* « Mécanique analytique »). М., Физматгиз, 1961 (en russe).

s'interpréter comme une rotation de ce corps intermédiaire, qui s'effectue de l'angle α, par rapport au système de coordonnées non tournant $\xi^s\eta^s\zeta^s$, autour de l'axe immobile a. A son tour, la rotation B représente la rotation du corps principal, par rapport au corps intermédiaire, de l'angle β autour de leur axe commun b. Il est tout à fait évident que l'ordre des rotations mentionnées est sans effet sur la position finale du corps intermédiaire et donc sur celle du corps principal.

Au point de vue cinématique, l'intégration du système d'équations différentielles (5.1.6) ou du système équivalent (5.1.7) permet de déterminer la rotation finie du trièdre sus-mentionné de la position initiale $x_0y_0z_0$ qu'il occupait à l'instant $t = t_0$ dans la position finale $x_1y_1z_1$ correspondant à un instant $t = t_1$. Désignons une telle rotation par G. Il est évident que la rotation G n'est déterminée que par la suite de valeurs des fonctions $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$, $\omega_z(t)$ dans l'intervalle $]t_0, t_1[$ ou, ce qui revient au même, par les projections de la vitesse angulaire absolue $\overline{\omega}$ (c'est-à-dire, rapportée au système de coordonnées non tournant) sur les arêtes correspondantes du trièdre et ne dépend pas de la position initiale de ce dernier.

Introduisons maintenant deux trièdres abc et $a^*b^*c^*$ qui occupent à l'instant $t = t_0$ respectivement deux positions initiales différentes $x_0y_0z_0$ et $x_0^*y_0^*z_0^*$. Supposons que ces trièdres se déplacent de telle sorte qu'à tout instant t les projections de la vitesse angulaire du premier d'entre eux sur les arêtes a, b, c sont respectivement égales aux projections de la vitesse angulaire du deuxième trièdre sur les arêtes a^*, b^*, c^*. Désignons, comme précédemment, par $x_1^*y_1^*z_1^*$ la position du trièdre $a^*b^*c^*$ à l'instant $t = t_1$ et par $x_1y_1z_1$ la position, au même instant, du trièdre abc. Comme il vient d'être dit, la rotation finie G^* qui fait passer le trièdre $a^*b^*c^*$ de la position $x_0^*y_0^*z_0^*$ dans la position $x_1^*y_1^*z_1^*$ ne diffère pas de la rotation finie G du trièdre abc, qui s'effectue de la position $x_0y_0z_0$ dans la position $x_1y_1z_1$. Ceci signifie que les angles faits par l'axe g^* de rotation finie G^* avec les axes x_0^*, y_0^*, z_0^* (ainsi qu'avec les axes x_1^*, y_1^*, z_1^* et avec les arêtes a^*, b^*, c^*) seront les mêmes que ceux formés par l'axe g de rotation finie G avec les axes x_0, y_0, z_0 (et, certes, avec les axes x_1, y_1, z_1 et les arêtes a, b, c). De plus, les angles γ^* et γ des deux rotations finies sont, bien entendu, égaux.

Considérons maintenant la suite de deux rotations finies: G et $D(t_1)$ du trièdre abc de sa position de départ $x_0y_0z_0$ dans la position $x_1y_1z_1$ et ensuite dans la position $x_1^*y_1^*z_1^*$. La première, c'est-à-dire la rotation G, se fait de l'angle γ autour de l'axe g dont l'orientation par rapport au trièdre abc est déterminée par la donnée des fonctions $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$, $\omega_z(t)$ dans l'intervalle $]t_0, t_1[$. L'orientation de l'axe d_1 de la deuxième rotation, c'est-à-dire de la rotation $D(t_1)$, se détermine, par rapport au système de coordonnées non tournant, par la disposition relative des systèmes $x_1y_1z_1$ et $x_1^*y_1^*z_1^*$. En vertu du

théorème qui vient d'être démontré, de telles rotations sont permutables. On peut donc faire tout d'abord la rotation $D(t_1)$ d'angle $\delta(t_1)$ à partir de la position $x_0y_0z_0$ et ensuite la rotation G d'angle γ, successivement autour des axes d_1 et g. Par suite de ces rotations, le trièdre reprendra la même position $x_1^*y_1^*z_1^*$. Comme il est aisé de le voir dans ce cas, la deuxième rotation finie, c'est-à-dire G, ne sera en rien différente de la rotation G^* qui faisait passer le trièdre $a^*b^*c^*$ de la position initiale $x_0^*y_0^*z_0^*$ dans la position $x_1^*y_1^*z_1^*$. En effet, dans la position $x_1^*y_1^*z_1^*$, les arêtes du trièdre abc seront confondues avec les arêtes respectives du trièdre $a^*b^*c^*$, et en conséquence, l'axe de rotation finie g sera confondu avec l'axe analogue g^*. On peut en conclure, compte tenu de l'égalité des angles γ et γ^*, que dans le cas de la permutation indiquée des rotations finies, le trièdre abc commencera sa rotation finie G à partir de la position $x_0^*y_0^*z_0^*$, c'est-à-dire à partir de la position initiale du trièdre $a^*b^*c^*$. Ainsi, avec la permutation mentionnée des rotations, le trièdre abc doit d'abord passer, par suite de la rotation $D(t_1)$, de la position $x_0y_0z_0$ dans la position $x_0^*y_0^*z_0^*$. Or, une telle rotation a été désignée plus haut par $D(t_0)$. Par conséquent, les rotations $D(t_1)$ et $D(t_0)$ sont identiques, leurs axes d_1 et d_0 sont confondus et les angles $\delta(t_1)$ et $\delta(t_0)$ sont égaux. Les deux suites de rotations finies qui viennent d'être considérées peuvent se représenter, suivant ce qui a été établi au chap. III, § 5 du tome I, par le schéma conventionnel suivant:

$$\begin{array}{ccc} x_0y_0z_0 & \xrightarrow[\gamma]{g} & x_1y_1z_1 \\ d_0 \Big\downarrow \delta(t_0) & & d_1 \Big\downarrow \delta(t_1) \\ x_0^*y_0^*z_0^* & \xrightarrow[\gamma^*]{g^*} & x_1^*y_1^*z_1^*. \end{array} \tag{5.2.6}$$

Le fait démontré de l'égalité des angles $\delta(t_1)$ et $\delta(t_0)$ signifie qu'au sens indiqué plus haut, la solution du système d'équations (5.1.6) de la navigation par inertie est stable, quelles que soient les valeurs initiales des variables ψ, φ et $\varkappa$ et les projections données $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$, $\omega_z(t)$ de la vitesse angulaire absolue de la plate-forme stabilisée sur les axes du système de coordonnées xyz qui lui est lié. Ainsi, la solution est stable, quels que soient les déplacements, sur la sphère terrestre, du mobile porteur de la plate-forme stabilisée, si l'axe z lié à la plate-forme passe constamment par le centre de la Terre (sinon l'angle φ, par exemple, ne sera plus la latitude).

Signalons enfin que l'angle δ introduit plus haut pour la rotation finie qui fait passer la plate-forme stabilisée, à un instant donné, de la position principale dans la position perturbée, peut être utilisé pour construire la fonction de Liapounov. A cet effet, il convient d'exprimer la valeur de l'angle δ par l'intermédiaire des pertur-

bations $\Delta\psi$, $\Delta\varphi$, $\Delta\varkappa$ définies par les égalités (5.2.5), et par les quantités ψ, φ et $\varkappa$ qui décrivent le mouvement non perturbé du centre de la suspension de la plate-forme stabilisée. La fonction

$$V = \delta\,(\Delta\psi,\ \Delta\varphi,\ \Delta\varkappa,\ \psi,\ \varphi,\ \varkappa) \qquad (5.2.7)$$

est à la fois une intégrale première et la fonction de Liapounov des équations différentielles des perturbations (5.2.5). Ainsi, la question concernant la stabilité de la solution du système d'équations différentielles (5.1.6) du problème principal de navigation par inertie, par rapport à la perturbation des conditions initiales (5.2.2), se trouve résolue tant géométriquement qu'analytiquement.

§ 3. Schéma de navigation par inertie avec plate-forme stabilisée en azimut

Comme cela a été dit au début du chapitre actuel, le problème de navigation par inertie, en cas de déplacement quelconque d'un mobile sur la sphère terrestre, peut être résolu en principe de façons différentes, en utilisant divers dispositifs faisant appel à des combinaisons de gyroscopes, d'accéléromètres, d'organes électromécaniques et de calculateurs. Au cours du présent paragraphe nous décrivons le premier, à notre connaissance, des schémas proposés de tels dispositifs qui résout rigoureusement le problème de navigation par inertie [1]) (à condition, bien entendu, que le fonctionnement de tous les éléments sensibles, des systèmes d'asservissement, des calculateurs et des autres organes constitutifs soit correct et la Terre supposée sphérique à répartition radiale de la densité).

Le schéma de navigation par inertie décrit ci-dessous est un des plus simples. De trois fonctions du temps, c'est-à-dire des projections $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$ et $\omega_z(t)$ de la vitesse angulaire de la plate-forme stabilisée, qui figurent dans les seconds membres des équations différentielles du système (5.1.6), la centrale à inertie en question n'élabore que deux: $\omega_x(t)$ et $\omega_y(t)$. La troisième fonction, $\omega_z(t)$, est ici identiquement nulle, car la plate-forme est stabilisée en azimut par l'un des gyroscopes du système. Remarquons que l'axe z est perpendiculaire au plan de la plate-forme et, en l'absence de perturbations, passe constamment par le centre de la sphère terrestre.

Dans les paragraphes suivants de ce chapitre, nous indiquons d'autres schémas de navigation par inertie. On peut réaliser, en particulier, un schéma (v. § 5 du présent chapitre) dans lequel les fonctions $\omega_y(t)$ et $\omega_z(t)$ sont, dans le cas général, non nulles: elle

[1]) Ce schéma a été proposé par l'auteur de la présente Monographie pour la navigation maritime et, indépendamment de lui, en 1956, par L. Kondratiev pour la navigation aérienne.

sont appliquées à l'entrée d'un calculateur qui assure l'intégration des équations différentielles du système (5.1.6). En vertu des propriétés que présente le système gyroscopique du dispositif, c'est la fonction $\omega_x(t)$ qui se trouve identiquement égale à zéro. Ici, l'axe x est rigidement lié à la plate-forme et situé dans son plan.

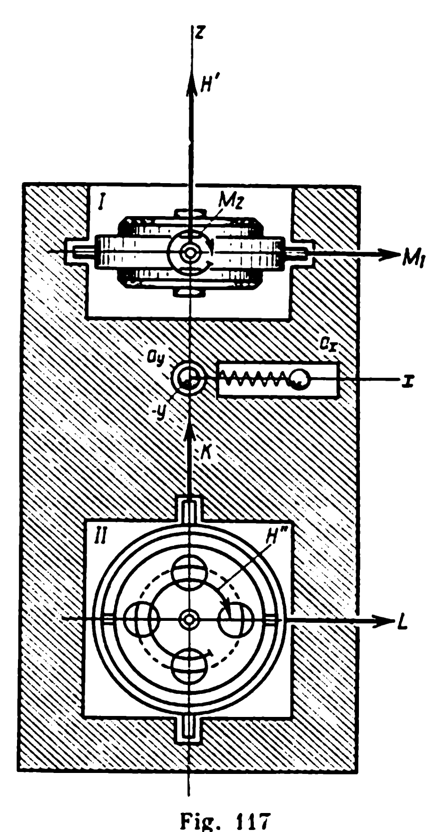


Fig. 117

La centrale de navigation à inertie, décrite dans ce paragraphe, comporte deux gyroscopes de haute précision I et II (fig. 117). L'axe de l'anneau extérieur du gyroscope I est parallèle à la plate-forme stabilisée installée à bord du mobile, alors que l'axe de l'anneau extérieur du gyroscope II est perpendiculaire à cette plate-forme. Les systèmes d'asservissement amènent de façon continue la plate-forme dans une position où elle est à son tour perpendiculaire au vecteur moment cinétique propre $\bar{H}'$ du gyroscope I.

Si le fonctionnement du dispositif est parfait, le vecteur $\bar{H}'$ est orienté vers le haut, suivant le prolongement du rayon de la Terre, qui passe par le centre de la plate-forme (plus exactement, par le centre de sa suspension à bord du mobile). Dans ce cas, l'axe du boîtier du gyroscope I est parallèle à la plate-forme. En azimut, la plate-forme suit l'anneau extérieur du gyroscope II. Le couple de correction K appliqué à l'axe de l'anneau extérieur du gyroscope II oblige le vecteur moment cinétique propre $\bar{H}''$ de ce gyroscope d'être tout le temps parallèle au plan de la plate-forme.

En plus des gyroscopes, la plate-forme stabilisée porte encore deux accéléromètres à un axe dont les axes sensibles x et y sont situés dans le plan de la plate-forme. L'axe sensible x du premier accéléromètre est parallèle à l'axe de l'anneau extérieur du gyroscope I. L'axe sensible y du second accéléromètre est perpendiculaire à l'axe x.

Introduisons de nouveau un système de coordonnées xyz rigidement lié à la plate-forme. L'origine de ce système est au centre de la plate-forme, son axe z est dirigé vers le haut et ses axes x et y sont confondus avec les axes sensibles de mêmes noms des accéléromètres. D'après ce qui a été établi au § 1 du chapitre précédent, on peut considérer que les accéléromètres mesurent les projections $a_x = a_x(t)$ et $a_y = a_y(t)$ de l'accélération apparente du centre de la plate-forme stabilisée, respectivement sur les axes x et y. Les calculateurs élaborent, à partir des indications des accéléromètres (v. § 2 du chapitre précédent), les fonctions

$$F_x(t) = \int_0^t a_x(t)\,dt + b_x, \qquad F_y(t) = \int_0^t a_y(t)\,dt + b_y. \quad (5.3.1)$$

A leur tour, les organes électromécaniques développent des moments appliqués aux axes de l'anneau extérieur et du boîtier du gyroscope I, ayant pour valeurs respectives

$$M_1 = kF_x(t), \qquad M_2 = kF_y(t) \quad (5.3.2)$$

et, de plus, imposent le moment L au gyroscope II, par rapport à l'axe de son boîtier (fig. 117). Dans les formules (5.3.1) et (5.3.2), b_x, b_y et k sont des paramètres constants dont les valeurs seront indiquées plus loin.

Sous l'action des moments M_1, M_2 et L indiqués ci-dessus, ainsi que du couple de correction K, les gyroscopes I et II sont animés d'un mouvement de précession (fig. 118 et 119). Il en résulte que la plate-forme tourne, par rapport au système de coordonnées non tournant $\xi^s\eta^s\zeta^s$, à la vitesse angulaire ω dont les projections sur les axes x, y et z s'expriment, compte tenu des formules (5.3.1) et (5.3.2), par

$$\begin{aligned}\omega_x &= -\frac{M_2}{H'} = -\frac{k}{H'}\left[\int_0^t a_y(t)\,dt + b_y\right],\\ \omega_y &= \frac{M_1}{H'} = \frac{k}{H'}\left[\int_0^t a_x(t)\,dt + b_x\right], \quad (5.3.3)\\ \omega_z &= -\frac{L}{H''}.\end{aligned}$$

Les constantes b_x, b_y et k intervenant dans les formules (5.3.1), (5.3.2) et les deux premières égalités (5.3.3) peuvent être choisies, de même que la valeur du moment L figurant au second membre de la troisième égalité, de manière à rendre possible un mouvement particulier suivant de la plate-forme. A savoir, la plate-forme est tangente à la sphère S, quel que soit le déplacement de son centre sur cette

sphère. Pour qu'un tel mouvement de la plate-forme soit possible, il est nécessaire, bien entendu, que la plate-forme soit tangente à la sphère S au moins dans sa position de départ, c'est-à-dire à l'instant $t = 0$.

Si le mouvement que nous venons de décrire est réalisé, les axes x et y du système de coordonnées xyz sont, eux aussi, constamment tangents à la sphère S. Par les formules (5.3.3), on connaît, à tout instant courant, les projections $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$, $\omega_z(t)$ de la vitesse

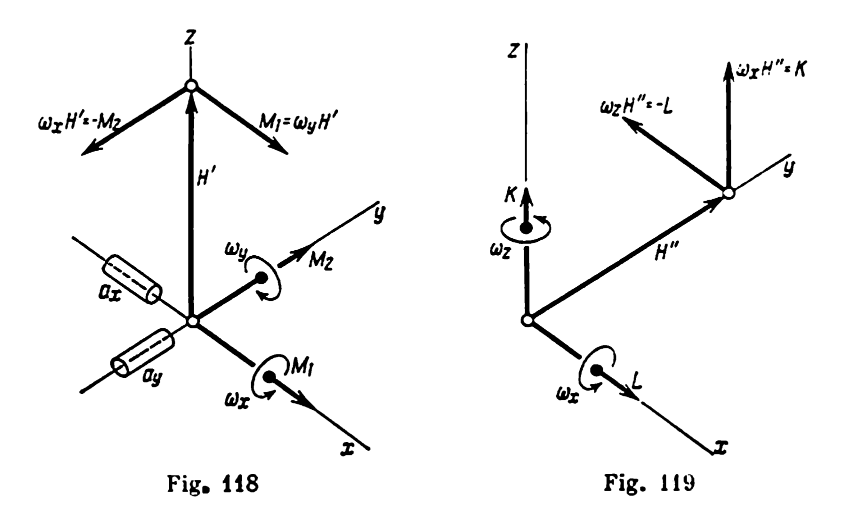


Fig. 118 Fig. 119

angulaire de ce système sur ses propres axes x, y et z. Par conséquent, la détermination de la position de l'origine du système xyz et de l'orientation de ses axes x et y par rapport aux points cardinaux se ramène, d'après ce qui a été établi au § 1 du présent chapitre, à l'intégration des équations différentielles du système (5.1.6).

Pour justifier la possibilité du mouvement particulier sus-mentionné de la plate-forme, avec un choix approprié des constantes b_x, b_y et k, ainsi que du moment L, introduisons, comme au deuxième paragraphe du chapitre précédent, une plate-forme auxiliaire imaginaire ayant son centre confondu avec celui de la plate-forme principale. Plaçons dans le plan de la plate-forme auxiliaire les axes ξ et η du système de coordonnées $\xi\eta\zeta$ rigidement lié à cette plate-forme; dirigeons l'axe ζ de ce système suivant le prolongement du rayon de la sphère S, qui passe par le centre de la plate-forme. Dans ces conditions, la plate-forme auxiliaire sera en permanence tangente à cette sphère. Exigeons de plus que lors du mouvement du centre de la plate-forme sur la sphère S, la projection ω_ζ^* de la vitesse angulaire absolue ω^* de la plate-forme auxiliaire, sur l'axe ζ qui lui est lié, soit constamment nulle.

Plaçons sur la plate-forme auxiliaire deux accéléromètres à un axe, en dirigeant leurs axes sensibles suivant les axes ξ et η. Elaborons à l'aide de calculateurs, en plus des fonctions $F_x(t)$ et $F_y(t)$, encore deux fonctions suivantes:

$$F_\xi^*(t) = \int_0^t a_\xi^*(t)\,dt + b_\xi^*,$$
$$F_\eta^*(t) = \int_0^t a_\eta^*(t)\,dt + b_\eta^*. \qquad (5.3.4)$$

Ici, a_ξ^* et a_η^* sont les indications des accéléromètres supplémentaires et b_ξ^* et b_η^* des constantes dont les valeurs seront établies un peu plus loin.

Enfin, en nous inspirant des formules (5.3.2), produisons les moments

$$M_1^* = k\,F_\xi^*(t),$$
$$M_2^* = k\,F_\eta^*(t) \qquad (5.3.5)$$

par rapport aux axes respectifs de l'anneau extérieur et du boîtier du gyroscope I et posons égale à zéro la valeur du moment L des forces appliquées au boîtier du gyroscope II par rapport à son axe (c'est-à-dire, laissons cet axe libre de toute action des forces extérieures et supposons qu'il n'y a pas de frottement dans ses paliers).

Ainsi, le gyroscope I placé sur la plate-forme principale n'est plus soumis aux moments M_1 et M_2 élaborés suivant les formules (5.3.1) et (5.3.2) à partir des indications des accéléromètres de cette plate-forme. Au lieu de ces moments, ce gyroscope subit l'action des moments M_1^* et M_2^* dus aux indications des accéléromètres supplémentaires placés sur la plate-forme auxiliaire. Il est évident que dans ce cas les projections de la vitesse angulaire de la plate-forme principale, sur les axes x, y et z qui lui sont liés, ont, par analogie avec les formules (5.3.3), pour expressions

$$\omega_x = -\frac{M_2^*}{H'}, \qquad \omega_y = \frac{M_1^*}{H'}, \qquad \omega_z = -\frac{L}{H''} = 0. \qquad (5.3.6)$$

Posons qu'à l'instant initial $t = 0$, les axes x, y et z liés à la plate-forme principale se confondent respectivement avec les axes ξ, η et ζ liés à la plate-forme auxiliaire. Il se trouve qu'avec un choix convenable des paramètres b_ξ, b_η et k, la plate-forme principale sera animée du même mouvement que la plate-forme auxiliaire, c'est-à-dire que les axes des systèmes de coordonnées xyz et $\xi\eta\zeta$ seront respectivement confondus non seulement à l'instant initial $t = 0$, mais également à tous les autres instants. Remarquons d'abord que, puisque l'axe ζ du système de coordonnées $\xi\eta\zeta$ passe par le centre

de la sphère S, on a, d'après les formules de la cinématique du solide (fig. 120), les relations suivantes:

$$v_\xi = \omega_\eta^* R, \qquad v_\eta = -\omega_\xi^* R. \tag{5.3.7}$$

Ici, v_ξ et v_η sont les projections de la vitesse du centre de la plate-forme auxiliaire (et donc de la plate-forme principale) sur les axes ξ et η, et ω_ξ^*, ω_η^* les projections de la vitesse angulaire ω^* de la plate-forme auxiliaire sur les mêmes axes. Il n'est pas difficile de déterminer maintenant les projections de l'accélération du centre de la suspension de la plate-forme, sur les axes ξ, η et ζ. D'après les formules bien connues en cinématique (v. chap. I, § 2 du présent livre), on obtient

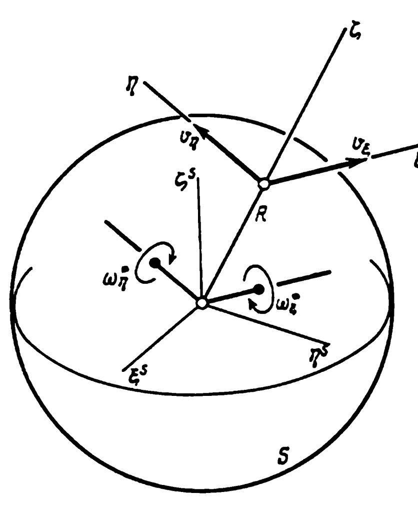


Fig. 120

$$w_\xi = \frac{dv_\xi}{dt} + \omega_\eta^* v_\zeta - \omega_\zeta^* v_\eta,$$

$$w_\eta = \frac{dv_\eta}{dt} + \omega_\zeta^* v_\xi - \omega_\xi^* v_\zeta, \tag{5.3.8}$$

$$w_\zeta = \frac{dv_\zeta}{dt} + \omega_\xi^* v_\eta - \omega_\eta^* v_\xi.$$

Or, d'après ce qui précède, le mouvement de la plate-forme auxiliaire doit satisfaire à la condition

$$\omega_\zeta^* \equiv 0. \tag{5.3.9}$$

De plus, le vecteur vitesse du centre de cette plate-forme étant constamment tangent à la sphère S et donc perpendiculaire à l'axe ζ, on a évidemment

$$v_\zeta \equiv 0. \tag{5.3.10}$$

Compte tenu des égalités (5.3.9) et (5.3.10) et des relations (5.3.7), on peut mettre les formules (5.3.8) sous la forme suivante:

$$w_\xi = \frac{dv_\xi}{dt},$$

$$w_\eta = \frac{dv_\eta}{dt}, \tag{5.3.11}$$

$$w_\zeta = -\frac{v_\xi^2 + v_\eta^2}{R} = -\frac{v^2}{R}.$$

Il est aisé maintenant de calculer les indications a_ξ^* et a_η^* des accéléromètres supplémentaires dont les axes sensibles sont orientés respectivement suivant les axes ξ et η. Déterminons également la valeur de la projection a_ζ^* de l'accélération apparente sur l'axe ζ. D'après ce qui a été établi au § 1 du chapitre précédent, on a

$$\begin{aligned} a_\xi^* &= w_\xi - j_\xi, \\ a_\eta^* &= w_\eta - j_\eta, \\ a_\zeta^* &= w_\zeta - j_\zeta. \end{aligned} \tag{5.3.12}$$

L'axe ζ du système de coordonnées $\xi\eta\zeta$ constitue le prolongement du rayon de la sphère S mené vers l'origine de ce système. La Terre étant supposée sphérique à répartition radiale de la densité, l'accélération de la gravitation j est donc orientée suivant la partie négative de l'axe ζ, et par conséquent, on a les égalités

$$j_\xi = 0, \quad j_\eta = 0, \quad j_\zeta = -j. \tag{5.3.13}$$

Compte tenu des égalités (5.3.11) et (5.3.13), les formules (5.3.12) pour a_ξ^*, a_η^* et a_ζ^* deviennent maintenant

$$a_\xi^* = \frac{dv_\xi}{dt}, \qquad a_\eta^* = \frac{dv_\eta}{dt}, \qquad a_\zeta^* = j - \frac{v^2}{R}. \tag{5.3.14}$$

Portons les expressions ainsi obtenues pour a_ξ^* et a_η^* dans les formules (5.3.4) et intégrons ces dernières. Il vient

$$\begin{aligned} F_\xi^*(t) &= v_\xi(t) - v_\xi(0) + b_\xi^*, \\ F_\eta^*(t) &= v_\eta(t) - v_\eta(0) + b_\eta^*. \end{aligned} \tag{5.3.15}$$

Si l'on pose maintenant

$$b_\xi^* = v_\xi(0), \qquad b_\eta^* = v_\eta(0), \tag{5.3.16}$$

où $v_\xi(0)$ et $v_\eta(0)$ sont les projections de la vitesse du centre de la plate-forme sur les axes ξ et η à l'instant initial $t = 0$, les formules (5.3.15) se simplifient et prennent la forme suivante :

$$F_\xi^*(t) = v_\xi(t), \qquad F_\eta^*(t) = v_\eta(t). \tag{5.3.17}$$

Tenons compte des formules (5.3.17) et (5.3.5) dans les relations (5.3.6) et tenons compte également des égalités (5.3.7). Il vient

$$\begin{aligned} \omega_x &= -\frac{k}{H'} v_\eta(t) = \frac{kR}{H'} \omega_\xi^*, \\ \omega_y &= \frac{k}{H'} v_\xi(t) = \frac{kR}{H'} \omega_\eta^*. \end{aligned} \tag{5.3.18}$$

Choisissons le facteur de proportionnalité k figurant dans les expressions (5.3.5) des moments M_1^* et M_2^*, de telle sorte que soit

satisfaite la relation

$$\frac{kR}{H'} = 1 \tag{5.3.19}$$

analogue à la condition (4.2.20) obtenue au § 2 du chapitre précédent. Les relations (5.3.18) deviennent alors

$$\omega_x(t) = \omega_\xi^*(t), \quad \omega_y(t) = \omega_\eta^*(t). \tag{5.3.20}$$

Joignons à ces deux relations une troisième, soit

$$\omega_z(t) = \omega_\zeta^*(t), \tag{5.3.21}$$

qui découle du rapprochement entre la condition (5.3.9) et la troisième équation (5.3.6) du mouvement du gyroscope II dont l'anneau de cardan extérieur est suivi par la plate-forme principale, ainsi que par le système de coordonnées xyz qui lui est lié.

Ainsi, les systèmes de coordonnées xyz et $\xi\eta\zeta$ liés respectivement à la plate-forme principale et à la plate-forme auxiliaire sont confondus à l'instant initial $t = 0$. Se mouvant ensuite, ils se déplacent de telle sorte que, conformément aux égalités (5.3.20) et (5.3.21), les projections de leurs vitesses angulaires ω et ω^* sur les axes correspondants sont égales l'une à l'autre, alors que leurs origines se trouvent au centre commun des deux plates-formes. Par conséquent, le mouvement dont seront animés la plate-forme principale et le système de coordonnées xyz qui lui est lié, sera le même que le mouvement imposé à la plate-forme auxiliaire avec le système $\xi\eta\zeta$. Ainsi donc, le mouvement de la plate-forme principale se produit conformément à la précession des gyroscopes sous l'effet des moments M_1^*, M_2^* auxquels ils sont soumis. En outre, le moment L est nul, et le couple de correction K oblige le vecteur moment cinétique propre du gyroscope II à être constamment parallèle aux plans xy et $\xi\eta$ confondus. Ceci étant, les moments M_1^* et M_2^* sont élaborés suivant les formules (5.3.5) et (5.3.4), à partir des indications $a_\xi^*(t)$ et $a_\eta^*(t)$ des accéléromètres supplémentaires placés sur la plate-forme auxiliaire. Il est évident que dans le cas considéré, les indications $a_x(t)$ et $a_y(t)$ des accéléromètres montés sur la plate-forme principale seront égales respectivement à $a_\xi^*(t)$ et $a_\eta^*(t)$. Par suite, rien ne sera changé dans le mouvement de la plate-forme principale si les moments M_1^* et M_2^* sont remplacés par les moments M_1 et M_2 produits à partir des indications des accéléromètres de la plate-forme principale, suivant les formules (5.3.2) et (5.3.1), et si la plate-forme auxiliaire est supprimée. On a ainsi démontré que, lorsque le centre de la plate-forme principale se déplace de façon arbitraire sur la sphère S, cette plate-forme reste constamment tangente à la sphère si sont remplies les conditions suivantes:

la plate-forme doit être tangente à la sphère à l'instant initial $t = 0$,

la relation (5.3.19) doit être réalisée,

les constantes b_x et b_y figurant dans les formules (5.3.1) sont liées par les mêmes égalités

$$b_x = v_x(0), \quad b_y = v_y(0) \tag{5.3.22}$$

aux projections, sur les axes x et y, de la vitesse du centre de la plate-forme à l'instant initial, que dans les conditions (5.3.16) qui leur sont analogues,

le moment résultant L des forces agissant sur le sous-ensemble mécanique « boîtier — rotor » du gyroscope II par rapport à l'axe de son boîtier est nul,

le fonctionnement des systèmes d'asservissement et des calculateurs est absolument correct,

enfin, la correction du gyroscope II à l'aide du couple K' est assurée comme il est décrit plus haut.

Ainsi qu'on l'a dit plus haut, la résolution du problème de navigation par inertie se ramène, lorsque la plate-forme principale est animée du mouvement décrit ci-dessus, à l'intégration du système d'équations différentielles (5.1.6) (v. § 1 du présent chapitre). Les fonctions $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$, $\omega_z(t)$ qui interviennent dans les équations (5.1.6) sont données dans ce cas par les formules (5.3.3) dans lesquelles il faut poser

$$L = 0 \tag{5.3.23}$$

et, de plus, tenir compte de la relation (5.3.19).

Proposons-nous maintenant d'étudier, de façon approchée, la stabilité du mouvement de la plate-forme que nous venons de décrire, au cours duquel son plan suit les gyroscopes pour rester constamment tangent à la sphère S. A cet effet, établissons d'abord les équations du mouvement perturbé de la plate-forme. Dans le cas général, la plate-forme peut se trouver à l'instant initial, légèrement inclinée sur le plan tangent à la sphère S et passant par la position initiale du centre de la plate-forme. De plus, il se peut que les conditions (5.3.22) ne soient pas satisfaites tout à fait exactement. Quant à l'égalité (5.3.19), nous supposons comme précédemment qu'elle est vérifiée en toute rigueur.

Dans son mouvement non perturbé, la plate-forme principale se confond avec la plate-forme auxiliaire imaginaire à laquelle est rigidement lié le système de coordonnées $\xi\eta\zeta$. Par conséquent, le système de coordonnées xyz lié à la plate-forme réelle (ou principale) se déplace, au cours du mouvement non perturbé de cette dernière, de la même façon que le système $\xi\eta\zeta$ et se confond complètement avec celui-ci. Si le mouvement est perturbé, les axes respectifs de ces systèmes font entre eux des angles qui varient avec le temps. Désignons par α, β et γ les angles d'Euler-Krylov qui déterminent la position du système de coordonnées xyz par rapport au système

$\xi\eta\zeta$ (v. tome I, chap. III, § 6). Dans le cas des angles d'Euler-Krylov, pour passer du système $\xi\eta\zeta$ au système xyz, il faut faire trois rotations finies (fig. 121): de l'angle α autour de l'axe ξ, de l'angle β autour de l'axe y'' (nouvelle position de l'axe η), et de l'angle γ (fig. 122) autour de l'axe z avec lequel se confond, après les deux rotations précédentes, l'axe ζ. La table des cosinus des angles que font entre eux les axes des systèmes xyz et $\xi\eta\zeta$ s'obtient facilement, si l'on modifie, par exemple la table (3.5.6) établie au chap. III,

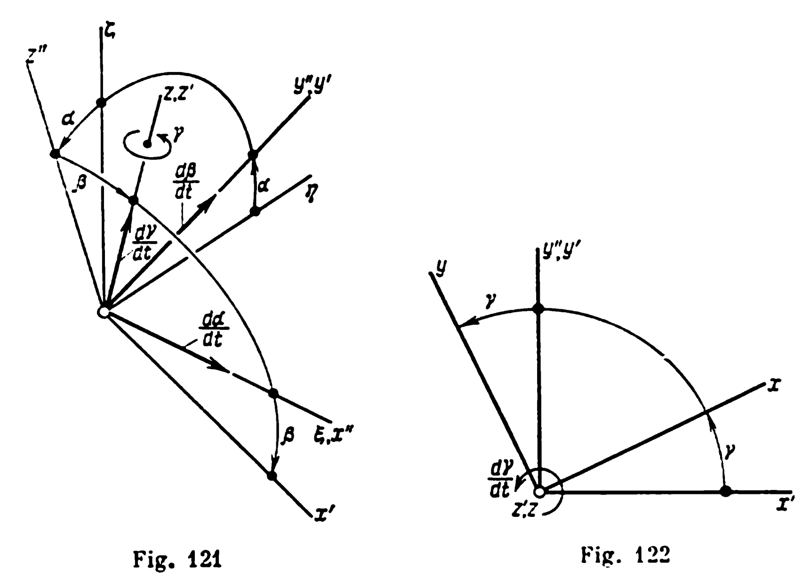


Fig. 121 Fig. 122

§ 5 du tome I. A cet effet, il convient de remplacer les axes x, y, z, ξ_1, η_1, ζ_1 par les axes respectifs ξ, η, ζ, x, y, z, et les angles α_1, β_1, γ_1 par les angles α, β et γ. Il vient

	ξ	η	ζ
x	$\cos\beta\cos\gamma$	$\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma +$ $+\cos\alpha\sin\gamma$	$-\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma +$ $+\sin\alpha\sin\gamma$
y	$-\cos\beta\sin\gamma$	$-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma +$ $+\cos\alpha\cos\gamma$	$\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma +$ $+\sin\alpha\cos\gamma$
z	$\sin\beta$	$-\sin\alpha\cos\beta$	$\cos\alpha\cos\beta$.

(5.3.24)

D'après ce qui précède, le mouvement non perturbé de la plateforme et donc celui du système de coordonnées $\xi\eta\zeta$ est tel que la projection ω_ζ^* de sa vitesse angulaire $\bar{\omega}^*$ (par rapport au système non tournant $\xi^s\eta^s\zeta^s$) sur l'axe ζ est identiquement nulle. Les projections ω_ξ^*, ω_η^* de la même vitesse angulaire $\bar{\omega}^*$ sont liées aux pro-

jections v_ξ et v_η, sur les axes ξ et η, de la vitesse du centre de la plate-forme par les relations (5.3.7). La vitesse angulaire $\bar{\omega}$ du système de coordonnées xyz qui se déplace avec la plate-forme dans son mouvement perturbé (toujours par rapport au système $\xi^s\eta^s\zeta^s$) vaut la somme géométrique de la vitesse angulaire $\bar{\omega}^*$ du système $\xi\eta\zeta$ et des vitesses angulaires $\bar{\xi}^0 d\alpha/dt$, $\bar{y}''^0 d\beta/dt$ et $\bar{z}^0 d\gamma/dt$ dues aux variations des angles α, β et γ. Dans le cas où seul l'angle α varie, le système de coordonnées xyz tourne par rapport au système $\xi\eta\zeta$ autour de l'axe ξ et donc la vitesse angulaire relative $d\alpha/dt$ est dirigée le long de l'axe ξ. Si c'est l'angle β qui varie, la rotation se fait autour de l'axe y'' et la vitesse angulaire relative $d\beta/dt$ est dirigée suivant cet axe. L'axe y'' se trouve dans le plan xy (ainsi que dans le plan $\eta\zeta$) ; il fait avec les axes x et y les angles respectivement égaux à $\pi/2-\gamma$ et γ (fig. 122). Enfin, dans le cas où ne varie que l'angle γ, le système de coordonnées xyz tourne par rapport au système $\xi\eta\zeta$ autour de l'axe z, suivant lequel est donc dirigée la troisième vitesse angulaire relative $d\gamma/dt$. Compte tenu de ce qui vient d'être dit, on obtient, en utilisant la table (5.3.24), les expressions suivantes pour les projections de la vitesse angulaire $\bar{\omega}$ du système de coordonnées xyz sur ses propres axes :

$$\omega_x = \left(\omega_\xi^* + \frac{d\alpha}{dt}\right)\cos\beta\cos\gamma + \omega_\eta^*(\cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma) + \frac{d\beta}{dt}\sin\gamma,$$

$$\omega_y = -\left(\omega_\xi^* + \frac{d\alpha}{dt}\right)\cos\beta\sin\gamma + \omega_\eta^*(\cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma) + \frac{d\beta}{dt}\cos\gamma,$$

$$\omega_z = \left(\omega_\xi^* + \frac{d\alpha}{dt}\right)\sin\beta - \omega_\eta^*\sin\alpha\cos\beta + \frac{d\gamma}{dt}. \quad (5.3.25)$$

Les expressions trouvées pour les projections ω_x et ω_y doivent être introduites dans les relations (5.3.3) qui déterminent la précession du gyroscope I. Ces relations font intervenir également les projections a_x et a_y, sur les axes x et y, de l'accélération apparente du centre de la plate-forme. Pour calculer ces dernières, remarquons d'abord que les projections w_ξ, w_η, w_ζ de l'accélération absolue $\bar{w}$ (c'est-à-dire, rapportée au système de coordonnées $\xi^s\eta^s\zeta^s$) du centre de la plate-forme sur les axes ξ, η et ζ s'expriment par les formules (5.3.11), alors que les projections j_ξ, j_η et j_ζ de l'accélération de la gravitation j sont données respectivement par les formules (5.3.13). En tenant compte des égalités (5.3.14) et en utilisant de nouveau la table (5.3.24) des cosinus des angles inclus entre les axes des systèmes de coordonnées xyz et $\xi\eta\zeta$, on obtient pour les projections, sur les

axes x et y, de l'accélération apparente du centre de la plate-forme les expressions suivantes que nous utiliserons par la suite:

$$a_x = \frac{dv_\xi}{dt}\cos\beta\cos\gamma + \frac{dv_\eta}{dt}(\cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma) + \\ + \left(j - \frac{v^2}{R}\right)(\sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma), \tag{5.3.26}$$

$$a_y = -\frac{dv_\xi}{dt}\cos\beta\sin\gamma + \frac{dv_\eta}{dt}(\cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma) + \\ + \left(j - \frac{v^2}{R}\right)(\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma).$$

Dérivons par rapport au temps les premiers et les seconds membres des relations (5.3.3). Compte tenu de la condition (5.3.19), on obtient les égalités

$$\frac{d\omega_x}{dt} = -\frac{a_y}{R}, \qquad \frac{d\omega_y}{dt} = \frac{a_x}{R}. \tag{5.3.27}$$

Dans les formules (5.3.25), substituons aux projections ω_ξ^* et ω_η^* de la vitesse angulaire $\bar{\omega}^*$ du système de coordonnées $\xi\eta\zeta$ leurs représentations par l'intermédiaire des projections v_ξ et v_η de la vitesse du centre de la plate-forme, données par les égalités (5.3.7), et introduisons les nouvelles expressions ainsi obtenues pour ω_x et ω_y dans les premiers membres des égalités (5.3.27). Portons dans les seconds membres de ces égalités les valeurs de a_x et a_y données par les formules (5.3.26). On obtient finalement les relations

$$\frac{d}{dt}\left[\left(-\frac{v_\eta}{R} + \frac{d\alpha}{dt}\right)\cos\beta\cos\gamma + \right. \\ \left. + \frac{v_\xi}{R}(\cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma) + \frac{d\beta}{dt}\sin\gamma\right] = \\ = -\frac{1}{R}\left[-\frac{dv_\xi}{dt}\cos\beta\sin\gamma + \frac{dv_\eta}{dt}(\cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma) + \right. \\ \left. + \left(j - \frac{v^2}{R}\right)(\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma)\right],$$

$$\frac{d}{dt}\left[-\left(-\frac{v_\eta}{R} + \frac{d\alpha}{dt}\right)\cos\beta\sin\gamma + \right. \\ \left. + \frac{v_\xi}{R}(\cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma) + \frac{d\beta}{dt}\cos\gamma\right] = \\ = \frac{1}{R}\left[\frac{dv_\xi}{dt}\cos\beta\cos\gamma + \frac{dv_\eta}{dt}(\cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma) + \right. \\ \left. + \left(j - \frac{v^2}{R}\right)(\sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma)\right] \tag{5.3.28}$$

qui représentent, pour des fonctions du temps données $v_\xi(t)$ et $v_\eta(t)$, deux équations différentielles à trois inconnues sous forme des fonctions du temps cherchées $\alpha(t)$, $\beta(t)$ et $\gamma(t)$. La troisième équation contenant les mêmes fonctions cherchées découle de la troisième relation (5.3.3). Etant donné que dans le schéma de navigation par inertie considéré aucune force n'est appliquée au boîtier du gyroscope II, dans la troisième relation (5.3.3) il convient de poser $L = 0$, comme il a déjà été indiqué précédemment. En portant dans le premier membre de cette relation l'expression de la projection de la vitesse angulaire ω_z suivant la troisième formule (5.3.25) et en tenant compte encore une fois des égalités (5.3.7), on obtient la troisième équation différentielle sous la forme suivante:

$$-\frac{v_\eta}{R}\sin\beta-\frac{v_\xi}{R}\sin\alpha\cos\beta+\frac{d\alpha}{dt}\sin\beta+\frac{d\gamma}{dt}=0. \tag{5.3.29}$$

Ainsi, le système d'équations différentielles permettant de déterminer les fonctions $\alpha(t)$, $\beta(t)$ et $\gamma(t)$ comprend deux équations du deuxième ordre (5.3.28) et une équation du premier ordre (5.3.29). Déterminons les conditions initiales de ces équations. Trois d'entre elles sont représentées par les valeurs des angles α, β, γ à l'instant $t = 0$. Introduisons pour ces valeurs les désignations suivantes:

$$\alpha(0)=\alpha_0,\quad \beta(0)=\beta_0,\quad \gamma(0)=\gamma_0. \tag{5.3.30}$$

Deux autres conditions initiales sont déterminées par les valeurs des dérivées par rapport au temps des angles α et β au même instant $t = 0$. Ce sont

$$\left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_{t=0}=\dot{\alpha}_0,\quad \left.\frac{d\beta}{dt}\right|_{t=0}=\dot{\beta}_0. \tag{5.3.31}$$

Ces valeurs sont liées aux valeurs des projections $v_\xi(t)$ et $v_\eta(t)$ de la vitesse du centre de la plate-forme à l'instant $t = 0$ et aux paramètres b_x et b_y figurant dans les formules (5.3.1) qui définissent les fonctions $F_x(t)$ et $F_y(t)$. En effet, posons dans les formules (5.3.3) $t = 0$. Compte tenu de la condition (5.3.19), on obtient

$$\omega_x(0)=-\frac{1}{R}b_y,\quad \omega_y(0)=\frac{1}{R}b_x. \tag{5.3.32}$$

Introduisons maintenant dans les premiers membres de ces égalités les expressions de ω_x et ω_y données par les deux premières formules (5.3.25) et tenons compte de nouveau de l'égalité (5.3.7). Puis, posons $t = 0$. Finalement, on obtient, compte tenu des désignations

(5.3.30) et (5.3.31), les relations

$$
\begin{aligned}
&\left(-\frac{v_\eta(0)}{R}+\dot{\alpha}_0\right)\cos\beta_0\cos\gamma_0+\frac{v_\xi(0)}{R}(\cos\alpha_0\sin\gamma_0+\\
&\qquad\qquad+\sin\alpha_0\sin\beta_0\cos\gamma_0)+\dot{\beta}_0\sin\gamma_0=-\frac{b_y}{R},\\
&-\left(-\frac{v_\eta(0)}{R}+\dot{\alpha}_0\right)\cos\beta_0\sin\gamma_0+\frac{v_\xi(0)}{R}(\cos\alpha_0\cos\gamma_0-\\
&\qquad\qquad-\sin\alpha_0\sin\beta_0\sin\gamma_0)+\dot{\beta}_0\cos\gamma_0=\frac{b_x}{R}
\end{aligned}
\qquad (5.3.33)
$$

qui constituent des équations algébriques linéaires permettant de rechercher les deux conditions initiales $\dot{\alpha}_0$ et $\dot{\beta}_0$ qui manquent.

Bornons-nous à examiner le cas d'une petite perturbation de la plate-forme. En conséquence, gardons dans les équations différentielles (5.3.28) et (5.3.29) les seuls termes de premier ordre par rapport aux variables $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ et à leurs dérivées par rapport au temps. On obtient, après quelques transformations assez simples, deux équations différentielles du deuxième ordre

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\frac{v_\xi}{R}\frac{d\gamma}{dt}+\frac{1}{R}\left(j-\frac{v^2}{R}\right)\alpha=0,\\
&\frac{d^2\beta}{dt^2}+\frac{v_\eta}{R}\frac{d\gamma}{dt}+\frac{1}{R}\left(j-\frac{v^2}{R}\right)\beta=0
\end{aligned}
\qquad (5.3.34)
$$

et une équation du premier ordre

$$\frac{d\gamma}{dt}=\alpha\frac{v_\xi}{R}+\beta\frac{v_\eta}{R}. \qquad (5.3.35)$$

Cette dernière équation permet d'éliminer la dérivée de l'angle γ par rapport au temps entre les deux premières. En outre, en tenant compte de ce que

$$v^2=v_\xi^2+v_\eta^2, \qquad (5.3.36)$$

on obtient le système suivant de deux équations différentielles par rapport à deux fonctions inconnues $\alpha(t)$ et $\beta(t)$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\left(\frac{j}{R}-\frac{v_\eta^2}{R^2}\right)\alpha+\frac{v_\xi v_\eta}{R^2}\beta=0,\\
&\frac{d^2\beta}{dt^2}+\left(\frac{j}{R}-\frac{v_\xi^2}{R^2}\right)\beta+\frac{v_\xi v_\eta}{R^2}\alpha=0.
\end{aligned}
\qquad (5.3.37)
$$

Lorsqu'on a trouvé, par intégration des dernières équations, les inconnues $\alpha(t)$ et $\beta(t)$, la recherche de l'angle $\gamma(t)$ se ramène, conformément à l'équation (5.3.35), à une quadrature simple.

Les équations différentielles (5.3.37) sont des équations linéaires à coefficients variables. La détermination de la stabilité de la solution triviale

$$\alpha = \beta = 0 \tag{5.3.38}$$

exige donc une étude spéciale. Lorsque le centre de la plate-forme est animé d'un mouvement uniforme sur un arc de grand cercle de la sphère non tournante S, les projections $v_\xi(t)$ et $v_\eta(t)$ de sa vitesse par rapport à la sphère sont des constantes. Les racines de l'équation caractéristique du système d'équations différentielles (5.3.37) sont dans ce cas les nombres $\pm i\sqrt{j/R}$, $\pm i\sqrt{j/R - v^2/R^2}$. Si

$$v \ll v_I = \sqrt{jR}, \tag{5.3.39}$$

c'est-à-dire si la vitesse du centre de la plate-forme est très inférieure à la première vitesse cosmique (v. § 2 du chapitre précédent), toutes les racines de l'équation caractéristique sont voisines, en module, de la pulsation de Schüler

$$n_s = \sqrt{\frac{g}{R}}, \tag{5.3.40}$$

où g est l'accélération de la pesanteur.

Dans le cas particulier où le centre de la plate-forme se déplace sur l'équateur ou sur un arc de grand cercle de la Terre supposée exempte de rotation, l'axe ξ peut être dirigé suivant la tangente à la circonférence correspondante. Alors

$$v_\xi = v(t), \quad v_\eta = 0, \quad \omega_\zeta = 0. \tag{5.3.41}$$

C'est la dernière égalité qui permet en fait le choix d'un tel mouvement du système de coordonnées $\xi\eta\zeta$ comme mouvement non perturbé (remarquons qu'un mouvement analogue le long d'un parallèle ne satisfait pas à la condition $\omega_\zeta = 0$). Le système d'équations différentielles (5.3.37) se subdivise maintenant en deux équations indépendantes

$$\begin{gathered}\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{j}{R}\alpha = 0,\\ \frac{d^2\beta}{dt^2} + \left(\frac{j}{R} - \frac{v^2}{R^2}\right)\beta = 0.\end{gathered} \tag{5.3.42}$$

La deuxième d'entre elles coïncide en fait avec l'équation (4.2.39) obtenue au § 2 du chapitre précédent. Il faut noter que dans ce cas les petites oscillations de la plate-forme autour de l'axe ξ, suivant lequel est dirigé maintenant le vecteur vitesse du centre de la plate-forme, sont indépendantes non seulement de ses oscillations dans le plan du grand cercle mais aussi du module de sa vitesse.

Examinons maintenant l'erreur que l'on peut faire, lorsqu'on détermine la position d'un mobile sur la sphère S à l'aide du système

de navigation par inertie décrit au cours du présent paragraphe. Supposons qu'une imprécision a été admise dans l'orientation initiale de la plate-forme, ainsi que dans l'introduction des paramètres b_x et b_y dans le calculateur. Il en résulte que, dans le cas général, toutes les conditions initiales

$$\alpha(0)=\alpha_0, \quad \beta(0)=\beta_0, \quad \gamma(0)=\gamma_0, \quad \left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_{t=0}=\dot{\alpha}_0, \quad \left.\frac{d\beta}{dt}\right|_{t=0}=\dot{\beta}_0. \tag{5.3.43}$$

ou bien quelques-unes (au moins une) d'entre elles sont différentes de zéro. Ce sont précisément ces valeurs non nulles qui déterminent dans le cas considéré le mouvement perturbé de la plate-forme.

Admettons que la centrale à inertie, elle, fonctionne d'une façon irréprochable. En particulier, ses calculateurs reçoivent à leurs entrées les valeurs courantes vraies des projections $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$, $\omega_z(t)$ sur les axes x, y, z de la vitesse angulaire du système de coordonnées xyz, lié à la plate-forme, par rapport à la sphère non tournante S (ou, ce qui revient au même, par rapport à un système non tournant $\xi^s\eta^s\zeta^s$). Par suite du fonctionnement de la centrale à inertie, on connaît, sous forme de paramètres appropriés, la rotation finie vraie du système de coordonnées xyz de sa position initiale qu'il occupait à l'instant $t = 0$ dans une autre position correspondant à un instant $t = t_1$.

Si toutes les valeurs qui caractérisent les conditions initiales (5.3.43) du système d'équations différentielles (5.3.28) et (5.3.29) de la centrale à inertie sont nulles, on a à tout instant

$$\alpha = \beta = \gamma = 0, \tag{5.3.44}$$

et le mouvement de la plate-forme s'avère non perturbé. Dans ce cas, la rotation finie, indiquée par le système de navigation par inertie, permettra en principe de déterminer de façon exacte la position du centre de la plate-forme à l'instant $t = t_1$, si, bien entendu, sa position à l'instant initial $t = 0$ était connue exactement. Dans le cas d'un mouvement perturbé il n'en sera pas ainsi.

Désignons par $\xi_0\eta_0\zeta_0$ la position initiale du système xyz lié à la plate-forme, dans son mouvement non perturbé, et par $x_0y_0z_0$ la position réelle de ce système à l'instant $t = 0$. De même, désignons par $\xi_1\eta_1\zeta_1$ la position de ce système à l'instant $t = t_1$, dans le mouvement non perturbé, et par $x_1y_1z_1$ sa position réelle si le mouvement est perturbé.

La rotation finie de la position $\xi_0\eta_0\zeta_0$ dans la position $x_0y_0z_0$ peut se déterminer par les angles d'Euler-Krylov α_0, β_0, γ_0 et de la position $\xi_1\eta_1\zeta_1$ dans la position $x_1y_1z_1$ par des angles analogues α_1, β_1, γ_1. Désignons ces rotations respectivement par $D(0)$ et $D(t_1)$, de même que dans le paragraphe précédent où nous avons

étudié les questions de caractère analogue. L'orientation prise par la plate-forme à l'instant $t = t_1$ par suite de son mouvement non perturbé détermine entièrement la position de son centre sur la sphère S et sa position par rapport aux points cardinaux. A son tour, la recherche de l'orientation de la plate-forme se ramène à la détermination de la position du système de coordonnées $\xi_1\eta_1\zeta_1$. A cet effet, il suffit de trouver la rotation finie G s'effectuant de la position $\xi_0\eta_0\zeta_0$ dans la position $\xi_1\eta_1\zeta_1$. Or, d'après ce qui précède, le système de navigation par inertie ne peut indiquer exactement que la rotation finie G^* effectuée de la position $x_0y_0z_0$ dans la position $x_1y_1z_1$. Le problème de la détermination de l'erreur faite sur la position du centre de la plate-forme se réduit ainsi à la recherche de la rotation finie G. Pour résoudre ce problème, remarquons que le passage de la position $\xi_0\eta_0\zeta_0$ dans la position $x_1y_1z_1$ peut se faire par deux procédés. Premièrement, par le passage de $\xi_0\eta_0\zeta_0$ dans $x_0y_0z_0$ au moyen de la rotation finie D (0) sus-mentionnée et ensuite de $x_0y_0z_0$ dans $x_1y_1z_1$ au moyen de la rotation G^*. Deuxièmement, d'abord par le passage de la position $\xi_0\eta_0\zeta_0$ dans $\xi_1\eta_1\zeta_1$ au moyen de la rotation finie G et ensuite de $\xi_1\eta_1\zeta_1$ dans $x_1y_1z_1$ au moyen de la rotation D (t_1). Toutes ces rotations sont illustrées par le schéma suivant

$$\begin{array}{ccc} \xi_0\eta_0\zeta_0 & \xrightarrow{G} & \xi_1\eta_1\zeta_1 \\ D(0)\downarrow & & \downarrow D(t_1) \\ x_0y_0z_0 & \xrightarrow[G^*]{} & x_1y_1z_1 \end{array} \qquad (5.3.45)$$

Comme il a été établi au chap. III, § 7 du tome I, les matrices $D(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ et $D(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ correspondant aux rotations finies D (0) et D (t_1) ont la forme suivante :

$$D(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0) = C(\gamma_0) B(\beta_0) A(\alpha_0), \qquad (5.3.46)$$

$$D(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = C(\gamma_1) B(\beta_1) A(\alpha_1), \qquad (5.3.47)$$

où $A(\alpha)$, $B(\beta)$ et $C(\gamma)$ sont les matrices des rotations finies les plus simples du trièdre abc, s'effectuant des angles α, β et γ respectivement autour des arêtes a, b et c.

L'équivalence des suites de rotations D (0), G^* et G, D (t_1) peut donc se représenter par l'égalité matricielle

$$G^*D(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0) = D(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) G. \qquad (5.3.48)$$

Ici, par analogie avec ce qui précède, G et G^* désignent les matrices correspondant à des rotations finies de même nom.

Compte tenu de ce qui a été établi au même § 7, chap. III du premier tome, il n'est pas difficile d'obtenir, à partir de cette égalité matricielle, une expression explicite pour la matrice G. On a

$$G = D^{-1}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) G^*D(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0). \qquad (5.3.49)$$

Ici, $D^{-1}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ est la matrice inverse de $D(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, c'est-à-dire une matrice telle que

$$D^{-1}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)\, D(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = E, \qquad (5.3.50)$$

où E est la matrice unité.

Il est aisé de s'assurer, en tenant compte des propriétés des matrices $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ (v. de nouveau tome I, chap. III, § 7), que

$$D^{-1}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = A(-\alpha_1)\, B(-\beta_1)\, C(-\gamma_1)\ ^{1)}. \qquad (5.3.51)$$

Ainsi, d'après les formules (5.3.46), (5.3.51) et (5.3.49), on a

$$G = A(-\alpha_1)\, B(-\beta_1)\, C(-\gamma_1)\, G^* C(\gamma_0)\, B(\beta_0)\, A(\alpha_0). \qquad (5.3.52)$$

Les calculs concrets que comporte la détermination de la rotation finie G et la recherche ultérieure de l'erreur de position du centre de la plate-forme peuvent être fortement simplifiés si l'on suppose petits les angles α_0, β_0, γ_0, α_1, β_1, γ_1 et l'on néglige leurs produits.

Les raisonnements développés à la fin du présent paragraphe ont un caractère tout à fait général. Ils peuvent être utilisés pour le calcul des erreurs, si la détermination de la position du centre de la plate-forme s'effectue à l'aide de systèmes de navigation par inertie réalisés suivant d'autres schémas.

§ 4. Système de navigation par inertie avec plate-forme à rotation forcée

La plate-forme utilisée dans le système de navigation par inertie que nous avons décrit au paragraphe précédent, était stabilisée en azimut. Sa vitesse angulaire absolue ne possédait pas de composante le long de l'axe vertical, perpendiculaire au plan de la plate-forme. Grâce à cette circonstance, les relations qui lient les indications des mesureurs d'accélération apparente (accéléromètres) aux projections de la vitesse angulaire de la plate-forme sur les directions de leurs axes sensibles étaient particulièrement simples, si bien que ce système de navigation par inertie était dit le plus simple.

La stabilisation de la plate-forme en azimut était assurée par le gyroscope II (v. fig. 117) dont l'axe du boîtier n'était soumis à aucun couple et tournait sans frottement. C'est peut-être pour cette raison que le système de navigation par inertie le plus simple, décrit au paragraphe précédent, a reçu l'appellation conventionnelle de système « *libre en azimut* », à la différence des systèmes dont la plate-forme est, par exemple, orientée suivant les points cardinaux ou d'une autre façon quelconque.

---

[1]) Il est facile de vérifier que la matrice $D^{-1}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ est égale à la matrice transposée ${}^tD(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$.

Le schéma de navigation par inertie qui sera examiné au cours du présent paragraphe ne diffère du schéma le plus simple précédent que par une rotation continue forcée dont est animée la plate-forme stabilisée en azimut. Une telle rotation s'avère utile pour réduire considérablement les erreurs du système à inertie, dues à un fonctionnement imparfait de ses éléments, ainsi qu'aux déséquilibres et au frottement dans les éléments sensibles. Il va sans dire que le dispositif calculateur du système s'en trouve plus compliqué. Il n'y a pas longtemps, on considérait encore que la réalisation d'un système de navigation par inertie, exempt d'erreurs de principe (méthodiques), était en général impossible si ce système n'utilisait que les indications de deux accéléromètres ou leurs intégrales, et sa plate-forme n'était pas stabilisée en azimut.

Pour réaliser la rotation continue sus-mentionnée de la plate-forme stabilisée en azimut, il est nécessaire d'appliquer à l'axe de précession du gyroscope II (fig. 117) un moment donné non nul $L(t)$. Les projections ω_x, ω_y, ω_z de la vitesse angulaire de la plate-forme sur les axes x, y et z du système de coordonnées xyz qui lui est lié s'expriment maintenant, suivant les formules (5.3.3), par

$$\omega_x = -\frac{M_2}{H'}, \quad \omega_y = \frac{M_1}{H'}, \quad \omega_z = -\frac{L}{H''}. \tag{5.4.1}$$

Maintenant, la projection ω_z n'est plus nulle et l'intégration du système d'équations différentielles (5.1.6) devient un peu plus difficile à réaliser.

Dans le cas où le moment mentionné L et, par conséquent, la projection ω_z de la vitesse angulaire de la plate-forme sont différents de zéro, les moments M_1 et M_2 ne peuvent plus être élaborés suivant les mêmes lois que précédemment, c'est-à-dire conformément aux formules (5.3.1) et (5.3.2). Sinon, la stabilisation de la plate-forme à l'horizontale sera troublée. Comme il sera montré plus loin, les moments M_1 et M_2 doivent dans ce cas se définir par la solution du système suivant de deux équations intégrales:

$$\begin{aligned} M_1 &= k\int_0^t a_x(t)\,dt - \frac{1}{kR}\int_0^t M_2L(t)\,dt + kb_x, \\ M_2 &= k\int_0^t a_y(t)\,dt + \frac{1}{kR}\int_0^t M_1L(t)\,dt + kb_y. \end{aligned} \tag{5.4.2}$$

Ici, $a_x(t)$ et $a_y(t)$ sont les indications des accéléromètres dont les axes sensibles sont orientés parallèlement aux axes respectifs x et y du système de coordonnées xyz rigidement lié à la plate-forme, et les constantes k, b_x et b_y sont choisies de telle sorte que le plan xy puisse rester horizontal lors du mouvement arbitraire de l'origine du

système xyz (du centre de la plate-forme) sur la sphère terrestre. Il se trouve que la constante k figurant dans les équations (5.4.2) doit être liée à la valeur du moment cinétique propre H' et au rayon R de la Terre par la relation

$$\frac{kR}{H'} = 1, \tag{5.4.3}$$

qui est tout à fait analogue à la condition (5.3.19) du paragraphe précédent. A leur tour, comme au paragraphe précédent, les constantes b_x et b_y doivent vérifier les égalités

$$b_x = v_x(0), \quad b_y = v_y(0), \tag{5.4.4}$$

où $v_x(0)$ et $v_y(0)$ sont les valeurs des projections, sur les axes x et y, de la vitesse « absolue » (c'est-à-dire, rapportée à la sphère non tournante S, concentrique à la sphère terrestre) du centre de la plate-forme à l'instant initial $t = 0$. Ces égalités se sont déjà rencontrées lors de l'étude du système avec plate-forme libre en azimut.

Montrons que les moments M_1 et M_2 qui représentent la solution du système d'équations intégrales (5.4.2) assurent effectivement la stabilisation de la plate-forme dans le plan de l'horizon.

Considérons le cas où la plate-forme est animée d'un mouvement pendant lequel l'origine du système de coordonnées xyz (c'est-à-dire, le centre de la plate-forme) se déplace sur la sphère terrestre, et le plan xy est tangent à cette sphère. Dans un tel mouvement, les projections v_x et v_y de la vitesse de l'origine des coordonnées par rapport à la sphère non tournante S de rayon R, entourant la Terre, sont liées aux projections ω_x et ω_y de la vitesse angulaire $\bar{\omega}$ du système xyz par les mêmes relations (5.3.7), à un changement des désignations près, que dans le paragraphe précédent (v. aussi chap. I, § 2 du présent livre), à savoir

$$v_x = R\omega_y, \quad v_y = -R\omega_x. \tag{5.4.5}$$

Ceci étant, on a, bien entendu, $v_z = 0$. A leur tour, les projections de l'accélération de l'origine des coordonnées sur les axes x et y s'expriment par les formules

$$w_x = \frac{dv_x}{dt} - \omega_z v_y, \quad w_y = \frac{dv_y}{dt} + \omega_z v_x. \tag{5.4.6}$$

Ici, ω_z est la projection, non nulle dans le cas général, de la vitesse angulaire du système de coordonnées xyz sur l'axe z ou, ce qui revient au même, sur le prolongement du rayon de la sphère terrestre, mené par le centre de la plate-forme stabilisée. Dans ce cas, la donnée des variables ω_x, ω_y, ω_z (ou, si l'on veut, de v_x, v_y, ω_z) en tant que fonctions du temps détermine entièrement le mouvement de la plate-forme sur la sphère S (si sa position initiale est connue). Com-

me le plan xy est horizontal ou, plus exactement, perpendiculaire à la verticale géocentrique, c'est-à-dire au rayon de la Terre, les projections j_x et j_y de l'accélération de la gravitation sur les axes x et y sont nulles. Il s'ensuit que les projections a_x et a_y de l'accélération apparente sont dans ce cas égales aux projections w_x et w_y de l'accélération vraie. Ainsi, on a

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} - \omega_z v_y, \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} + \omega_z v_x. \tag{5.4.7}$$

Les projections de l'accélération apparente étant mesurées par les accéléromètres, on doit les considérer, lors de la résolution du problème de navigation par inertie, elles, ou dans certains cas, leurs intégrales, c'est-à-dire les projections de la *vitesse apparente* :

$$\tilde{V}_x(t) = \int_0^t a_x(t)\,dt, \quad \tilde{V}_y(t) = \int_0^t a_y(t)\,dt, \tag{5.4.8}$$

comme fonctions du temps données. Les égalités (5.4.7) peuvent donc être considérées comme un système de deux équations différentielles par rapport aux variables cherchées $v_x(t)$ et $v_y(t)$, dans lesquelles les fonctions $a_x(t)$, $a_y(t)$ et $\omega_z(t)$ sont données. En effectuant sur ces équations l'opération de compression (v. chap II, § 1 du présent livre), on obtient une seule équation différentielle du premier ordre

$$\frac{d}{dt}(v_x + iv_y) + i\omega_z(t)(v_x + iv_y) = a_x(t) + ia_y(t) \tag{5.4.9}$$

par rapport à la fonction du temps à valeurs complexes $v_x + iv_y$. La solution de cette équation est de la forme

$$v_x + iv_y = (v_x^0 + iv_y^0)\,e^{-i\chi(t)} + e^{-i\chi(t)} \int_0^t e^{i\chi(t)}\,[a_x(t) + ia_y(t)]\,dt. \tag{5.4.10}$$

Ici,

$$v_x^0 = v_x(0), \quad v_y^0 = v_y(0) \tag{5.4.11}$$

sont les valeurs des projections $v_x(t)$ et $v_y(t)$ de la vitesse du centre de la plate-forme sur les axes x et y à l'instant initial $t = 0$, et

$$\chi(t) = \int_0^t \omega_z(t)\,dt \tag{5.4.12}$$

est la fonction du temps, qui doit être considérée comme connue.

Connaissant maintenant les valeurs courantes des fonctions $v_x(t)$ et $v_y(t)$, on peut trouver, à l'aide des égalités (5.4.5), les projections $\omega_x(t)$ et $\omega_y(t)$ de la vitesse angulaire de la plate-forme sur les mêmes axes x et y. Puis, en utilisant les deux premières for-

mules (5.4.1), il n'est pas difficile de déterminer les valeurs des moments $M_1 = M_1(t)$ et $M_2 = M_2(t)$ qu'il faut appliquer au premier gyroscope de la plate-forme pour qu'elle reste au cours de son mouvement dans le plan de l'horizon local.

Remarquons que pour rechercher les inconnues v_x et v_y à partir des fonctions connues $a_x(t)$, $a_y(t)$, $\omega_z(t)$, on peut résoudre, au lieu des équations différentielles (5.4.7), les équations intégrales

$$\begin{aligned} \int_0^t a_x(t)\,dt &= v_x - v_x(0) - \int_0^t v_y\omega_z(t)\,dt, \\ \int_0^t a_y(t)\,dt &= v_y - v_y(0) + \int_0^t v_x\omega_z(t)\,dt. \end{aligned} \qquad (5.4.13)$$

Ces dernières s'obtiennent par l'intégration des premiers et des seconds membres des équations (5.4.7) par rapport au temps, dans les

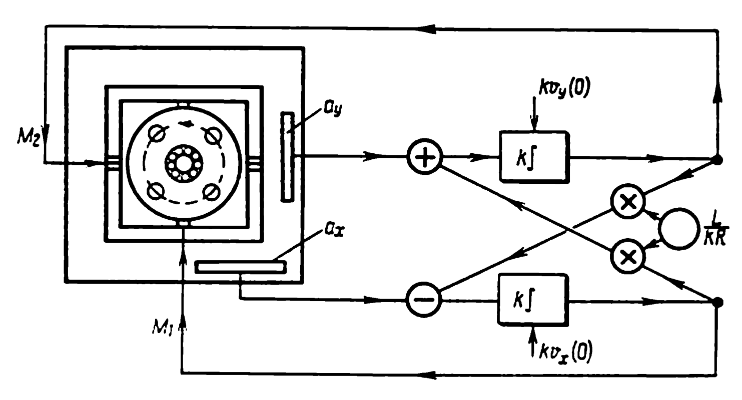


Fig. 123

limites de zéro à l'instant courant t. Exprimons dans ces équations intégrales les fonctions v_x et v_y par ω_y et ω_x, conformément aux égalités (5.4.5), et puis exprimons ω_x, ω_y et ω_z par l'intermédiaire des moments M_1, M_2 et L suivant les formules (5.4.1). Tenons compte ensuite des relations (5.4.3) et (5.4.4). Nous obtiendrons finalement les équations intégrales (5.4.2) indiquées plus haut. Dans ces équations, les fonctions du temps, c'est-à-dire les moments M_1 et M_2 sont des inconnues, alors que les intégrales des valeurs courantes des projections $a_x(t)$, $a_y(t)$ de l'accélération apparente et le moment $L(t)$ qui produit la composante verticale $\omega_z(t)$ de la vitesse angulaire de la plate-forme sont des fonctions du temps t connues ou données. La fig. 123 montre un organigramme possible du calculateur qui permet d'obtenir les valeurs courantes des moments M_1 et M_2 satisfaisant au système d'équations intégrales (5.4.2).

Signalons avant de clore ce paragraphe que la solution (5.4.10) de l'équation différentielle (5.4.9), obtenue par intégration par parties, peut être représentée sous la forme

$$v_x + iv_y = [v_x(0) + iv_y(0)] \exp[-i\chi(t)] + \int_0^t [a_x(t) + ia_y(t)]\, dt -$$

$$-\exp[-i\chi(t)] \int_0^t \left\{ i\omega_z(t) \exp[i\chi(t)] \int_0^t [a_x(t) + ia_y(t)]\, dt \right\} dt. \quad (5.4.14)$$

Ici, les projections cherchées v_x et v_y de la vitesse « absolue » du centre de la plate-forme sont exprimées par les intégrales par rapport au temps des projections a_x et a_y des accélérations apparentes, ce qui est dans certains cas préférable.

Ainsi, on voit qu'en plus de la solution exposée précédemment, il existe une autre solution du problème de navigation par inertie sur la sphère terrestre, avec une valeur donnée non nulle de la projection ω_z de la vitesse angulaire de la plate-forme sur la normale à cette dernière.

En faisant usage des formules (5.4.1) et (5.4.5) et en posant dans l'égalité (5.4.12) $\omega_z(t) = \text{const}$, on obtient, en particulier, les formules suivantes pour les moments cherchés M_1 et M_2:

$$M_1 = k\tilde{V}_x(t) - k\omega_z \int_0^t [\tilde{V}_x(\tau) \sin \omega_z(t-\tau) - \tilde{V}_y(\tau) \cos \omega_z(t-\tau)]\, d\tau +$$

$$+ k[v_x(0) \cos \omega_z t + v_y(0) \sin \omega_z t], \quad (5.4.15)$$

$$M_2 = k\tilde{V}_y(t) - k\omega_z \int_0^t [\tilde{V}_x(\tau) \cos \omega_z(t-\tau) +$$

$$+ \tilde{V}_y(\tau) \sin \omega_z(t-\tau)]\, d\tau - k[v_x(0) \sin \omega_z t - v_y(0) \cos \omega_z t].$$

Ici, $\tilde{V}_x(t)$ et $\tilde{V}_y(t)$ sont les fonctions définies par les formules (5.4.8).

§ 5. Systèmes de navigation par inertie du type à gyrocompas

Le paragraphe actuel examine deux schémas de navigation par inertie qui diffèrent par la composition de leurs éléments sensibles, mais qui en même temps, sont assez proches l'un de l'autre tant par le caractère de leur comportement que par la description mathématique. D'après la disposition des gyroscopes et des accéléromètres sur la plate-forme stabilisée, le premier d'entre eux ne diffère que très peu du schéma de navigation par inertie le plus simple, décrit au § 3

du présent chapitre. La particularité consiste en ce que la vitesse angulaire de rotation propre d'un de ses gyroscopes est variable. Dans le deuxième schéma, on utilise un compas gyroscopique spatial (v. plus haut chap. II, § 6). Son élément sensible, la gyrosphère, est complété dans ce cas par un accéléromètre.

Nous allons restreindre l'analyse des deux systèmes de navigation par inertie, correspondant à ces schémas, à l'établissement des conditions de leur fonctionnement dit idéal, caractérisé, en particulier, par ce que la normale à la plate-forme et le diamètre vertical de la gyrosphère passent constamment par le centre de la Terre, quel que soit le déplacement du mobile sur la sphère terrestre.

Les questions concernant la stabilité et les petites oscillations de la plate-forme stabilisée et de la gyrosphère autour de leur mouvement non perturbé, lors du fonctionnement parfait des systèmes, n'y sont pas étudiées parce qu'elles sont analogues aux mêmes questions que nous avons examinées au § 3 du présent chapitre relativement au schéma de navigation par inertie le plus simple.

Passons à l'examen du premier des schémas mentionnés au début de ce paragraphe. Il ne diffère du schéma de navigation par inertie le plus simple, décrit au § 3 du présent chapitre (v. fig. 117), que sur les points suivants. Le moment M_2 appliqué au boîtier du gyroscope I est absent ; le moment M_1 qui s'exerce sur l'anneau de cardan extérieur du même gyroscope I reste sans modifications et s'exprime comme précédemment par la formule (5.3.2) ; la vitesse angulaire et, par conséquent, le moment cinétique propre H'' du gyroscope II varient proportionnellement à la valeur courante de la fonction $F_x(t)$ définie par la première des formules (5.3.1). Enfin, le moment L appliqué au boîtier du gyroscope II (auparavant de valeur nulle) devient maintenant proportionnel à l'indication courante a_y de celui des accéléromètres dont l'axe sensible est dirigé suivant l'axe y (v. fig. 117 et 118). D'après les deux premières formules (5.3.3) établies au § 3 du présent chapitre (v. aussi fig. 118), on a maintenant

$$\omega_x = -\frac{M_2}{H'} = 0, \tag{5.5.1}$$

$$\omega_y = \frac{M_1}{H'} = \frac{kF_x(t)}{H'}, \tag{5.5.2}$$

où $F_x(t)$ est la fonction définie par la première des égalités (5.3.1).

D'après ce qui vient d'être exposé, dans la dernière formule (5.3.3) du même paragraphe (v. aussi fig. 119) il convient maintenant de poser

$$L = la_y(t) \tag{5.5.3}$$

et

$$H'' = hF_x(t), \tag{5.5.4}$$

où l et h sont des facteurs constants dont la valeur sera déterminée plus loin. Finalement, on obtient

$$\omega_z = -\frac{la_y(t)}{hF_x(t)}. \quad (5.5.5)$$

Montrons que les facteurs k, l, h et la constante b_x intervenant dans l'expression de la fonction $F_x(t)$ peuvent être choisis de telle sorte que le système de coordonnées xyz effectue le mouvement idéal

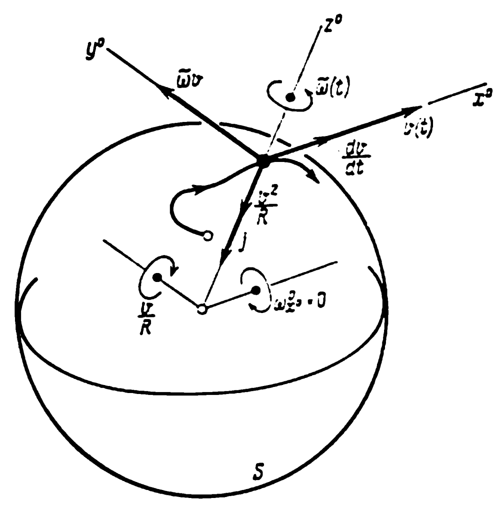


Fig. 124

mentionné plus haut, c'est-à-dire un mouvement au cours duquel le plan de coordonnées xy soit constamment tangent à la sphère S et l'axe z passe par le centre de cette sphère.

Introduisons un trièdre naturel de Darboux $x^0y^0z^0$ (v. chap. II, § 4 du présent tome) dont le sommet se déplace sur la sphère S en se confondant constamment avec le centre de la plate-forme (fig. 124), et le plan x^0y^0 est tangent à cette sphère. Supposons qu'à tout instant, son arête x^0 est dirigée le long du vecteur vitesse $\bar{v}$ du sommet et donc est tangente à la courbe sphérique décrite par ce sommet. Les projections de la vitesse du sommet du trièdre $x^0y^0z^0$ sur ses arêtes (v. le même paragraphe du chap. II) sont données par les égalités évidentes

$$v_{x^0} = v(t), \quad v_{y^0} = 0, \quad v_{z^0} = 0, \quad (5.5.6)$$

et les projections de la vitesse angulaire du trièdre sur ses arêtes, par les formules

$$\omega^0_{x^0} = 0, \quad \omega^0_{y^0} = \frac{v}{R}, \quad \omega^0_{z^0} = \tilde{\omega}(t), \quad (5.5.7)$$

où $\tilde{\omega}(t)$ est, comme précédemment, la composante de la vitesse angulaire $\bar{\omega}^0$ du trièdre, le long de l'arête z^0 dirigée perpendiculairement à la surface de la sphère S (v. fig. 124).

En faisant usage de ce qui a été établi aux paragraphes mentionnés (v. chap. II, §§ 4 et 6 de ce tome), indiquons encore les formules pour les projections w_{x^0}, w_{y^0} et w_{z^0} de l'accélération $\bar{w}$ du sommet du trièdre naturel de Darboux sur ses arêtes x^0, y^0 et z^0. Ce sont

$$w_{x^0}=\frac{dv}{dt},\quad w_{y^0}=\tilde{\omega}v,\quad w_{z^0}=-\frac{v^2}{R}. \tag{5.5.8}$$

Comme il a déjà été indiqué au chap. II, § 6 du présent livre, si l'on connaît la trajectoire de mouvement du centre de la plate-forme (et donc du sommet du trièdre) sur la sphère S et la loi du mouvement sur cette sphère, on peut déterminer les fonctions $v(t)$ et $\tilde{\omega}(t)$ et par là même, d'après les formules (5.5.7), les projections de la vitesse angulaire $\bar{\omega}^0$ sur les arêtes du trièdre. Remarquons encore qu'on a l'égalité

$$\tilde{\omega}(t)=\frac{v(t)}{\rho_g}, \tag{5.5.9}$$

où ρ_g est la valeur courante du rayon de courbure géodésique de la courbe sphérique. On entend par ce dernier le rayon de courbure d'une courbe plane, obtenue par projection orthogonale de la courbe sphérique sur un plan tangent à la sphère S. Le point de tangence est représenté dans ce cas par la position courante du centre de la plate-forme et le rayon de courbure ρ_g est déterminé pour le point de la courbe plane, qui se confond avec le point de tangence. Remarquons également que si les deux fonctions $v(t)$ et $\tilde{\omega}(t)$ sont données, on peut trouver une courbe sphérique sur laquelle se déplace le centre de la plate-forme, cette courbe n'étant déterminée qu'à son déplacement arbitraire, en tant que corps solide, sur la sphère près, c'est-à-dire sans tenir compte de la flexion et de la torsion supplémentaires.

Recherchons maintenant les conditions à réaliser pour que le mouvement du système de coordonnées xyz lié à la plate-forme stabilisée soit exactement le même que celui du trièdre naturel de Darboux $x^0y^0z^0$. Il est évident qu'à l'instant initial $t = 0$, les axes x, y, z et les arêtes x^0, y^0, z^0 doivent se confondre respectivement et qu'à des instants suivants, le vecteur vitesse angulaire $\bar{\omega}$ du système xyz doit être égal au vecteur vitesse angulaire $\bar{\omega}^0$ du trièdre $x^0y^0z^0$, c'est-à-dire que les égalités

$$\omega_x=\omega^0_{x^0},\quad \omega_y=\omega^0_{y^0},\quad \omega_z=\omega^0_{z^0} \tag{5.5.10}$$

doivent être vérifiées identiquement. En vertu de l'égalité (5.5.1) et d'une des expressions (5.5.7), la première de ces égalités est tou-

jours vraie. Quant à la deuxième et à la troisième égalité (5.5.10), elles se ramènent, compte tenu des formules (5.5.2), (5.5.5) et de deux autres expressions (5.5.7), à la forme

$$\frac{kF_x(t)}{H'} = \frac{v(t)}{R} \qquad (5.5.11)$$

et

$$-\frac{la_y(t)}{hF_x(t)} = \tilde{\omega}(t). \qquad (5.5.12)$$

Ces relations doivent être satisfaites identiquement, quelles que soient les fonctions $v(t)$ et $\tilde{\omega}(t)$ correspondant au mouvement arbitraire du centre de la plate-forme sur la sphère S. Cherchons les conditions dans lesquelles ceci a lieu. Lorsque les axes x, y, z sont confondus avec les arêtes x^0, y^0, z^0, les projections de l'accélération $\bar{w}$ du centre de la plate-forme sur les axes x, y, z ont, suivant les formules (5.5.8), pour valeurs respectives

$$w_x = \frac{dv}{dt}, \quad w_y = \tilde{\omega}v, \quad w_z = -\frac{v^2}{R}. \qquad (5.5.13)$$

De plus, les projections j_x et j_y de l'accélération de la gravitation terrestre sur les axes x et y sont nulles, parce que l'accélération $\bar{j}$ elle-même est dirigée vers le centre de la Terre, c'est-à-dire, dans le cas considéré, le long de la partie négative de l'arête z^0. D'après ce qui a été établi au chap. IV, § 1 du présent livre, on peut, en utilisant les formules (5.5.13), obtenir pour les indications a_x et a_y des accéléromètres dont les axes sensibles sont dirigés le long des axes x et y, les expressions suivantes:

$$a_x = w_x - j_x = \frac{dv}{dt}, \quad a_y = w_y - j_y = \tilde{\omega}v. \qquad (5.5.14)$$

En portant la valeur de a_x dans l'expression (5.3.1) obtenue au § 3 du présent chapitre pour la fonction $F_x(t)$, on a

$$F_x(t) = \int_0^t a_x(t)\,dt + b_x = v(t) - v(0) + b_x, \qquad (5.5.15)$$

où $v(0)$ est la valeur de la vitesse de déplacement du centre de la plate-forme sur la sphère S, à l'instant initial $t = 0$.

Le choix de la constante b_x dans le calculateur qui élabore les valeurs courantes de la fonction $F_x(t)$ étant libre, posons

$$b_x = v(0). \qquad (5.5.16)$$

Il en résulte que la fonction $F_x(t)$ devient numériquement égale à la vitesse $v(t)$ du centre de la plate-forme, c'est-à-dire que

$$F_x(t) = v(t). \qquad (5.5.17)$$

La relation (5.5.11) prend maintenant la forme suivante:

$$\frac{kv(t)}{H'}=\frac{v(t)}{R}. \qquad (5.5.18)$$

Elle se transforme en identité si le facteur k est choisi égal à

$$k=\frac{H'}{R}. \qquad (5.5.19)$$

Notons que la dernière égalité coïncide avec la condition (5.3.19) établie au § 3 du présent chapitre.

Introduisons dans la relation (5.5.12) les expressions des fonctions $a_y(t)$ et $F_x(t)$ tirées respectivement de la deuxième formule (5.5.14) et de l'égalité (5.5.17). Elle prend la forme suivante:

$$-\frac{l\tilde{\omega}(t)\,v(t)}{hv(t)}=\tilde{\omega}(t). \qquad (5.5.20)$$

Cette relation se transforme à son tour en identité si les facteurs l et h sont égaux, au signe près, l'un à l'autre, c'est-à-dire si

$$l=-h. \qquad (5.5.21)$$

Ainsi, toutes les conditions nécessaires pour que les égalités (5.5.10) se transforment en identités sont remplies. Par conséquent, le système de coordonnées xyz lié à la plate-forme doit être animé d'un mouvement tel que son axe z passe invariablement par le centre de la sphère S et son axe x est dirigé le long du vecteur vitesse de l'origine de ce système. Les projections de la vitesse angulaire du système de coordonnées xyz sur ses propres axes, c'est-à-dire les fonctions $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$ et $\omega_z(t)$ sont maintenant entièrement déterminées par l'intermédiaire des valeurs de $a_x(t)$ et $a_y(t)$ mesurées à bord du mobile. A savoir, en vertu des égalités (5.5.10), (5.5.7), (5.5.12), (5.5.21) et (5.5.17), on a

$$\omega_x(t)=0, \quad \omega_y(t)=\frac{v(t)}{R}, \quad \omega_z(t)=\frac{a_y(t)}{v(t)}. \qquad (5.5.22)$$

Pour pouvoir former la fonction $\omega_z(t)$, on doit prévoir dans le schéma du système de navigation par inertie que nous considérons, la possibilité de réaliser de façon continue l'opération de division de la valeur courante de $a_y(t)$ de l'accéléromètre dont l'axe sensible est dirigé suivant l'axe y, par la valeur courante de $v(t)$ de la vitesse du centre de la plate-forme par rapport à la sphère non tournante S.

Connaissant les fonctions $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$, $\omega_z(t)$, on peut résoudre, par rapport aux fonctions cherchées $\lambda(t)$, $\varphi(t)$ et $\varkappa(t)$, le système d'équations différentielles (5.1.3) établi au § 1 du présent chapitre

et qui prend maintenant la forme suivante:

$$
\begin{aligned}
-\frac{d\varphi}{dt}\cos\varkappa-\left(U+\frac{d\lambda}{dt}\right)\cos\varphi\sin\varkappa &= 0,\\
-\frac{d\varphi}{dt}\sin\varkappa+\left(U+\frac{d\lambda}{dt}\right)\cos\varphi\cos\varkappa &= \frac{v(t)}{R},\\
-\frac{d\varkappa}{dt}+\left(U+\frac{d\lambda}{dt}\right)\sin\varphi &= \frac{a_y(t)}{v(t)}.
\end{aligned}
\tag{5.5.23}
$$

En résolvant ces équations par rapport aux dérivées $d\lambda/dt$, $d\varphi/dt$ et $d\varkappa/dt$, on obtient un système modifié suivant:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{v(t)}{R}\sin\varkappa,\\
\frac{d\lambda}{dt} &= \frac{v(t)\cos\varkappa}{R\cos\varphi}-U,\\
\frac{d\varkappa}{dt} &= \frac{v(t)\cos\varkappa}{R}\operatorname{tg}\varphi-\frac{a_y(t)}{v(t)}.
\end{aligned}
\tag{5.5.24}
$$

La première et la troisième de ces équations ne font pas intervenir la fonction cherchée $\lambda(t)$ et peuvent donc s'intégrer indépendamment de la deuxième équation. La recherche ultérieure de la fonction $\lambda(t)$, c'est-à-dire de la longitude courante du centre de la plate-forme stabilisée à bord du mobile, se ramène, suivant la deuxième des équations (5.5.24), à une simple quadrature.

Il a été indiqué au début de ce paragraphe, quels devaient être les moments M_1 et M_2 exercés sur l'anneau extérieur et le boîtier du gyroscope I, et le moment L appliqué au boîtier du gyroscope II, pour que le système de navigation par inertie fonctionne de façon parfaite (coïncidence des axes du système de coordonnées xyz lié à la plate-forme avec les arêtes du trièdre naturel de Darboux $x^0y^0z^0$). En partant des égalités (5.5.1), (5.5.2) et (5.5.3) et en tenant compte de la deuxième formule (5.5.14), ainsi que de la relation (5.5.17), on peut conclure que les moments énumérés ci-dessus doivent être produits conformément aux égalités

$$
M_1 = kF_x(t) = kv(t), \quad M_2 = 0, \quad L = la_y = l\tilde{\omega}(t)\,v(t). \tag{5.5.25}
$$

En outre, proposons-nous de déterminer la valeur du moment K appliqué à l'anneau de cardan extérieur du gyroscope II. La précession qu'il provoque doit amener continuellement l'axe de rotation propre du rotor de ce gyroscope dans une position où il se trouve parallèle à la plate-forme, c'est-à-dire au plan xy. Par conséquent, la projection de la vitesse angulaire du boîtier du gyroscope II sur l'axe x doit être égale à la projection sur le même axe de la vitesse angulaire de la plate-forme qui suit le boîtier du gyroscope I. D'après les

égalités (5.5.1) la dernière projection est nulle, tandis que la première projection est liée à la valeur du moment K, conformément aux lois du mouvement de précession du gyroscope II (v. fig. 119), par l'égalité

$$H''\omega_x = K. \tag{5.5.26}$$

De ce qui précède, on pourrait conclure que dans le cas d'une réalisation parfaite des éléments du système de navigation par inertie et de son fonctionnement idéal, le dispositif servant à produire le moment K peut être éliminé. Néanmoins, pour amener l'axe de rotation propre du gyroscope II dans une position parallèle au plan xy, il faut tout de même qu'un tel dispositif soit prévu. On peut, en particulier, exiger que le moment K soit régi par une loi suivante :

$$K = -c\beta. \tag{5.5.27}$$

Ici, β est l'angle inclus entre l'axe de rotation propre du gyroscope II et la perpendiculaire au plan de son anneau extérieur ; c est un facteur de proportionnalité qui doit avoir une valeur suffisamment grande pour qu'on puisse réaliser, sans compromettre la stabilité du système gyroscopique, une correction dite forte qui rend négligeable la valeur de l'angle β.

Passons maintenant à l'examen du deuxième schéma de navigation par inertie qui a été mentionné au début de ce paragraphe. Remarquons tout d'abord que la vitesse angulaire de la plate-forme stabilisée du système de navigation par inertie que nous venons de décrire (en cas de son fonctionnement idéal) possède, d'après les formules (5.5.7) et les égalités (5.5.10), les projections suivantes sur les axes du système de coordonnées xyz lié à la plate-forme :

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = \frac{v(t)}{R}, \quad \omega_z = \tilde{\omega}(t). \tag{5.5.28}$$

Or, les mêmes formules (2.6.24) ont été obtenues plus haut, au chap. II, § 6, pour les projections de la vitesse angulaire de l'élément sensible, plus exactement, de la gyrosphère d'un compas gyroscopique spatial, sur les axes du système de coordonnées xyz qui lui est lié, si les conditions initiales appropriées du mouvement de la gyrosphère sont réalisées. Dans ce cas, l'axe y du système de coordonnées mentionné est dirigé suivant le vecteur moment cinétique total H des deux gyroscopes identiques de l'élément sensible (v. fig. 77), et l'axe z, parallèle aux axes des boîtiers des gyroscopes, passe par le centre de la gyrosphère, étant orienté vers le haut. D'après ce qui a été établi au même paragraphe, le moment cinétique total H des gyroscopes s'exprime par la formule

$$H = 2B \cos \varepsilon, \tag{5.5.29}$$

où ε est la moitié de l'angle dit de décalage des gyroscopes et B le moment cinétique propre de chacun des gyroscopes pris séparément (v. fig. 79).

Les conditions initiales sus-mentionnées du mouvement de la gyrosphère se résument comme suit. A l'instant initial $t = 0$, les axes x, y et z doivent se confondre avec les axes du trièdre naturel de Darboux $x^0y^0z^0$, c'est-à-dire que l'axe x doit être dirigé suivant le vecteur vitesse $\bar{v}$ du centre de la gyrosphère, par rapport à la sphère non tournante S, et la partie négative de l'axe z doit passer par le centre de la Terre. De plus, au même instant initial $t = 0$, les gyroscopes doivent être décalés, l'un par rapport à l'autre, d'un angle $2\varepsilon(0)$ tel que la quantité $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$ soit une racine de l'équation trigonométrique

$$2B \cos \varepsilon_0 = mlv\,(0). \tag{5.5.30}$$

dans laquelle $v\,(0)$ est la valeur de la vitesse du centre de la gyrosphère à l'instant $t = 0$. On suppose, bien entendu, que $2B > > mlv_{\max}$.

Lorsque les conditions initiales énumérées sont remplies, la valeur courante de l'angle $\varepsilon(t)$ est liée à la valeur courante de la vitesse $v\,(t)$ par l'égalité

$$2B \cos \varepsilon\,(t) = mlv\,(t), \tag{5.5.31}$$

quel que soit le mouvement ultérieur de la gyrosphère sur la surface terrestre. Ceci étant, les axes x et z du système de coordonnées lié à la gyrosphère seront respectivement dirigés suivant le vecteur vitesse $\bar{v}$ et le prolongement du rayon de la Terre. Ainsi, en mesurant dans ce cas, de façon continue, l'angle ε, on peut connaître la valeur courante de la vitesse v du centre de la gyrosphère dans son mouvement par rapport à la sphère non tournante S. Par conséquent, en vertu des formules (5.5.28), on détermine, en plus de la projection ω_x égale à zéro, la projection ω_y de la vitesse angulaire du système de coordonnées xyz par rapport à la sphère S ou, ce qui revient au même, par rapport au système de coordonnées non tournant $\xi^s\eta^s\zeta^s$.

Ce qui vient d'être exposé montre qu'il y a une analogie parfaite entre les équations du mouvement de l'élément sensible du compas gyroscopique spatial et celles de la plate-forme stabilisée du système de navigation décrit au début de présent paragraphe. En effet, dans le cas où les conditions initiales sus-indiquées sont réalisées, le système de coordonnées xyz lié à la gyrosphère se meut exactement de la même façon que le système de coordonnées de même nom lié à la plate-forme stabilisée, si sont remplies à leur tour les conditions nécessaires énumérées plus haut. En outre, le moment cinétique propre H'' du gyroscope II porté par la plate-forme stabilisée varie, comme le montrent la relation (5.5.4) et l'égalité (5.5.17), suivant

la loi

$$H'' = hF_x(t) = hv(t), \qquad (5.5.32)$$

c'est-à-dire proportionnellement à la valeur courante de la vitesse de mouvement du centre de la suspension sur la sphère S. Il en est exactement de même pour la valeur du moment cinétique propre de la gyrosphère, qui varie, en vertu des égalités (5.5.29) et (5.5.31), lui aussi, proportionnellement à $v(t)$, soit

$$H = mlv(t). \qquad (5.5.33)$$

Comme nous l'avons indiqué à de nombreuses occasions, la résolution du problème de navigation par inertie exige que l'on connaisse les valeurs courantes des trois fonctions du temps $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$ et $\omega_z(t)$. Or, l'élément sensible utilisé dans le compas gyroscopique spatial ne permet pas, à lui seul, de déterminer la fonction $\omega_z(t)$. Pour remédier à ce défaut, on peut procéder de même que dans le premier schéma de navigation décrit plus haut, au cours de ce paragraphe. Plaçons sur la plateforme qui suit le mouvement angulaire de la gyrosphère un accéléromètre, en dirigeant son axe sensible suivant l'axe y. Cet accéléromètre peut encore être incorporé dans la gyrosphère elle-même (fig. 125). Dans ce dernier cas, on doit, bien entendu, prendre des mesures pour éviter un déséquilibre de la gyrosphère, dû au déplacement du poids à l'intérieur de l'accéléromètre.

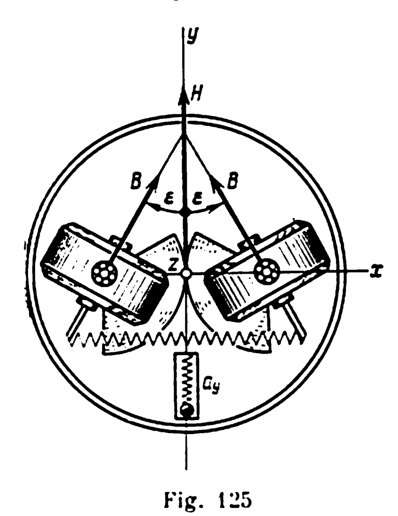


Fig. 125

Supposons que toutes les conditions initiales nécessaires sont réalisées et que le mouvement de la gyrosphère, avec le système de coordonnées xyz qui lui est lié, est exactement le même que celui du trièdre naturel de Darboux $x^0y^0z^0$. Dans un tel mouvement de la gyrosphère, l'axe z est constamment dirigé suivant le prolongement du rayon de la Terre, et la projection de l'accélération de la gravitation terrestre $\bar{j}$ sur l'axe y est nulle. Par suite, d'après la deuxième formule (5.5.14), l'indication de l'accéléromètre aura pour valeur

$$a_y = \tilde{\omega} v. \qquad (5.5.34)$$

D'autre part, la relation (5.5.31) donne

$$v(t) = \frac{2B\cos\varepsilon(t)}{ml} \qquad (5.5.35)$$

En faisant disparaître la vitesse v dans les deux dernières égalités et en tenant compte de ce que $\omega_z(t) = \tilde{\omega}(t)$, on obtient la formule suivante pour la projection de la vitesse angulaire du système de coordonnées xyz sur l'axe vertical:

$$\omega_z(t) = \frac{mla_y(t)}{2B\cos\varepsilon(t)}. \tag{5.5.36}$$

Pour pouvoir déterminer réellement les fonctions $v(t)$ et $\omega_z(t)$, dans ce deuxième schéma de navigation par inertie, il faut prévoir en plus de l'élément sensible du compas gyroscopique spatial et de l'accéléromètre, encore un calculateur destiné à calculer les valeurs des seconds membres des formules (5.5.35), (5.5.36), à partir des valeurs courantes connues de $a_y(t)$ et $\varepsilon(t)$.

Maintenant, toutes les trois fonctions du temps $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$, $\omega_z(t)$ sont connues à l'aide des formules (5.5.28), (5.5.35) et (5.5.36). Ceci étant acquis, la résolution du problème de navigation par inertie se réduit à l'intégration du système d'équations différentielles (5.1.3) établies au § 1 du présent chapitre. Il n'y a pas de difficulté à montrer que dans ce cas ce système se ramène à une forme analogue à (5.5.24), soit

$$\begin{aligned}
\frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{2B\cos\varepsilon(t)}{Rml}\sin\varkappa,\\
\frac{d\lambda}{dt} &= \frac{2B\cos\varepsilon(t)}{Rml\cos\varphi}\cos\varkappa - U,\\
\frac{d\varkappa}{dt} &= \frac{2B\cos\varepsilon(t)}{Rml}\cos\varkappa\operatorname{tg}\varphi - \frac{mla_y(t)}{2B\cos\varepsilon(t)}.
\end{aligned} \tag{5.5.37}$$

§ 6. Schémas de navigation par inertie sans accéléromètres

Associé à d'autres appareils gyroscopiques, le compas gyroscopique spatial (v. plus haut chap. II, § 6) peut en principe servir de base pour la construction des schémas de navigation par inertie qui n'utilisent aucun accéléromètre en tant qu'élément sensible indépendant. Tout se passe comme si son rôle était confié à l'élément sensible de ce compas, c'est-à-dire à la gyrosphère. Le centre de gravité de cette dernière étant situé au-dessous de son centre géométrique, la propriété « pendulaire » de la gyrosphère, qui en résulte, la rend sensible non seulement à la force de gravitation mais également à tout déplacement non uniforme de son centre sur la surface terrestre. Dans un tel cas, il est commode de rapporter le mouvement de la gyrosphère au système de coordonnées en translation $\xi^*\eta^*\zeta^*$, dont l'origine est au centre de la gyrosphère, et d'introduire les forces d'inertie d'Euler correspondantes (v. chap. I, § 1 du présent livre). L'« action » des forces d'inertie d'Euler provoque un changement d'orientation de la

gyrosphère, ainsi qu'une variation de l'angle 2ε que font entre eux ses gyroscopes. Si le mouvement est stationnaire (v. chap. II, § 6 du présent livre), le diamètre vertical de la gyrosphère suit constamment la direction du rayon de la Terre. Dans ces conditions, la valeur de l'angle ε permet de juger, à l'aide, par exemple, de la formule (5.5.31) du paragraphe précédent, de la valeur de la vitesse « absolue » v du point de suspension de la gyrosphère, c'est-à-dire de sa vitesse par rapport à la sphère non tournante S. Signalons aussi que lors du mouvement stationnaire de la gyrosphère, son diamètre Ouest-Est est dirigé suivant le vecteur vitesse « absolue », et que la projection de la vitesse angulaire de la gyrosphère sur ce diamètre est nulle.

Nous avons déjà examiné au paragraphe précédent un des schémas de navigation par inertie qui utilisait la gyrosphère d'un compas gyroscopique spatial. Au cours du présent paragraphe, seront analysés encore deux schémas qui utilisent également la gyrosphère d'un compas gyroscopique spatial, comme un de leurs éléments sensibles. Dans l'un d'eux, le gyrocompas fonctionne en association avec un gyroscope de direction ou *gyroazimut* et dans l'autre, avec deux tachymètres gyroscopiques. Dans le dernier cas, le gyrocompas peut également être ordinaire, « apériodique », c'est-à-dire non spatial, vu que la connaissance de la valeur de la vitesse « absolue » v n'est pas exigée dans ce cas. Le plan équatorial de l'élément sensible du compas apériodique n'étant pas situé, avec une précision suffisante, dans le plan horizontal, il devient nécessaire de prévoir dans ce schéma un gyrohorizon indépendant.

Pour les deux schémas, de même que pour les schémas du paragraphe précédent, nous n'examinons ici que les conditions de leur fonctionnement idéal.

Ainsi, considérons d'abord le schéma de navigation par inertie qui fait appel à un compas gyroscopique spatial et à un gyroscope de direction. L'élément sensible du gyroazimut ne diffère pas du gyroscope II utilisé dans le système à inertie qui a été examiné au § 3 du présent chapitre (v. fig. 117). Les paliers dans lesquels tourne l'axe de son anneau de cardan extérieur sont montés sur une plateforme spéciale. Cette dernière est stabilisée à l'aide des systèmes d'asservissement, de manière à être constamment parallèle à l'équateur de la gyrosphère ou, ce qui revient au même, au plan xy du système de coordonnées xyz lié à la gyrosphère. Ainsi, l'axe de l'anneau extérieur du gyroazimut est maintenu en permanence dans une position où il est parallèle à l'axe z, c'est-à-dire au diamètre vertical de la gyrosphère. Cet axe est soumis à l'action du moment K dont l'intensité et la direction sont réglées de telle sorte que le vecteur moment cinétique propre H'' du gyroazimut soit constamment parallèle à la plate-forme stabilisée (on assure ainsi une correction dite forte). Aucune force extérieure (sauf les réactions normales dans les

paliers de l'axe du boîtier) n'est appliquée au sous-ensemble mécanique « boîtier — rotor » du gyroscope de direction; le centre de gravité commun au rotor et au boîtier est situé sur l'axe de ce dernier.

Ainsi, la somme L des moments, par rapport à l'axe du boîtier, de toutes les forces agissant sur le sous-ensemble mécanique « boîtier — rotor » est nulle et, d'après la formule (5.3.3) du § 3 du présent chapitre, on a

$$\omega_z'' = -\frac{L}{H''} = 0. \tag{5.6.1}$$

Ici, ω_z'' est la projection, sur l'axe z, de la vitesse angulaire de l'anneau extérieur du gyroazimut. Elle n'est pas égale à la projection

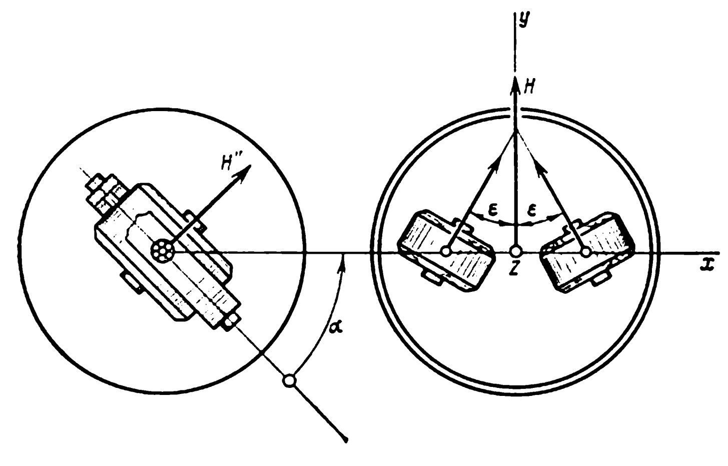


Fig. 126

ω_z sur le même axe de la vitesse angulaire de la plate-forme, parce que dans ce cas la plate-forme suit la gyrosphère et non le gyroazimut, comme c'était dans le paragraphe sus-mentionné.

Désignons par α l'angle formé par l'axe du boîtier du gyroazimut avec l'axe x lié à la gyrosphère (fig. 126). Admettons que $\alpha > 0$, si la gyrosphère est tournée en sens inverse des aiguilles d'une montre par rapport au gyroazimut, à partir de la position dans laquelle $\alpha = 0$. Il est évident que

$$\omega_z = \omega_z'' + \frac{d\alpha}{dt}. \tag{5.6.2}$$

Compte tenu de l'égalité (5.6.1), on a

$$\omega_z = \frac{d\alpha}{dt}. \tag{5.6.3}$$

L'angle α pouvant être mesuré directement, on peut obtenir à l'aide de calculateurs les valeurs courantes de sa dérivée, laquelle se présente alors sous forme d'une fonction du temps. Toutes les trois fonctions $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$ et $\omega_z(t)$ deviennent donc connues. Pour la résolution ultérieure du problème de navigation par inertie, il convient de recourir de nouveau aux équations différentielles (5.1.3) du § 1 du présent chapitre, en y posant

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = \frac{v}{R}, \quad \omega_z = \frac{d\alpha}{dt}. \tag{5.6.4}$$

Après quelques transformations simples, tout à fait analogues à celles effectuées sur les équations (5.5.23), on obtient le système suivant d'équations différentielles :

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{v(t)}{R}\sin\varkappa, \\ \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{v(t)\cos\varkappa}{R\cos\varphi} - U, \\ \frac{d\varkappa}{dt} &= -\frac{d\alpha}{dt} + \frac{v(t)}{R}\cos\varkappa \operatorname{tg}\varphi. \end{aligned} \tag{5.6.5}$$

L'intégration de ces équations achève la résolution du problème de navigation par inertie, c'est-à-dire la détermination des coordonnées cherchées λ et φ du mobile sur la sphère terrestre et de l'azimut $\varkappa$ de la plate-forme stabilisée, relativement au schéma considéré. Dans ce cas, l'angle $\varkappa$ est égal, au signe près, à l'erreur de route ϑ du compas gyroscopique (v. de nouveau chap. II, § 6 du présent livre) et représente un angle formé entre la direction Est et l'axe x lié à l'élément sensible (ou, ce qui revient au même, entre l'axe y, c'est-à-dire le gyronord, et la direction Nord).

Passons maintenant au dernier des schémas de navigation par inertie. Ses éléments sensibles sont représentés par un gyrocompas et deux tachymètres gyroscopiques. Ces derniers sont placés sur une plate-forme qui est stabilisée dans le plan horizontal et suit le mouvement angulaire de la gyrosphère en azimut.

Associons à la plate-forme un système de coordonnées xyz, en dirigeant son axe z verticalement vers le haut et son axe y parallèlement au diamètre Nord-Sud de la gyrosphère, c'est-à-dire suivant la direction du « gyronord ». Son axe x sera alors parallèle à la vitesse « absolue » v du centre de la gyrosphère, lorsque le mobile se déplace sur la sphère terrestre. Ainsi, les axes x, y et z deviennent confondus aux arêtes x^0, y^0 et z^0 du trièdre naturel de Darboux introduit au chap. II, §§ 4 et 6 du présent tome (v. aussi le paragraphe précédent). En vertu des propriétés de ce trièdre, la projection ω_x de la vitesse angulaire du système de coordonnées xyz, sur l'axe x parallèle au vecteur v est nulle. Les deux autres projections, ω_y et ω_z, sont mesurées dans ce schéma de navigation par inertie à l'aide

de tachymètres gyroscopiques. Les axes des boîtiers des tachymètres gyroscopiques peuvent être orientés parallèlement aux axes y et z, tandis que les axes de leurs rotors peuvent être parallèles à l'axe x, lorsque les ressorts reliant les boîtiers à la plate-forme stabilisée ne sont pas contraints. D'après ce qui a été établi au chap. II, § 1 du présent livre, le premier tachymètre gyroscopique pourra mesurer dans ce cas (si les raideurs des ressorts sont suffisamment grandes) la projection de la vitesse angulaire de la plate-forme stabilisée sur l'axe z, et le deuxième tachymètre, la projection de la même vitesse sur l'axe y. C'est ainsi que se trouvent connues toutes les trois projections de la vitesse angulaire de la plate-forme, stabilisée dans le plan de l'horizon local, sur les axes du système de coordonnées xyz qui lui est lié. Après cela, il ne reste qu'à intégrer le système d'équations différentielles du problème principal de navigation par inertie, sous la forme (5.1.7), par exemple. Compte tenu de ce que la fonction $\omega_x(t)$ est identiquement nulle, on obtient les équations

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \omega_y(t)\cos\varkappa\sec\varphi, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -\omega_y(t)\sin\varkappa, \\ \frac{d\varkappa}{dt} &= -\omega_z(t)+\omega_y(t)\cos\varkappa\operatorname{tg}\varphi \end{aligned} \qquad (5.6.6)$$

dans lesquelles $\varkappa$ est comme précédemment un angle que l'axe x fait avec la direction Est. A son tour, l'angle ψ est lié à la longitude λ du lieu par la relation (5.1.5) indiquée au § 1 du présent chapitre.

La deuxième et la troisième des équations du système (5.6.6) ne contiennent pas la fonction cherchée $\psi(t)$ et peuvent donc s'intégrer indépendamment de la première. Après cela, la recherche de la fonction $\psi(t)$ se ramène à une simple quadrature. Malheureusement, les deux dernières équations du système (5.6.6) ne se présentent pas sous forme de deux équations indépendantes et doivent donc s'intégrer ensemble.

Remarquons avant de clore ce paragraphe, que la première tentative de construire un schéma parmettant une détermination rigoureuse des coordonnées d'un mobile à partir des seules indications des appareils gyroscopiques (gyrocompas, gyrohorizon et tachymètres gyroscopiques) a été entreprise, à ce qu'il paraît, à la fin des années quarante par Ch. Fox [1]). Cependant, ses calculs théoriques se sont avérés inexacts par suite d'une erreur de principe qu'il avait commise. Il n'a pas tenu compte de la vitesse angulaire, par rapport au système de coordonnées géographique local, du trièdre qui suit le mouvement en azimut du compas apériodique (avec les désignations

---

1) *Fox Ch.* « The mechanical determination of position and velocity on the Earth's surface ».— Proc. Cambridge Philos. Soc., 1949, april, vol. 45, No. 2.

adoptées dans le présent paragraphe, du trièdre naturel de Darboux $x^0y^0z^0$) [1]). Ceci correspond à l'omission de la dérivée de l'angle $\varkappa$ par rapport au temps dans le système d'équations (5.1.3) et, par conséquent, dans les équations (5.1.7) et (5.6.6).

REMARQUES SUR LES CHAPITRES IV ET V

L'instabilité de fonctionnement d'un système de navigation par inertie dans l'espace peut être mise en évidence sur l'exemple le plus simple. Envisageons un mobile qui se déplace en translation le long de l'axe des abscisses d'un système de coordonnées non tournant $\xi\eta\zeta$ ayant son origine au centre de la Terre, suivant la loi $\xi = \xi(t)$. Il n'est pas difficile d'établir l'équation différentielle $d^2\xi/dt^2 + jR^2/\xi^2 = a_\xi(t)$ dont l'intégration permet de trouver la fonction $\xi(t)$ qui se détermine en principe à partir des seules indications courantes $a_\xi(t)$ d'un accéléromètre se trouvant à bord du mobile. Dans cette équation, j est l'accélération de la gravitation et R le rayon de la Terre. Si les conditions initiales du mouvement du mobile sont introduites dans le dispositif intégrateur d'une façon imprécise, la fonction $\xi(t)$ sera déterminée avec une erreur $\delta(t)$. Cette dernière satisfait à l'équation $d^2\delta/dt^2 - jR(2\xi + \delta)\,\delta/\xi^2(\xi + \delta)^2 = 0$.

Supposons que le mobile soit « suspendu » au-dessus du pôle de la Terre à une distance $\xi = R =$ const de son centre. Dans ce cas, l'équation différentielle linéarisée, pour la détermination de l'erreur δ devient $d^2\delta/dt^2 - 2\nu^2\delta = 0$ ($\nu^2 = j/R$) dont l'une des solutions particulières croît selon une loi exponentielle, en doublant sa valeur toutes les dix minutes. Ainsi, la détermination de l'altitude d'un mobile à l'aide du seul système à inertie représente un problème incorrect et, donc, une navigation de longue durée dans l'espace, par des moyens uniquement inertiels, est irréalisable.

---

[1]) Par suite de l'erreur commise, Ch. Fox obtient pour la latitude l'unique équation différentielle

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{Cs}(M_1^2 + M_2^2 \operatorname{cotg}^2 \lambda)^{1/2},$$

où sont conservées les désignations adoptées par l'auteur dans l'article cité: λ est la latitude du lieu où se trouve le navire; C le moment d'inertie polaire du rotor du gyroscope utilisé comme tachymètre gyroscopique: s la vitesse angulaire de rotation propre du gyroscope (dans le schéma de Fox, de tels gyroscopes sont au nombre de deux, leurs moments cinétiques propres sont situés dans un plan horizontal); M_1 et M_2 sont les moments appliqués aux axes des suspensions de ces gyroscopes (respectivement, à la verticale et au gyronord). Ensuite, il donne pour les moments M_1 et M_2 les formules

$$M_1 = \frac{Cs}{a}(\Omega a \cos\lambda - w) \sec\alpha; \qquad M_2 = \frac{Cs}{a}(\Omega a \cos\lambda - w) \operatorname{tg}\lambda$$

dans lesquelles a est le rayon de la sphère terrestre: Ω sa vitesse angulaire; w la composante ouest de la vitesse du navire par rapport à la Terre; α la déviation de vitesse (erreur de route) du gyrocompas.

La seconde de ces formules n'est pas correcte. Son second membre ne fait pas intervenir le terme $Cs\dot{\alpha}$ qui change radicalement le sens de l'étude. Pour la même raison, sont incorrectes la relation

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{M_2}{M_1}\sec\alpha \simeq \frac{M_2}{M_1}$$

et quelques autres formules

BIBLIOGRAPHIE

Андреев В. Д. К теории инерциальных систем автономного определения координат движущегося объекта (*V. Andréev.* Sur la théorie des systèmes à inertie pour une détermination autonome des coordonnées d'un mobile). — ПММ, 1964, т. 28, вып. 1 (en russe).

Андреев В. Д. Об общих уравнениях инерциальной навигации (*V. Andréev.* Sur les équations générales de la navigation par inertie). — ПММ, 1964, т. 28, вып. 2 (en russe).

Андреев В. Д. Об ошибках систем инерциальной навигации (*V. Andréev.* Sur les erreurs des systèmes de navigation par inertie). — Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1964, № 2 (en russe).

Андреев В. Д. Теория инерциальной навигации (*V. Andréev.* Théorie de la navigation par inertie). М., « Наука », 1966 (en russe).

Андреев В. Д., Девянин Е. А., Демьяновский А. П. К теории инерциальных систем, не содержащих гироскопических чувствительных элементов (*V. Andréev, E. Dévianine, A. Démianovski.* Sur la théorie des systèmes à inertie ne comportant pas d'éléments sensibles gyroscopiques). — Инж. ж. МТТ, 1966, № 1 (en russe).

Андреев В. Д., Парусников Н. А. Об упрощении уравнений инерциальной навигации, связанном с несферичностью Земли и ее поля тяготения (*V. Andréev, N. Parousnikov.* Sur la simplification des équations de la navigation par inertie, liée à la non-sphéricité de la Terre et de son champ de gravitation). — Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 1 (en russe).

Бойчук О. Ф. Общая схема расчета ошибок некорректируемых инерциальных систем (*O. Boïtchouk.* Schéma général pour le calcul des erreurs des systèmes à inertie non corrigés). — Прикл. механика, 1971, т. 7, вып. 9 (en russe).

Булгаков Б. В. Прикладная теория гироскопов (*B. Boulgakov.* Théorie appliquée des gyroscopes). М., Гостехиздат, 1955 (en russe).

Василенко В. П., Калинович В. Н., Кошляков В. Н. О построении гирокомпасной инерциальной системы (*V. Vassilenko, V. Kalinovitch, V. Kochliakov.* Sur la construction d'un système de navigation par inertie à gyrocompas). — Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 4 (en russe).

Горенштейн И. А., Шульман И. А. Инерциальные навигационные системы (*I. Gorenstein, I. Schulmann.* Systèmes de navigation par inertie). М., « Машиностроение », 1970 (en russe).

Девянин Е. А., Демьяновский А. П. Определение абсолютной угловой скорости, расстояния до притягивающего центра и построение вертикали инерциальными средствами (*E. Dévianine, A. Démianovski.* Détermination de la vitesse angulaire absolue, de la distance au centre d'attraction et construction de la verticale par des moyens inertiels). — Инж. ж. МТТ, 1966, № 2 (en russe).

Девянин Е. А., Парусников Н. А. О лагранжевой форме уравнений инерциальной навигации (*E. Dévianine, N. Parousnikov.* Sur la forme lagrangienne des équations de la navigation par inertie). — Инж. ж. МТТ, 1968, № 2 (en russe).

Девянин Е. А. О возможных принципах построения систем инерциальной навигации (*E. Dévianine.* Sur les principes possibles de construction des systèmes de navigation par inertie). — Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 6 (en russe).

Девянин Е. А. К теории невозмущаемой бигироскопной вертикали (*E. Dévianine.* Sur la théorie de la verticale à deux gyroscopes non perturbable). — Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 3 (en russe).

Девянин Е. А. Об общих уравнениях систем инерциальной навигации (*E. Dévianine.* Sur les équations générales des systèmes de navigation par inertie). — Изв. АН СССР, МТТ, 1973, № 4 (en russe).

21—01247

Жбанов Ю. К. Исследование свободных колебаний в системе автономного определения координат движущегося объекта (*You. Zbanov.* Etude des oscillations libres dans un système de détermination autonome des coordonnées d'un mobile). — ПММ, 1960, т. 24, вып. 6 (en russe).

Захарин М. И., Захарин Ф. М. Кинематика инерциальных систем навигации (*M. Zakharine, F. Zakharine.* Cinématique des systèmes de navigation par inertie). М., « Машиностроение », 1968 (en russe).

Ишлинский А. Ю. Об уравнениях задачи определения местоположения движущегося объекта посредством гироскопов и измерителей ускорений (*A. Ishlinsky.* Sur les équations du problème de la détermination de la position d'un mobile au moyen de gyroscopes et d'accéléromètres). — ПММ, 1957, т. 21, вып. 6 (en russe).

Ишлинский А. Ю. Геометрическое рассмотрение устойчивости решения основной задачи инерциальной навигации (*A. Ishlinsky.* Etude géométrique de la stabilité de la solution du problème principal de navigation par inertie). — Инж. ж. МТТ, 1968, № 3 (en russe).

Клигер Л. И., Парусников Н. А. Об уравнениях малых колебаний шулеровской вертикали (*L. Kliguerr, N. Parousnikov.* Sur les équations des petites oscillations de la verticale de Schüler). — Инж. ж. МТТ, 1966, № 5 (en russe).

Климов Д. М., Рабинович Ю. И. О кинематических ошибках инерциальных систем навигации (*D. Klimov, You. Rabinovitch.* Sur les erreurs cinématiques des systèmes de navigation par inertie). — Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 6 (en russe).

Климов Д. М. Об интегрировании кинематических уравнений инерциальных систем навигации (*D. Klimov.* Sur l'intégration des équations cinématiques des systèmes de navigation par inertie). — Изв. высш. учебн. заведений. Приборостроение, 1968, т. 11, № 7 (en russe).

Кондратьев Л. В. Поведение инерциальных систем навигации при больших скоростях полета (*L. Kondratiev.* Comportement des systèmes de navigation par inertie aux grandes vitesses de vol). — Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1965, № 2 (en russe).

Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения (*A. Liapounov.* Problème général de stabilité du mouvement). Л.-М., ОНТИ, 1935 (en russe).

Парусников Н. А. Методы аналитической механики в инерциальной навигации (*N. Parousnikov.* Méthodes de la mécanique analytique dans la navigation par inertie). — Науч. тр. Ин-та механики МГУ, 1970, № 7 (en russe).

Раушенбах Б. В., Токарь Е. Н. Управление ориентацией космических аппаратов (*B. Rauschenbakh, E. Tokar.* Commande d'orientation des véhicules spatiaux). М., « Наука », 1974 (en russe).

Стороженко В. А., Темченко М. Е. О погрешностях работы систем инерциальной навигации при неточном вводе в счетно-решающее устройство начальных данных (*V. Storojenko, M. Temtchenko.* Sur les erreurs de fonctionnement des systèmes de navigation par inertie en cas d'une introduction imprécise des données initiales dans le calculateur). — Инж. ж. МТТ, 1967, № 4 (en russe).

Ткачев Л. И. Системы инерциальной ориентировки (*L. Tkatchev.* Systèmes d'orientation par inertie). М., изд. МЭИ, 1973 (en russe).

Якушенков А. А. О влиянии неточного начального ориентирования и дрейфа азимутального гироскопа на точность инерциальной навигационной системы с интегральной коррекцией по скорости (*A. Yakouchenkov.* Sur l'influence de l'orientation initiale imprécise et de la dérive du gyroscope d'azimut sur la précision du système de navigation par inertie à correction intégrale en vitesse). — Тр. ЦНИИ Мор. флота, 1960, вып. 30 (en russe).

Battin R. H. Astronautical guidance. N. Y., e. a., McGraw-Hill, 1964.

Broxmeyer C. Inertial navigation systems. N. Y., e. a., McGraw-Hill, 1964.

Draper C.S., Woodbury R.B. Geometrical stabilization based on servo-driven gimbals and integrating gyro units. — In: AGARD 2 nd Guided Missiles seminar Guidance and Control. Venice, Italy, Sept., 1956, AGARD Ograph, 1956, N 21.

Draper C.S., Wrigley W., Grohe L.R. The floating integrating gyro and its application to geometrical stabilization problems on moving bases. — Aeronaut. Engng. Rev., 1956, vol. 15, No. 6.

Draper C.S., Wrigley W., Hovorka J. Inertial guidance. Oxford, Pergamon Press, 1960.

Fox Ch. The mechanical determination of position and velocity on the Earth's surface. — Proc. Cambridge Philos. Soc., 1949, vol. 45, No. 2.

Goodman L.E., Robinson A.R. Effect of finite rotations on gyroscopic sensing devices. — J. Appl. Mech., 1958, vol. 25, No. 2.

Inertial navigation. Analysis and design. Ed. by *C.F. O'Donnell.* New York a. o. McGraw-Hill, 1964.

Inertial guidance. Ed. by *G.R. Pittman.* N. Y. — L., Wiley, 1962.

Ishlinsky A.Yu., Klimov D.M. Some aspects of the solution of the main problem of inertial navigation. — J. Inst. Navig., 1970, vol. 23, N 4.

McClure C.L. Theory of inertial guidance. New Jersey, Prentice-Hall, Inc., 1960.

Reisch S. Report on absolute navigation. Royal Aircraft Establishment, Translation, 1945, No. 75.

Space navigation guidance and control. Ed. by *J.E. Miller.* Maidenhead, Technivision, 1966.

Wrigley W., Woodbury R.B., Hovorka J. Inertial guidance. New York, Publ. Inst. Aeronaut. Sci., 1957.

CHAPITRE VI

PROBLÈMES DE CINÉMATIQUE DE LA NAVIGATION PAR INERTIE

§ 1. Paramètres de Rodrigues-Hamilton dans la théorie de la navigation par inertie

Dans le chapitre précédent, la position et l'orientation en azimut d'une plate-forme à inertie, installée à bord d'un mobile et stabilisée dans le plan de l'horizon local étaient déterminées, par rapport au système de coordonnées de Greenwich $\xi\eta\zeta$, par trois angles : λ, φ et $\varkappa$. L'axe η du système $\xi\eta\zeta$ était dirigé suivant l'axe de rotation de la Terre et l'axe ζ se trouvait dans le plan du méridien de Greenwich. Il est d'ailleurs apparu que la position de la plate-forme mentionnée pouvait se déterminer plus commodément à l'aide de trois angles ψ, φ, $\varkappa$ par rapport à un système de coordonnées non tournant $\xi^s\eta^s\zeta^s$ avec lequel le système de Greenwich se confond à l'instant $t = 0$. Les angles λ et ψ s'exprimaient dans ce cas l'un par l'intermédiaire de l'autre à l'aide de la formule (5.1.5). La plate-forme et le système de coordonnées xyz qui lui est lié, étaient stabilisés de telle façon que la perpendiculaire au plan de la plate-forme, confondue avec l'axe z, passait constamment par le centre de la Terre, supposée sphérique, quel que fût le mouvement dont était animé le mobile. Il a également été montré que les angles ψ, $-\varphi$ et $-\varkappa$ étaient les angles d'Euler Krylov (v. § 1 du chapitre précédent) qui déterminent l'orientation du système de coordonnées xyz par rapport au système non tournant $\xi^s\eta^s\zeta^s$. La recherche de ces angles se ramenait à l'intégration du système d'équations différentielles (5.1.6). Le but du paragraphe actuel et des paragraphes suivants du présent chapitre est d'introduire, au lieu des angles ψ, φ et $\varkappa$, divers systèmes de paramètres de Rodrigues-Hamilton et d'établir pour ces paramètres les équations différentielles correspondantes de la navigation par inertie [1]).

Introduisons de nouveau un trièdre *abc* et faisons coïncider ses arêtes *a*, *b*, *c* respectivement avec les axes du système de coordonnées $\xi^s\eta^s\zeta^s$ (v. fig. 115). De même qu'au § 1 du chapitre précédent, faisons tourner ce trièdre de l'angle ψ autour de l'arête *b*, qui se confond au début avec l'axe η^s, en sens inverse des aiguilles d'une

[1]) Comme il a été observé à la fin du § 1 du chapitre précédent, l'introduction de ces paramètres s'avère utile dans plusieurs cas et notamment pour l'étude de la navigation aux hautes latitudes (v. § 5 du présent chapitre).

montre, si la rotation est observée du côté de la partie positive de cet axe (fig. 127). Après une telle rotation, le trièdre prend une position $\xi_1\eta_1\zeta_1$ dans laquelle l'axe η_1 est confondu avec l'axe η^s de la Terre, et l'axe ξ_1 est parallèle à l'axe E (c'est-à-dire à la direction Est) du système de coordonnées géographique local ENZ. D'après ce qui a été établi au chap. II, § 3 (tome I), le quaternion q correspondant à la rotation décrite, s'exprime par la formule

$$q=\cos\frac{\psi}{2}+j\sin\frac{\psi}{2}. \qquad (6.1.1)$$

Effectuons une rotation suivante du trièdre abc de l'angle $-\varphi$ autour de l'arête a qui coïncide maintenant avec l'axe ξ_1 (v. fig. 115

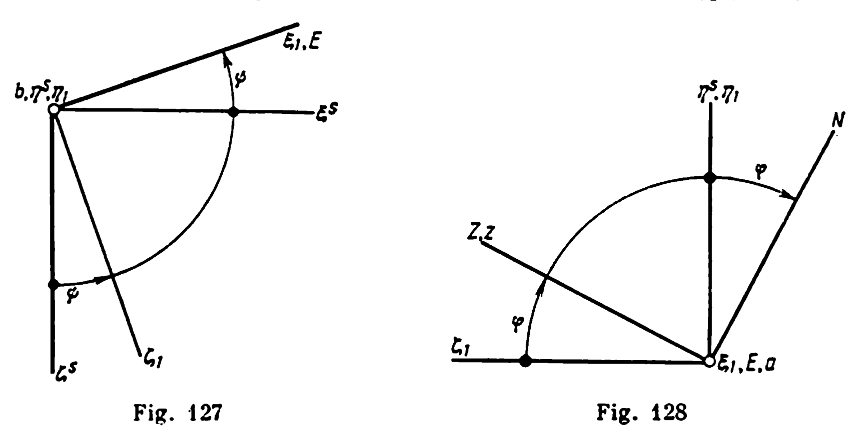


Fig. 127 Fig. 128

et 128). Notons qu'à une valeur positive de l'angle φ correspond une rotation du trièdre dans le sens des aiguilles d'une montre si la rotation est observée du côté de la partie positive de l'axe ξ_1 parallèle à l'axe E. La nouvelle orientation du trièdre abc coïncide avec l'orientation du système géographique local ENZ. Le quaternion p caractérisant la deuxième rotation du trièdre abc est de la forme

$$p=\cos\frac{\varphi}{2}-i\sin\frac{\varphi}{2}. \qquad (6.1.2)$$

D'après ce qui a été établi au chap. II, § 3 du tome I, le produit des quaternions q et p que nous venons d'obtenir, correspond à la rotation finie du trièdre abc, s'effectuant de la position $\xi^s\eta^s\zeta^s$ directement (à un mouvement de translation, par suite duquel son sommet se trouve sur la surface de la sphère terrestre, près) dans la position ENZ. On a

$$q\odot p=\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}-i\cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}+$$
$$+j\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}+k\sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}. \qquad (6.1.3)$$

La troisième rotation, c'est-à-dire la dernière, du trièdre *abc* sera effectuée de l'angle $\varkappa$ autour de l'arête c qui coïncide maintenant, après les deux rotations précédentes, avec l'axe Z (fig. 129). Finalement, le trièdre prendra la position du système de coordonnées xyz. Lorsque les valeurs de l'angle $\varkappa$ sont positives, les rotations autour de l'arête c doivent se faire dans le sens des aiguilles d'une montre si on les observe du côté de la partie positive de l'axe z dont l'orientation est celle de l'axe Z. Le quaternion r de cette rotation a pour expression

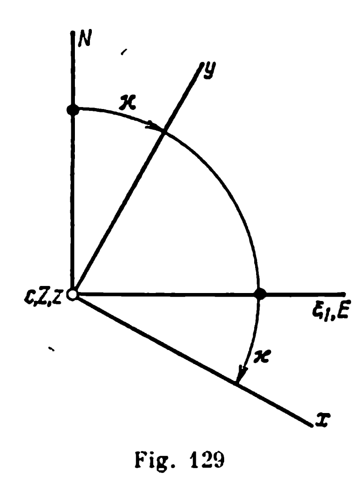


Fig. 129

$$r = \cos\frac{\varkappa}{2} - k\sin\frac{\varkappa}{2}. \qquad (6.1.4)$$

Il est évident que la formule

$$l = (q \odot p) \odot r \qquad (6.1.5)$$

permet de calculer le quaternion

$$l = l_0 + il_1 + jl_2 + kl_3. \qquad (6.1.6)$$

Conformément à ce qui a été établi au chap. II, § 3 du tome I, ce dernier caractérise la rotation du trièdre *abc*, par suite de laquelle il passe de la position $\xi^s\eta^s\zeta^s$ directement dans la position du système de coordonnées xyz (toujours à une translation de ses arêtes près). En utilisant les règles de multiplication des quaternions, on obtient les formules

$$\begin{aligned} l_0 &= \cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varkappa}{2} + \sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varkappa}{2},\\ l_1 &= -\cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varkappa}{2} - \sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varkappa}{2},\\ l_2 &= \sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varkappa}{2} - \cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varkappa}{2},\\ l_3 &= \sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varkappa}{2} - \cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varkappa}{2}. \end{aligned} \qquad (6.1.7)$$

Ici, l_0 est la partie réelle et l_1, l_2 et l_3 sont les parties imaginaires du quaternion (6.1.6), qui sont liées par la relation

$$l_0^2 + l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1. \qquad (6.1.8)$$

Les quantités l_0, l_1, l_2 et l_3 sont dans ce cas les paramètres de Rodrigues-Hamilton qui permettent de déterminer la position du système de coordonnées xyz par rapport au système non tournant $\xi^s\eta^s\zeta^s$ (au chap. II, § 3 du tome I, ils étaient désignés par d'autres lettres). A ce qu'il paraît, le procédé utilisé ici pour obtenir les

formules (6.1.7) qui expriment les paramètres de Rodrigues-Hamilton par l'intermédiaire des angles d'Euler-Krylov, est un des plus simples [1]).

Dans le § 3 déjà mentionné du chap. II, tome I, nous avons également indiqué la table (2.3.3) des cosinus des angles inclus entre les axes des systèmes de coordonnées dont la disposition relative est donnée par l'intermédiaire des paramètres de Rodrigues-Hamilton. Remplaçons dans cette table les désignations des paramètres p_0, p_1, p_2, p_3 respectivement par l_0, l_1, l_2, l_3 et celles des axes x_*, y_*, z_* par ξ^s, η^s, ζ^s. Il vient la table

$$\begin{array}{cccc} & \xi^s & \eta^s & \zeta^s \\ x & a' & b' & c' \\ y & a'' & b'' & c'' \\ z & a''' & b''' & c''' \end{array} \qquad (6.1.9)$$

dans laquelle les cosinus des angles que font entre eux les axes des systèmes de coordonnées xyz et $\xi^s\eta^s\zeta^s$ s'expriment par les formules suivantes

$$\begin{array}{lll} a' = 2l_0^2 + 2l_1^2 - 1, & b' = 2(l_1 l_2 + l_0 l_3), & c' = 2(l_1 l_3 - l_0 l_2), \\ a'' = 2(l_1 l_2 - l_0 l_3), & b'' = 2l_0^2 + 2l_2^2 - 1, & c'' = 2(l_2 l_3 + l_0 l_1), \\ a''' = 2(l_1 l_3 + l_0 l_2), & b''' = 2(l_2 l_3 - l_0 l_1), & c''' = 2l_0^2 + 2l_3^2 - 1. \end{array} \qquad (6.1.10)$$

Pour exprimer les coefficients figurant dans la table (6.1.9) par les angles ψ, φ, $\varkappa$, il convient d'introduire les expressions (6.1.7) dans les formules (6.1.10) et d'effectuer des transformations assez simples et pas trop encombrantes. La table cherchée est de la forme

$$\begin{array}{cccc} & \xi^s & \eta^s & \zeta^s \\ x & \sin\psi \sin\varphi \sin\varkappa + \cos\psi\cos\varkappa & -\cos\varphi \sin\varkappa & \cos\psi \sin\psi \sin\varkappa - \sin\psi \cos\varkappa \\ y & -\sin\psi \sin\varphi \cos\varkappa + \cos\psi \sin\varkappa & \cos\varphi \cos\varkappa & -\cos\psi \sin\varphi \cos\varkappa - \sin\psi \sin\varkappa \\ z & \sin\psi \cos\varphi & \sin\varphi & \cos\psi \cos\varphi. \end{array} \qquad (6.1.11)$$

[1]) Dans l'article de *V. Kochliakov* « Sur l'application des paramètres de Rodrigues-Hamilton et de Cayley-Klein dans la théorie appliquée des gyroscopes » (*Кошляков В. Н.* « О применении параметров Родрига-Гамильтона и Кейли-Клейна в прикладной теории гироскопов » — ПММ, т. 29, вып. 4, 1965 (en russe)), les mêmes formules sont obtenues sans avoir recours à l'algèbre des quaternions.

La table (6.1.11) peut évidemment s'obtenir par une voie plus simple, si on utilise, par exemple, l'écriture symbolique des rotations finies, comme ceci a été proposé au chap. III, § 5 du tome I, et la multiplication des matrices (v. tome I, chap. III, § 7). Le passage du trièdre *abc*, effectué de la position $\xi^s\eta^s\zeta^s$ dans la position xyz (v. fig. 115, 127 et 128) par suite de trois rotations finies successives décrites plus haut, se caractérise dans ce cas par le schéma suivant:

$$\xi^s\eta^s\zeta^s \xrightarrow[\psi]{\eta^s,\ \eta_1} \xi_1\eta_1\zeta_1 \xrightarrow[-\varphi]{\xi_1,\ E} ENZ \xrightarrow[-\varkappa]{Z,\ z} xyz. \qquad (6.1.12)$$

Rappelons maintenant la notation matricielle des rotations finies, introduite au chap. III, § 7 du tome I. A la première rotation finie correspond la matrice $B(\psi)$, à la deuxième, la matrice $A(-\varphi)$ et à la troisième, la matrice $C(-\varkappa)$. Suivant les formules (3.7.15), (3.7.14) et (3.7.16) du même paragraphe, ces matrices [1]) sont, dans ce cas, de la forme

$$B(\psi)=\begin{array}{c} \\ \xi_1 \\ \eta_1 \\ \zeta_1 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \xi^s & \eta^s & \zeta^s \end{array} \\ \left\|\begin{array}{ccc} \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{array}\right\| \end{array},$$

$$A(-\varphi)=\begin{array}{c} \\ E \\ N \\ Z \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \end{array} \\ \left\|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{array}\right\| \end{array}, \qquad (6.1.13)$$

$$C(-\varkappa)=\begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} E & N & Z \end{array} \\ \left\|\begin{array}{ccc} \cos\varkappa & -\sin\varkappa & 0 \\ \sin\varkappa & \cos\varkappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right\| \end{array}.$$

D'après ce qui a été établi au chap. III, § 7 du tome I, le produit des matrices $B(\psi)$, $A(-\varphi)$, $C(-\varkappa)$, soit

$$L = L(\psi, -\varphi, -\varkappa) = C(-\varkappa)\,A(-\varphi)\,B(\psi), \qquad (6.1.14)$$

détermine la matrice de rotation finie du trièdre *abc* de la position $\xi^s\eta^s\zeta^s$ directement dans la position xyz (à une translation près). En multipliant à gauche la matrice $B(\psi)$ par la matrice $A(-\varphi)$, on

---

[1]) Pour plus de commodité, dans l'écriture des matrices $B(\psi)$, $A(-\varphi)$ et $C(-\varkappa)$, ainsi que des matrices qui seront données plus loin, on indique les positions de départ et d'arrivée du trièdre *abc* qu'il prend par suite d'une rotation finie correspondante.

obtient

$$A(-\varphi)\,B(\psi) = \begin{matrix} \\ E \\ N \\ Z \end{matrix}\left\| \begin{matrix} \xi^s & \eta^s & \zeta^s \\ \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ -\sin\psi\sin\varphi & \cos\varphi & -\cos\psi\sin\varphi \\ \sin\psi\cos\varphi & \sin\varphi & \cos\psi\cos\varphi \end{matrix} \right\|. \qquad (6.1.15)$$

Enfin, multiplions les matrices $C\,(-\varkappa)$ et $A\,(-\varphi)\,B\,(\psi)$ dans l'ordre prescrit par la formule (6.1.14). Il vient la matrice

$$L = \begin{matrix} \\ x \\ \\ y \\ \\ z \end{matrix}\left\| \begin{matrix} \xi^s & \eta^s & \zeta^s \\ \sin\psi\sin\varphi\sin\varkappa + & -\cos\varphi\sin\varkappa & \cos\psi\sin\varphi\sin\varkappa - \\ +\cos\psi\cos\varkappa & & -\sin\psi\cos\varkappa \\ -\sin\psi\sin\varphi\cos\varkappa + & \cos\varphi\cos\varkappa & -\cos\psi\sin\varphi\cos\varkappa - \\ +\cos\psi\sin\varkappa & & -\sin\psi\sin\varkappa \\ \sin\psi\cos\varphi & \sin\varphi & \cos\psi\cos\varphi \end{matrix} \right\| \qquad (6.1.16)$$

dont les éléments sont, comme il fallait s'y attendre, exactement les mêmes que ceux de la table (6.1.11) des cosinus des angles inclus entre les axes des systèmes de coordonnées xyz et $\xi^s\eta^s\zeta^s$.

D'après la terminologie adoptée au chap. III, § 5 du tome I, le passage du trièdre abc, s'effectuant de la position $\xi^s\eta^s\zeta^s$ dans la position xyz, est un déplacement angulaire de deuxième espèce. Par suite, un procédé encore plus simple permettant d'obtenir la table (6.1.11) consiste à remplacer dans la table (3.5.11) du tome I, chap. III, § 5 les lettres α_2, β_2 et γ_2 par $-\varphi$, ψ et $-\varkappa$, ainsi que les désignations des axes des coordonnées x, y, z par ξ^s, η^s, ζ^s, et ξ_2, η_2, ζ_2 par x, y, z.

Le système d'équations (5.1.6) du problème de navigation par inertie d'un mobile sur la sphère terrestre, obtenu au § 1 du chapitre précédent, est non linéaire par rapport aux fonctions du temps cherchées $\psi\,(t)$, $\varphi\,(t)$ et $\varkappa\,(t)$. L'intégration de ce système et l'étude des propriétés générales de la solution du problème présentent des difficultés tant au point de vue analytique (du fait que $\cos\varphi$ s'annule pour $\varphi = \pm\pi/2$, c'est-à-dire aux pôles géographiques de la Terre) qu'à celui de calcul. On sait [1] que dans les équations (5.1.6) on peut passer à de nouvelles variables cherchées, à savoir aux paramètres de Rodrigues-Hamilton l_0, l_1, l_2, l_3. Les nouvelles équations qui en résultent sont linéaires par rapport à ces paramètres, ce qui facilite grandement l'étude analytique et l'intégration des équations sur calculateurs électroniques.

Une transformation directe des équations (5.1.6), à l'aide des formules (6.1.7), en des équations par rapport aux variables l_0, l_1,

[1]) Voir note au bas de la p. 280.

l_2 et l_3, liées entre elles par une relation supplémentaire (6.1.8), exige des calculs très longs. Il y a donc intérêt à établir les équations cherchées par une voie indépendante, en se reportant aux théorèmes les plus simples de la géométrie analytique et de la cinématique.

Prenons dans le système de coordonnées mobile xyz (lié à la plate-forme stabilisée) un point quelconque de coordonnées fixes x, y, z et faisons coïncider les origines du système xyz et du système non tournant $\xi^s\eta^s\zeta^s$, en supposant par la suite que les deux origines sont immobiles. Il n'est pas difficile de voir que les coordonnées ξ^s, η^s, ζ^s du même point dans le système $\xi^s\eta^s\zeta^s$ s'expriment par les formules

$$\begin{aligned} \xi^s &= a'x + a''y + a'''z, \\ \eta^s &= b'x + b''y + b'''z, \\ \zeta^s &= c'x + c''y + c'''z, \end{aligned} \tag{6.1.17}$$

où a', a'', . . ., c'', c''' sont les mêmes quantités que dans les formules (6.1.10).

Les dérivées, par rapport au temps, des coordonnées ξ^s, η^s, ζ^s représentent les projections de la vitesse du point mentionné sur les axes du système $\xi^s\eta^s\zeta^s$. Compte tenu de ce que les coordonnées x, y et z figurant dans les formules (6.1.17) sont des quantités constantes, on a les égalités suivantes:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi^s}{dt} &= \frac{da'}{dt}x + \frac{da''}{dt}y + \frac{da'''}{dt}z, \\ \frac{d\eta^s}{dt} &= \frac{db'}{dt}x + \frac{db''}{dt}y + \frac{db'''}{dt}z, \\ \frac{d\zeta^s}{dt} &= \frac{dc'}{dt}x + \frac{dc''}{dt}y + \frac{dc'''}{dt}z. \end{aligned} \tag{6.1.18}$$

Utilisons de nouveau la table (6.1.9), cette fois pour calculer les projections de la vitesse du point introduit plus haut, sur les axes du système de coordonnées mobile xyz. Compte tenu des égalités (6.1.18), on obtient, en particulier,

$$\begin{aligned} V_x &= a'\frac{d\xi^s}{dt} + b'\frac{d\eta^s}{dt} + c'\frac{d\zeta^s}{dt} = \\ &= \left(a'\frac{da'}{dt} + b'\frac{db'}{dt} + c'\frac{dc'}{dt}\right)x + \left(a'\frac{da''}{dt} + b'\frac{db''}{dt} + c'\frac{dc''}{dt}\right)y + \\ &\quad + \left(a'\frac{da'''}{dt} + b'\frac{db'''}{dt} + c'\frac{dc'''}{dt}\right)z. \end{aligned} \tag{6.1.19}$$

On sait que les coefficients figurant dans la table (6.1.9) sont liés par les égalités du type

$$(a')^2 + (b')^2 + (c')^2 = 1, \quad a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0 \tag{6.1.20}$$

et en conséquence, par les relations de la forme

$$a'\frac{da'}{dt}+b'\frac{db'}{dt}+c'\frac{dc'}{dt}=0,$$
$$a'\frac{da''}{dt}+b'\frac{db''}{dt}+c'\frac{dc''}{dt}=-\left(a''\frac{da'}{dt}+b''\frac{db'}{dt}+c''\frac{dc'}{dt}\right). \qquad (6.1.21)$$

Compte tenu de ces relations, il n'est pas difficile de mettre l'expression (6.1.19) donnant la projection V_x de la vitesse du point introduit plus haut, sur l'axe x sous la forme suivante:

$$V_x=\left(a'\frac{da'''}{dt}+b'\frac{db'''}{dt}+c'\frac{dc'''}{dt}\right)z-$$
$$-\left(a''\frac{da'}{dt}+b''\frac{db'}{dt}+c''\frac{dc'}{dt}\right)y. \qquad (6.1.22)$$

D'une manière analogue, on obtient encore deux formules pour les deux autres projections de la vitesse du point qui ne change pas sa position dans le système de coordonnées mobile xyz. On a

$$V_y=\left(a''\frac{da'}{dt}+b''\frac{db'}{dt}+c''\frac{dc'}{dt}\right)x-\left(a'''\frac{da''}{dt}+b'''\frac{db''}{dt}+c'''\frac{dc''}{dt}\right)z,$$
$$(6.1.23)$$
$$V_z=\left(a'''\frac{da''}{dt}+b'''\frac{db''}{dt}+c'''\frac{dc''}{dt}\right)y-\left(a'\frac{da'''}{dt}+b'\frac{db'''}{dt}+c'\frac{dc'''}{dt}\right)x.$$

Il est naturel que les formules (6.1.22) et (6.1.23) présentent la propriété de permutation circulaire. A savoir, chacune d'elles se déduit de la précédente par permutation circulaire simultanée sur les lettres a', a'', a'''; b', b'', b'''; c', c'', c'''; x, y, z.

Comme il fallait s'y attendre, la structure des expressions (6.1.22) et (6.1.23) coïncide avec celle des formules d'Euler

$$\begin{aligned} V_x &= \omega_y z - \omega_z y,\\ V_y &= \omega_z x - \omega_x z,\\ V_z &= \omega_x y - \omega_y x, \end{aligned} \qquad (6.1.24)$$

connues en cinématique du corps solide, pour les projections des vitesses des points d'un corps solide animé d'un mouvement autour d'un point fixe (les vitesses sont projetées sur les axes du système de coordonnées xyz ayant son origine au point fixe, et rigidement lié

au corps). Il s'ensuit que les quantités

$$\begin{aligned}\omega_x &= a''' \frac{da''}{dt} + b''' \frac{db''}{dt} + c''' \frac{dc''}{dt}, \\ \omega_y &= a' \frac{da'''}{dt} + b' \frac{db'''}{dt} + c' \frac{dc'''}{dt}, \\ \omega_z &= a'' \frac{da'}{dt} + b'' \frac{db'}{dt} + c'' \frac{dc'}{dt}\end{aligned} \tag{6.1.25}$$

sont les projections, sur les axes x, y, z, de la vitesse angulaire du système de coordonnées mobile xyz, par rapport au système non tournant $\xi^s\eta^s\zeta^s$. Ceci signifie que les égalités (6.1.25) peuvent être considérées comme formules exprimant les projections de la vitesse angulaire ω_x, ω_y, ω_z par l'intermédiaire des cosinus des angles inclus entre les axes de ces systèmes et par leurs dérivées par rapport au temps.

Si l'on introduit dans les égalités (6.1.25) les cosinus des angles inclus entre les axes des systèmes xyz et $\xi^s\eta^s\zeta^s$, dont les valeurs sont données par la table (6.1.11), on obtient évidemment, toutes réductions effectuées, les équations (5.1.6) par rapport aux fonctions inconnues $\psi(t)$, $\varphi(t)$ et $\varkappa(t)$. Pour obtenir, à leur tour, des équations qui font intervenir comme fonctions inconnues les paramètres de Rodrigues-Hamilton $l_0(t)$, $l_1(t)$, $l_2(t)$, $l_3(t)$, portons dans les mêmes égalités (6.1.25) les expressions des coefficients de la table (6.1.9), compte tenu des formules (6.1.10). On a, en particulier,

$$\begin{aligned}\omega_x = a''' \frac{da''}{dt} + b''' \frac{db''}{dt} + c''' \frac{dc''}{dt} &= \\ = 4(l_1 l_3 + l_0 l_2)\left(l_1 \frac{dl_2}{dt} + l_2 \frac{dl_1}{dt} - l_0 \frac{dl_3}{dt} - l_3 \frac{dl_0}{dt}\right) &+ \\ + 8(l_2 l_3 - l_0 l_1)\left(l_0 \frac{dl_0}{dt} + l_2 \frac{dl_2}{dt}\right) &+ \\ + 2(2l_0^2 + 2l_3^2 - 1)\left(l_2 \frac{dl_3}{dt} + l_3 \frac{dl_2}{dt} + l_0 \frac{dl_1}{dt} + l_1 \frac{dl_0}{dt}\right)&.\end{aligned} \tag{6.1.26}$$

En utilisant la relation (6.1.8), on obtient, après réduction des termes semblables, la formule

$$\omega_x = 2\left(l_0 \frac{dl_1}{dt} - l_1 \frac{dl_0}{dt} - l_2 \frac{dl_3}{dt} + l_3 \frac{dl_2}{dt}\right). \tag{6.1.27}$$

On établit de manière analogue les deux autres formules, soit

$$\begin{aligned}\omega_y &= 2\left(l_0 \frac{dl_2}{dt} - l_2 \frac{dl_0}{dt} - l_3 \frac{dl_1}{dt} + l_1 \frac{dl_3}{dt}\right), \\ \omega_z &= 2\left(l_0 \frac{dl_3}{dt} - l_3 \frac{dl_0}{dt} - l_1 \frac{dl_2}{dt} + l_2 \frac{dl_1}{dt}\right).\end{aligned} \tag{6.1.28}$$

Associées à la relation (6.1.8), les égalités (6.1.27) et (6.1.28) forment un système de trois équations différentielles non linéaires et d'une équation algébrique, lequel permet de déterminer les quatre fonctions du temps inconnues $l_0(t)$, $l_1(t)$, $l_2(t)$ et $l_3(t)$ vérifiant les conditions initiales convenablement choisies. Or, la non-linéarité de ce système n'est qu'apparente. Les équations différentielles (6.1.27) et (6.1.28) peuvent être résolues facilement par rapport aux dérivées des fonctions sus-mentionnées, ce qui permet d'obtenir des équations différentielles linéaires à coefficients variables. A cet effet, multiplions d'abord les deux membres de la première équation par l_1, ceux de la deuxième par l_2 et ceux de la troisième par l_3. Additionnons membre à membre les trois équations ainsi obtenues. Compte tenu de la relation (6.1.8), on a, après réduction des termes semblables,

$$\omega_x l_1 + \omega_y l_2 + \omega_z l_3 = \\ = 2\left[l_0 \left(l_1 \frac{dl_1}{dt} + l_2 \frac{dl_2}{dt} + l_3 \frac{dl_3}{dt} \right) - (1 - l_0^2) \frac{dl_0}{dt} \right]. \quad (6.1.29)$$

Suivant la même relation (6.1.18), on a

$$l_1 \frac{dl_1}{dt} + l_2 \frac{dl_2}{dt} + l_3 \frac{dl_3}{dt} = -l_0 \frac{dl_0}{dt} \quad (6.1.30)$$

et par conséquent,

$$2 \frac{dl_0}{dt} = -(\omega_x l_1 + \omega_y l_2 + \omega_z l_3). \quad (6.1.31)$$

Multiplions maintenant les premiers et les seconds membres des équations (6.1.27) et (6.1.28) respectivement par l_0, $-l_3$ et l_2, après quoi additionnons de nouveau membre à membre les équations ainsi obtenues. Finalement, compte tenu de la relation (6.1.8), on obtient une nouvelle égalité

$$2 \frac{dl_1}{dt} = \omega_x l_0 - \omega_y l_3 + \omega_z l_2. \quad (6.1.32)$$

En opérant de même, il n'est pas difficile d'obtenir encore deux relations

$$\begin{aligned} 2 \frac{dl_2}{dt} &= \omega_y l_0 - \omega_z l_1 + \omega_x l_3, \\ 2 \frac{dl_3}{dt} &= \omega_z l_0 - \omega_x l_2 + \omega_y l_1. \end{aligned} \quad (6.1.33)$$

Les égalités (6.1.31), (6.1.32) et (6.1.33) peuvent être considérées comme un système de quatre équations différentielles linéaires à coefficients variables $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$, $\omega_z(t)$, par rapport à quatre fonctions cherchées $l_0(t)$, $l_1(t)$, $l_2(t)$, $l_3(t)$. Il est aisé de s'assurer que la relation (6.1.8) est dans ce cas une conséquence d'une des intégra-

les premières de ce système, à savoir

$$l_0^2 + l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = \text{const.} \qquad (6.1.34)$$

Les valeurs courantes des variables $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$, $\omega_z(t)$ intervenant dans le système d'équations (6.1.31) à (6.1.33) sont élaborées par un système de navigation par inertie. Certains de ces systèmes ont été décrits au chapitre précédent. Les conditions initiales pour les variables cherchées l_0, l_1, l_2 et l_3 sont faciles à déterminer au moyen des formules (6.1.7), si l'on connaît la position initiale de la plate-forme stabilisée, c'est-à-dire les valeurs des angles ψ, φ et $\varkappa$ à l'instant initial $t = 0$. L'intégration du système mentionné d'équations différentielles à l'aide d'un calculateur rapide (ou d'un calculateur électronique) permet de connaître à tout instant les valeurs des paramètres de Rodrigues-Hamilton l_0, l_1, l_2, l_3. Puis, en se servant d'un autre calculateur (ou du même calculateur électronique), on peut, en utilisant de nouveau les formules (6.1.7), déterminer les valeurs courantes des angles ψ, φ et $\varkappa$ et donc résoudre le problème de navigation par inertie.

Pour conclure, montrons comment l'introduction de certaines fonctions complexes d'une variable réelle, du temps t, permet de réduire l'écriture de quelques équations et expressions qui se rencontrent dans le présent paragraphe. Introduisons les fonctions complexes suivantes

$$f_1 = l_1 + il_2, \quad f_2 = l_0 + il_3 \qquad (6.1.35)$$

qui sont directement liées aux paramètres classiques de Cayley-Klein dans la théorie des rotations finies du corps solide [1]). Multiplions maintenant les deux membres de la première équation différentielle (6.1.33) par $i = \sqrt{-1}$ et additionnons membre à membre l'équation (6.1.32) au résultat obtenu. Après avoir utilisé les formules (6.1.35), on obtient une seule équation

$$2\frac{df_1}{dt} = -i\omega_z f_1 + (\omega_x + i\omega_y) f_2 \qquad (6.1.36)$$

à deux fonctions complexes f_1 et f_2 que nous appellerons par la suite les paramètres de Cayley-Klein. Si l'on effectue les opérations analogues sur la deuxième équation (6.1.33) et sur l'équation (6.1.31), on obtiendra une autre équation différentielle

$$2\frac{df_2}{dt} = i\omega_z f_2 - (\omega_x - i\omega_y) f_1 \qquad (6.1.37)$$

par rapport aux mêmes paramètres cherchés f_1 et f_2.

---

[1]) A savoir, $\alpha = \bar{f}_1$, $\beta = i\bar{f}_2$, $\gamma = if_2$, $\delta = f_1$, où α, β, γ et δ sont les paramètres classiques de Cayley-Klein.

Le système de deux équations différentielles (6.1.36) et (6.1.37) par rapport aux paramètres de Cayley-Klein f_1 et f_2 est équivalent au système de quatre équations (6.1.31) à (6.1.33) contenant comme fonctions inconnues les paramètres de Rodrigues-Hamilton l_0, l_1, l_2, l_3. Les paramètres de Cayley-Klein peuvent être introduits un peu différemment, par exemple sous la forme suivante:

$$g_1 = l_1 - il_3, \quad g_2 = l_0 + il_2. \tag{6.1.38}$$

Il n'est pas difficile de montrer que dans ce cas le système d'équations (6.1.31) à (6.1.33) est équivalent au système de deux équations différentielles suivantes

$$\begin{aligned} 2\frac{dg_1}{dt} &= -i\omega_y g_1 + (\omega_x - i\omega_z) g_2, \\ 2\frac{dg_2}{dt} &= i\omega_y g_2 - (\omega_x + i\omega_z) g_1 \end{aligned} \tag{6.1.39}$$

par rapport à de nouvelles fonctions du temps, à valeurs complexes, g_1 et g_2.

§ 2. Détermination des angles d'Euler-Krylov à partir des paramètres donnés de Rodrigues-Hamilton

Au cours du paragraphe précédent, nous avons établi les équations différentielles (6.1.31) à (6.1.33) contenant comme fonctions du temps inconnues les paramètres de Rodrigues-Hamilton l_0, l_1, l_2, l_3. Ces paramètres s'expriment d'une façon assez simple par les coordonnées géographiques du mobile: la longitude λ (ou l'angle ψ, introduit au § 5 du chapitre précédent, qui est lié à la longitude), la latitude φ et l'angle d'azimut $\varkappa$ de la plate-forme stabilisée d'un système de navigation par inertie. Le problème inverse, c'est-à-dire la détermination des angles λ (ou ψ), φ et $\varkappa$, est incomparablement plus compliqué, parce que sa résolution exige de trouver une solution univoque des équations trigonométriques contenant les angles cherchés. Passons à la résolution de ce problème inverse. Commençons par comparer les données des tables (6.1.9) et (6.1.11). Compte tenu des formules (6.1.10), on a, en particulier, les égalités suivantes:

$$\begin{aligned} -\cos\varphi \sin\varkappa &= b' = 2(l_1 l_2 + l_0 l_3), \\ \cos\varphi \cos\varkappa &= b'' = 2l_0^2 + 2l_2^2 - 1, \\ \sin\varphi &= b''' = 2(l_2 l_3 - l_0 l_1), \\ \sin\psi \cos\varphi &= a''' = 2(l_1 l_3 + l_0 l_2), \\ \cos\psi \cos\varphi &= c''' = 2l_0^2 + 2l_3^2 - 1, \end{aligned} \tag{6.2.1}$$

dont, certes, trois seulement sont indépendantes.

La latitude φ du mobile sur la sphère terrestre ne peut prendre ses valeurs que dans l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$. Dans cet intervalle, la troisième des égalités (6.2.1) définit la latitude φ de façon univoque. En effet, le second membre de la troisième égalité traduit le cosinus de l'angle que font entre eux les axes η^* et z (v. fig. 128). Son module ne peut donc pas dépasser l'unité. Dans l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$, la fonction $\sin\varphi$ croît de façon monotone de -1 à 1. Il n'existe donc dans cet intervalle qu'une seule valeur de l'angle φ qui vérifie la troisième égalité (6.2.1).

L'angle $\varkappa$ qui caractérise l'orientation de la plate-forme stabilisée, se trouvant à bord du mobile, par rapport aux points cardinaux peut prendre toute valeur dans l'intervalle $[0, 2\pi[$. C'est pourquoi, il est impossible de déterminer univoquement l'angle $\varkappa$ dans cet intervalle, par exemple à partir de la relation

$$\operatorname{tg}\varkappa = -\frac{b'}{b''} = -\frac{2(l_1l_2+l_0l_3)}{2l_0^2+2l_2^2-1} \qquad (6.2.2)$$

qui se déduit de la première et de la deuxième égalité (6.2.1). En effet, à toute valeur du second membre de l'équation trigonométrique (6.2.2) correspondent, dans l'intervalle $[0, 2\pi[$, deux valeurs de l'angle $\varkappa$ dont la tangente est égale au second membre (la différence de telles valeurs est égale à π). Pour une raison analogue, après avoir trouvé la valeur de $\cos\varphi$, il est impossible de déterminer l'angle $\varkappa$ en utilisant à cet effet une (et une seule) des égalités (6.2.1), la première ou la deuxième. En effet, la fonction $\sin\varkappa$ (de même que $\cos\varkappa$) prend, dans l'intervalle $[0, 2\pi[$, toute valeur comprise entre -1 et 1 deux fois [1]). Cette indétermination dans le choix de l'angle $\varkappa$ peut être facilement levée, si, en plus de la première égalité (6.2.1) par exemple, on tient compte du fait que les signes du premier et du second membre de la deuxième égalité (6.2.1) doivent être les mêmes. En effet, dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ la première égalité (6.2.1) détermine deux valeurs de l'angle $\varkappa$: une dans le premier (ou le quatrième) quart du cercle trigonométrique et une autre respectivement dans le deuxième (ou le troisième) quart. Mais dans un cas, $\cos\varkappa$ est une quantité positive, alors que dans l'autre, elle est négative. Par conséquent, le signe du second membre de la deuxième égalité (6.2.1) permet tout de suite de faire un choix correct entre les deux valeurs de l'angle $\varkappa$ trouvées à l'aide de la première égalité (6.2.1). En le faisant, il convient d'avoir en vue que la valeur de $\cos\varphi$ est strictement positive tant dans la première que dans la deuxième des égalités (6.2.1), car $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$.

---

[1]) Remarquons que des difficultés analogues se rencontrent également lors de la recherche de la racine univoque des équations trigonométriques du problème le plus simple de la théorie des oscillations concernant la détermination de la phase d'une oscillation forcée en cas d'une perturbation harmonique d'un système linéaire.

On peut indiquer d'autres procédés permettant une détermination univoque de l'angle $\varkappa$. Profitons, par exemple, du fait que la fonction cotg $\varkappa/2$ est univoque (décroît de façon monotone) dans l'intervalle $]0, 2\pi[$ et en même temps s'exprime de façon rationnelle par l'intermédiaire des fonctions cos $\varkappa$ et sin $\varkappa$ à l'aide de la formule

$$\operatorname{cotg}\frac{\varkappa}{2}=\frac{1+\cos\varkappa}{\sin\varkappa}. \tag{6.2.3}$$

En y portant les valeurs de cos $\varkappa$ et sin $\varkappa$ tirées de la première et de la deuxième égalité (6.2.1), on obtient l'équation trigonométrique

$$\operatorname{cotg}\frac{\varkappa}{2}=\frac{\cos\varphi+b''}{-b'}=-\frac{\sqrt{1-(b''')^2}+b''}{b'}. \tag{6.2.4}$$

Cette équation possède une seule racine dans l'intervalle $]0, 2\pi[$. Il en est de même pour l'équation trigonométrique

$$\cos\frac{\varkappa}{2}=-\sqrt{\frac{\cos\varphi+b''}{2\cos\varphi}}\operatorname{sgn}b' \tag{6.2.5}$$

dont la validité est facile à vérifier.

Indiquons encore une représentation compacte de l'angle $\varkappa$ par l'intermédiaire des quantités données b' et b''. En partant de la deuxième et de la première équation (6.2.1), écrivons, en utilisant une formule d'Euler connue, la relation

$$\cos\varphi\,(\cos\varkappa+i\sin\varkappa)=\cos\varphi\exp(i\varkappa)=b''-ib'. \tag{6.2.6}$$

On en déduit, de nouveau en tenant compte du fait que pour $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$, cos φ est une quantité strictement positive, que

$$\varkappa=\operatorname{Arg}(b''-ib'), \tag{6.2.7}$$

ce qui permet de déterminer l'angle $\varkappa$ par une voie purement géométrique (fig. 130). Cette dernière formule sera développée par la suite, à l'occasion de l'application des paramètres de Cayley-Klein.

En recherchant l'angle ψ, on ne devra pas oublier qu'il ne joue qu'un rôle auxiliaire. La grandeur principale cherchée dans la théorie de la navigation par inertie est (en plus de la latitude φ du mobile et de l'azimut $\varkappa$ de la plate-forme stabilisée) la longitude λ du mobile qui ne prend, suivant la position du mobile sur la sphère terrestre, que les valeurs dans l'intervalle $[0, 2\pi[$. Par suite de la rotation de la Terre et de la modification de la longitude λ, l'angle ψ, égal suivant la formule (5.1.5) à la somme $Ut+\lambda$, peut augmenter ou diminuer dans le temps et donc se trouver dans l'un des intervalles $[2\pi k, 2\pi k+2\pi[$, où k est un nombre entier quelconque. En même temps, si à un instant fixé t, on ajoute à l'angle ψ ou on lui retranche un angle multiple de 2π, ceci correspondra, pour une

latitude constante, à une même position du mobile sur la sphère terrestre. Grâce à cette circonstance, on peut indiquer le procédé suivant pour rechercher la longitude λ dans l'intervalle de ses valeurs possibles $[0, 2\pi[$. On commence par déterminer un angle $\psi^* = \psi$ qui satisfait à la quatrième et à la cinquième relation (6.2.1) et vérifie la double inégalité $0 \leqslant \psi^* < 2\pi$. A cet effet, on procède

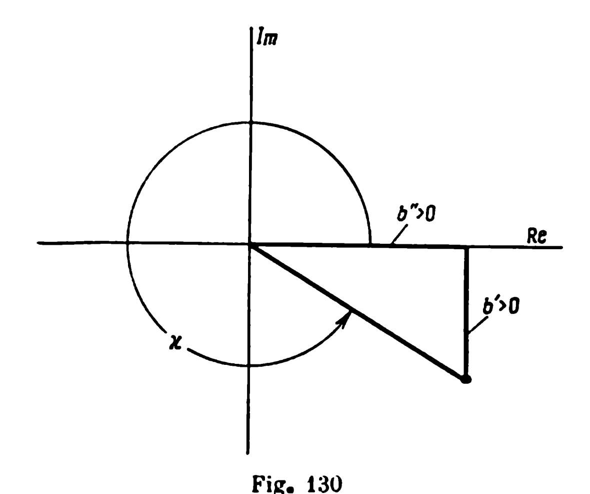


Fig. 130

exactement de la même manière que lors de la recherche de l'angle $\varkappa$. On obtient finalement les formules équivalentes

$$\operatorname{cotg} \frac{\psi^*}{2} = \frac{\cos \varphi + c'''}{a'''} = \frac{\sqrt{1-(b'')^2} + c'''}{a'''}, \tag{6.2.8}$$

$$\cos \frac{\psi^*}{2} = \sqrt{\frac{\cos \varphi + c'''}{2 \cos \varphi}} \operatorname{sgn} a''', \tag{6.2.9}$$

$$\psi^* = \operatorname{Arg}(c''' + ia'''), \tag{6.2.10}$$

qui sont analogues respectivement aux formules (6.2.4), (6.2.5) et (6.2.7). Puis, on ajoute à l'angle ψ^* la quantité 2π autant de fois que la différence entre le résultat obtenu et le produit Ut soit comprise dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ (fig. 131). C'est cette différence qui représentera évidemment la longitude cherchée λ à l'instant t. Ainsi donc, la formule donnant la longitude λ est de la forme

$$\lambda = \psi^* + (k+1)\, 2\pi - Ut. \tag{6.2.11}$$

Notons que dans la théorie des nombres, on définit k par le symbole

$$k = \left[\frac{Ut - \psi^*}{2\pi}\right] \tag{6.2.12}$$

qui désigne le plus grand nombre entier au plus égal à la quantité entre crochets. Soit, par exemple, $4\pi < Ut - \psi^* < 6\pi$. Alors $k = 2$ et donc $\lambda = \psi^* + 6\pi - Ut$, comme on peut s'en assurer directement (v. fig. 131). Si, pour $t > 0$, la différence $Ut - \psi^*$ est négative, elle est sûrement plus grande que -2π (car $0 < \psi^* < 2\pi$). Dans ce cas, on a $k = -1$ et, comme il fallait s'y attendre, la formule (6.2.11) donne

$$\lambda = \psi^* - Ut. \tag{6.2.13}$$

Dans la suite de ce chapitre, nous supposons partout qu'après avoir trouvé l'angle ψ^*, on applique pour la recherche de l'angle λ la

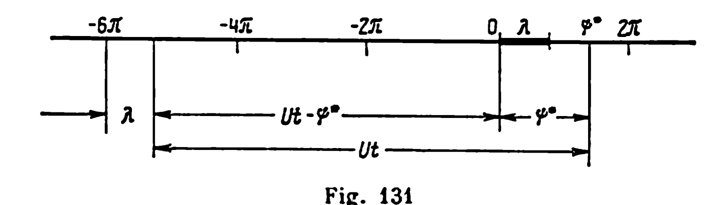


Fig. 131

procédure qui vient d'être décrite, et qu'on utilise, en particulier, les formules (6.2.11) et (6.2.12).

Faisons usage maintenant des paramètres de Cayley-Klein (6.1.35) et (6.1.38) introduits au paragraphe précédent pour établir les formules compactes qui expriment les angles ψ^*, et $\varkappa$ par les paramètres de Rodrigues-Hamilton. Reportons-nous d'abord à la formule (6.2.10). En y portant les expressions de c''' et a''' suivant les égalités (6.1.10) et (6.2.1), on obtient

$$\psi^* = \operatorname{Arg}\,[2l_0^2 + 2l_3^2 - 1 + 2i\,(l_1 l_3 + l_0 l_2)]. \tag{6.2.14}$$

Lorsqu'on utilise les fonctions (6.1.38), on peut mettre la même formule, comme il est aisé de s'en assurer, sous la forme suivante:

$$\psi^* = \operatorname{Arg}\,(g_2^2 - g_1^2). \tag{6.2.15}$$

Puis, en appliquant la formule (6.2.11), on détermine la longitude λ.

Pour déterminer l'angle $\varkappa$, on peut procéder d'une manière analogue. En tenant compte, une fois de plus, des égalités (6.1.10) et en se servant de la formule (6.2.7), on obtient

$$\varkappa = \operatorname{Arg}\,[2l_0^2 + 2l^2 - 1 - 2i\,(l_1 l_2 + l_0 l_3)]. \tag{6.2.16}$$

D'où, compte tenu des formules (6.1.35), on tire

$$\varkappa = \operatorname{Arg}\,(\bar{f}_2^2 - f_1^2), \tag{6.2.17}$$

où $\bar{f}_2$ est la quantité complexe conjuguée de f_2.

§ 3. Paramètres de Rodrigues-Hamilton et de Cayley-Klein, liés aux angles classiques d'Euler, dans la théorie de la navigation par inertie

Aux §§ 1 et 2 du présent chapitre, ainsi qu'au chapitre V, le système de référence non tournant $\xi^s\eta^s\zeta^s$ (v. fig. 115) a été choisi de telle sorte que les angles ψ, φ et $\varkappa$ (plus exactement, les angles ψ, $-\varphi$, $-\varkappa$) qui caractérisent la position d'un mobile et son orientation par rapport aux points cardinaux, forment l'ensemble des angles d'Euler-Krylov. Aux §§ 1 et 2, l'axe η^s était dirigé suivant l'axe de rotation de la Terre, et l'axe ζ^s se trouvait dans un plan qui se confondait à l'instant $t = 0$ avec le plan du méridien de Greenwich. Les formules (6.1.7) exprimant les relations entre les angles mentionnés et les paramètres de Rodrigues-Hamilton sont assez volumineuses. Ceci rend difficile l'étude des problèmes relatifs à la navigation par inertie aux hautes latitudes, c'est-à-dire près des pôles Nord et Sud de la Terre. Or, il est possible de choisir un autre système de coordonnées non tournant $\xi_s\eta_s\zeta_s$ tel que les angles ψ, φ et $\varkappa$ mentionnés plus haut (plus exactement, les angles $\psi + \pi/2$, $\pi/2 - \varphi$ et $-\varkappa$, v. fig. 132) soient les angles d'Euler. Les formules qui expriment les angles ψ, φ et $\varkappa$ par les nouveaux paramètres de Rodrigues-Hamilton s'avèrent dans ce cas plus simples et plus commodes pour la construction de la théorie de la navigation par inertie aux hautes latitudes, théorie qui fait appel, en particulier, à la projection dite stéréographique.

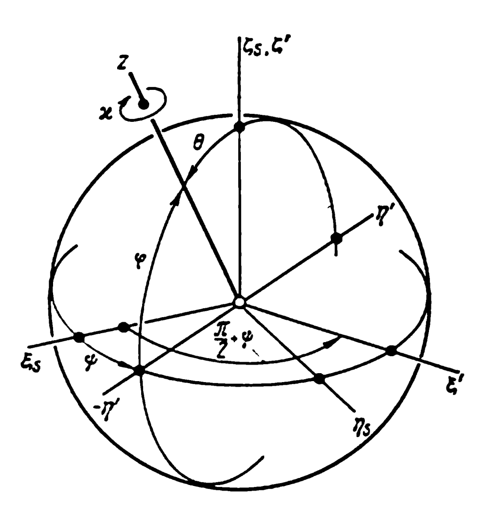


Fig. 132

Comme au chapitre V, utilisons dans le présent paragraphe et dans les paragraphes qui suivent, la désignation $\xi\eta\zeta$ pour le système de coordonnées tournant avec la Terre. Mais, cette fois, orientons les axes de ce système d'une autre façon. A savoir, dirigeons l'axe ζ suivant l'axe de rotation de la Terre, en l'orientant vers le pôle Nord, et plaçons l'axe ξ dans le plan du méridien de Greenwich (fig. 133). La longitude du mobile sera dans ce cas la mesure du dièdre formé entre le plan du méridien local $\eta'\zeta'$ et le plan de coor-

données $\xi\zeta$. Supposons que le nouveau système non tournant $\xi_s\eta_s\zeta_s$ coïncide avec le système $\xi\eta\zeta$ à l'instant $t = 0$. Dans ce cas, la relation (5.1.5) établie au § 1 du chapitre précédent sera encore valable, soit

$$\psi = Ut + \lambda, \tag{6.3.1}$$

où ψ est maintenant un angle que le plan du méridien local fait avec le plan $\xi_s\zeta_s$ du nouveau système de coordonnées non tournant $\xi_s\eta_s\zeta_s$.

Faisons tourner le système de coordonnées $\xi_s\eta_s\zeta_s$ d'un angle σ égal à $\psi + \pi/2$, autour de l'axe ζ_s (c'est-à-dire autour de l'axe

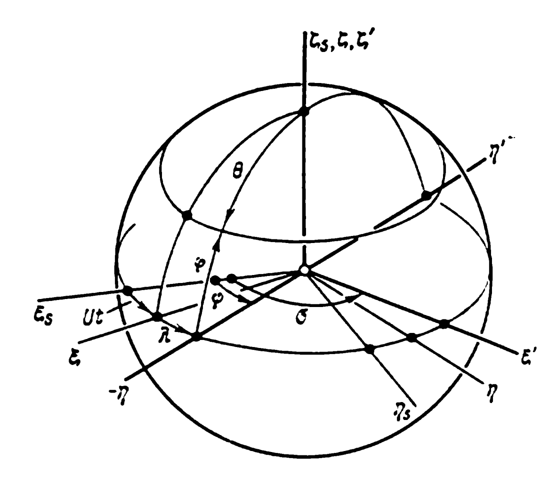


Fig. 133

terrestre) en sens inverse des aiguilles d'une montre si la rotation est observée du côté de l'Etoile polaire. Désignons par $\xi'\eta'\zeta'$ le nouveau système de coordonnées qui en résulte (fig. 132 et 134); son axe ζ' se confond avec l'axe ζ_s. Le plan de coordonnées $\eta'\zeta'$ contient, comme il a déjà été dit, le méridien local et donc le centre de la plate-forme stabilisée installée à bord du mobile (c'est-à-dire l'origine du système de coordonnées xyz rigidement lié à la plate-forme).

Effectuons maintenant une rotation du système de coordonnées $\xi'\eta'\zeta'$ autour de l'axe ξ', de l'angle θ, également en sens inverse des aiguilles d'une montre si la rotation est observée du côté de la partie positive de l'axe ξ' (fig. 134). Désignons par $x'y'z'$ la nouvelle position du système. L'axe x' de ce système de coordonnées (confondu avec l'axe ξ') est orienté parallèlement à la direction Est (E), l'axe y' parallèlement à la direction Nord (N) et l'axe z' est dirigé suivant la verticale géocentrique locale (Z), c'est-à-dire

suivant le rayon de la Terre. Les angles ψ, θ et donc l'orientation du système de coordonnées $x'y'z'$ par rapport au système $\xi_s\eta_s\zeta_s$ peuvent toujours être choisis de telle sorte que le centre de la plate-forme stabilisée soit situé sur l'axe z'. Il n'est pas difficile de voir que dans ce cas (v. fig. 134)

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi, \tag{6.3.2}$$

où φ est, comme précédemment, la latitude du mobile.

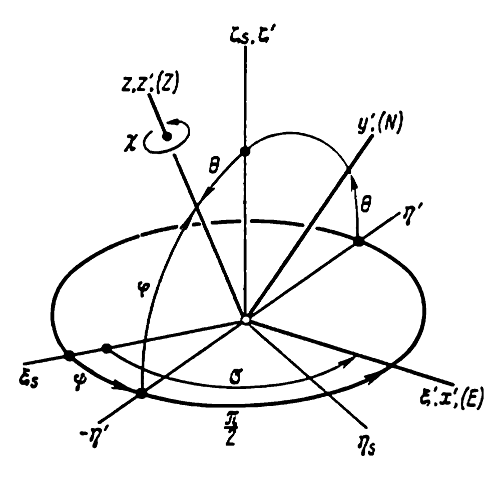


Fig. 134

La position de la plate-forme par rapport aux points cardinaux sera caractérisée par l'angle χ : c'est de cet angle qu'il faut tourner le système de coordonnées $x'y'z'$ autour de l'axe z' (fig. 135) en sens inverse des aiguilles d'une montre (si la rotation est observée d'en haut) pour que ses axes se trouvent respectivement parallèles aux axes du système de coordonnées xyz lié à la plate-forme stabilisée du mobile. Les axes z' et z de ces deux systèmes sont dirigés suivant une même droite passant par le centre de la Terre (fig. 136). L'angle χ est égal, au signe près, à l'azimut $\varkappa$ introduit au paragraphe précédent, soit

$$\chi = -\varkappa. \tag{6.3.3}$$

Le schéma symbolique (v. tome I, chap. III, § 5) des trois rotations successives décrites plus haut (v. fig. 134 à 136) est de la forme

$$\xi_s\eta_s\zeta_s \xrightarrow[\psi+\pi/2]{\zeta_s,\,\zeta'} \xi'\eta'\zeta' \xrightarrow[\theta]{\xi',\,x'} x'y'z' \xrightarrow[\chi]{z',\,z} xyz. \tag{6.3.4}$$

L'examen du schéma (6.3.4) montre que les angles $\psi + \pi/2$, θ et χ constituent le système classique d'angles d'Euler; il est tout

à fait analogue au schéma (3.5.23) indiqué au chap. III, § 5 du tome I. Par conséquent, pour construire la table des cosinus des angles que font entre eux les axes des systèmes de coordonnées $\xi_s\eta_s\zeta_s$ et xyz, il suffit de remplacer dans la table (3.5.24) donnée au même paragraphe, l'angle ψ par $\psi + \pi/2$, l'angle φ par χ et encore,

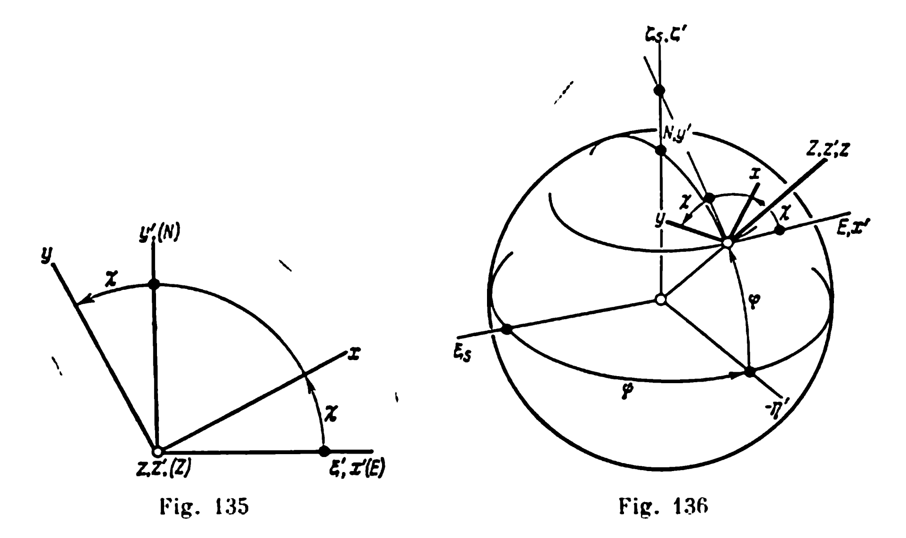


Fig. 135

Fig. 136

bien entendu, les appellations des axes x_0, y_0, z_0 respectivement par ξ_s, η_s, ζ_s. Après cela, il n'est pas difficile de représenter la table cherchée sous la forme

	ξ_s	η_s	ζ_s
x	$-\cos\psi\cos\theta\sin\chi - -\sin\psi\cos\chi$	$-\sin\psi\cos\theta\sin\chi + +\cos\psi\cos\chi$	$\sin\theta\sin\chi$
y	$-\cos\psi\cos\theta\cos\chi + +\sin\psi\sin\chi$	$-\sin\psi\cos\theta\cos\chi - -\cos\psi\sin\chi$	$\sin\theta\cos\chi$
z	$\cos\psi\sin\theta$	$\sin\psi\sin\theta$	$\cos\theta.$

(6.3.5)

Introduisons les paramètres de Rodrigues-Hamilton m_0, m_1, m_2, m_3 correspondant à la rotation finie à partir de la position, prise par le nouveau système de coordonnées non tournant $\xi_s\eta_s\zeta_s$, dans la position xyz. Les paramètres m_0, m_1, m_2, m_3 diffèrent, bien entendu, des paramètres l_0, l_1, l_2, l_3 qui caractérisent la rotation finie à partir de la position du système de coordonnées non tournant $\xi^s\eta^s\zeta^s$ (c'est-à-dire, celui qui a été utilisé aux §§ 1 et 2 du présent chapitre) dans la même position finale xyz. En effet, les

angles d'inclinaison de l'axe de rotation finie sur les axes du système xyz, ainsi que sur les axes de mêmes noms des systèmes de coordonnées $\xi_s\eta_s\zeta_s$ et $\xi^s\eta^s\zeta^s$, sont dans les deux cas différents. De même les valeurs des angles de rotation finie correspondants ne sont pas égales.

La table des cosinus des angles formés entre les axes du système de coordonnées non tournant $\xi_s\eta_s\zeta_s$ et du système xyz, dont les coefficients sont exprimés par les paramètres de Rodrigues-Hamilton m_0, m_1, m_2, m_3, peut être construite à partir de ce qui a été établi au chap. II, § 3 du tome I. Compte tenu des formules (6.1.10) du paragraphe précédent, elle est analogue à la table (6.1.9); il faut seulement remplacer dans les formules (6.1.10) les lettres l_0, l_1, l_2, l_3 par m_0, m_1, m_2, m_3. Il vient

$$\begin{array}{cccc} & \xi_s & \eta_s & \zeta_s \\ x & 2m_0^2+2m_1^2-1 & 2(m_1m_2+m_0m_3) & 2(m_1m_3-m_0m_2) \\ y & 2(m_1m_2-m_0m_3) & 2m_0^2+2m_2^2-1 & 2(m_2m_3+m_0m_1) \\ z & 2(m_1m_3+m_0m_2) & 2(m_2m_3-m_0m_1) & 2m_0^2+2m_3^2-1. \end{array} \quad (6.3.6)$$

En comparant les éléments qui occupent les mêmes positions dans les tables (6.3.5) et (6.3.6), c'est-à-dire les cosinus des angles que font entre eux les mêmes axes des systèmes de coordonnées xyz et $\xi_s\eta_s\zeta_s$, on peut écrire les égalités suivantes:

$$\begin{aligned} \cos\psi\sin\theta &= 2(m_1m_3+m_0m_2), \\ \sin\psi\sin\theta &= 2(m_2m_3-m_0m_1), \\ \cos\theta &= 2m_0^2+2m_3^2-1, \\ \sin\theta\cos\chi &= 2(m_2m_3+m_0m_1), \\ \sin\theta\sin\chi &= 2(m_1m_3-m_0m_2). \end{aligned} \quad (6.3.7)$$

La troisième de ces égalités permet de déterminer de façon univoque l'angle θ dans l'intervalle $]0, \pi[$, ce qui correspond, en vertu de la relation (6.3.2), à la valeur de la latitude φ dans l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$. A leur tour, la première et la deuxième des égalités (6.3.7) déterminent univoquement l'angle ψ dans l'intervalle $[0, 2\pi[$. En effet, pareillement à ce que nous avons fait au paragraphe précédent, nous pouvons obtenir à partir de ces deux égalités, la relation

$$\begin{aligned} \sin\theta\exp(i\psi) &= 2[m_1m_3+m_0m_2+i(m_2m_3-m_0m_1)] = \\ &= -2i(m_1+im_2)(m_0+im_3). \end{aligned} \quad (6.3.8)$$

Introduisons maintenant les nouveaux (par rapport au paragraphe précédent) paramètres de Cayley-Klein

$$h_1 = m_1+im_2, \quad h_2 = m_0+im_3. \quad (6.3.9)$$

Puisque $0 < \theta < \pi$, la valeur de $\sin\theta$ est strictement positive partout, sauf aux pôles de la Terre (où $\sin\theta$ s'annule). Compte

tenu de ce fait, on a, suivant les égalités (6.3.8) et (6.3.9),

$$\psi = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{Arg} h_1 + \operatorname{Arg} h_2. \qquad (6.3.10)$$

De même, en partant de la quatrième et de la cinquième des équations (6.3.7), on obtient la relation

$$\sin\theta \exp(i\chi) = 2\,[m_2m_3 + m_0m_1 + i\,(m_1m_3 - m_0m_2)] = \\ = 2\,(m_1 - im_2)\,(m_0 + im_3), \qquad (6.3.11)$$

d'où

$$\chi = \operatorname{Arg} h_2 - \operatorname{Arg} h_1. \qquad (6.3.12)$$

Les formules (6.3.10) et (6.3.12) peuvent conduire à des valeurs des angles ψ et χ situées hors de l'intervalle $[0, 2\pi[$. Dans un tel cas, il convient de les augmenter ou diminuer de la quantité 2π pour que chacun des angles ψ et χ se trouve dans l'intervalle $[0, 2\pi[$. Pour déterminer ensuite l'angle λ, il convient de se reporter aux formules (6.2.11) et (6.2.12) du paragraphe précédent et aux explications qui les concernent. De plus, en procédant de la même façon que pour la formule (6.2.4) établie au § 2 du présent chapitre, on peut proposer encore deux équations trigonométriques qui déterminent les angles ψ et χ univoquement dans l'intervalle $]0, 2\pi[$, soit

$$\operatorname{cotg}\frac{\psi}{2} = \frac{\sin\theta + 2\,(m_1m_3 + m_0m_2)}{2\,(m_2m_3 - m_0m_1)}, \qquad (6.3.13)$$

$$\operatorname{cotg}\frac{\chi}{2} = \frac{\sin\theta + 2\,(m_2m_3 + m_0m_1)}{2\,(m_1m_3 - m_0m_2)}. \qquad (6.3.14)$$

Signalons que le problème de la détermination des paramètres de Rodrigues-Hamilton d'après les valeurs données des angles d'Euler $\psi + \pi/2$, θ et χ, par comparaison des éléments des tables (6.3.5) et (6.3.6) et résolution des équations algébriques, exige d'effectuer des calculs très longs. Il est incomparablement plus simple d'utiliser la méthode de l'algèbre des quaternions, comme ceci a été fait au § 1 du présent chapitre. Les quaternions correspondant aux rotations finies successives, représentées par le schéma symbolique (6.3.4) du passage s'effectuant de la position du système de coordonnées $\xi_s\eta_s\zeta_s$ dans la position xyz (v. fig. 134 et 136), ont la forme suivante. A savoir, à la rotation qui fait passer le système $\xi_s\eta_s\zeta_s$ (v. fig. 134) dans la position $\xi'\eta'\zeta'$ (les axes ζ_s et ζ' sont confondus), il correspond le quaternion

$$r' = \cos\frac{\sigma}{2} + k\sin\frac{\sigma}{2}. \qquad (6.3.15)$$

Dans la dernière formule,

$$\sigma = \psi + \frac{\pi}{2} \qquad (6.3.16)$$

est l'angle, mentionné plus haut, dont il faut tourner le système de coordonnées $\xi_s\eta_s\zeta_s$ pour que ses axes soient respectivement confondus avec les axes du système $\xi'\eta'\zeta'$ (c'est-à-dire le premier des angles classiques d'Euler). Ensuite, le passage au système $x'y'z'$ (la rotation à partir du système $\xi'\eta'\zeta'$, de l'angle θ, autour des axes confondus ξ' et x' ; fig. 134 et 137) se caractérise par le quaternion

$$p' = \cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}. \qquad (6.3.17)$$

Enfin, le passage s'effectuant à partir du système $x'y'z'$ (ou, ce qui revient au même, du système géographique local ENZ) au système de coordonnées xyz est déterminé par le quaternion

$$r'' = \cos\frac{\chi}{2} + k\sin\frac{\chi}{2}. \qquad (6.3.18)$$

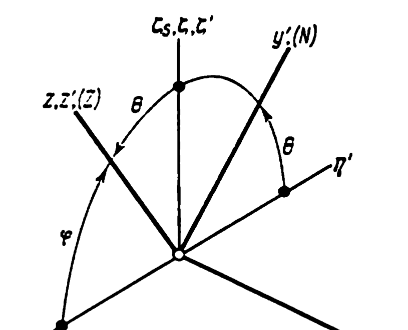


Fig. 137

Ici, ce sont les axes z' (Z) et z qui se confondent (v. fig. 135 et 136).

En vertu des propriétés des quaternions, décrites au chap. II, § 3 du tome I, on a l'égalité suivante :

$$m = m_0 + im_1 + jm_2 + km_3 = r' \odot p' \odot r'', \qquad (6.3.19)$$

où m est le quaternion caractérisant la rotation finie à partir de la position $\xi_s\eta_s\zeta_s$ directement dans la position xyz.

Si l'on applique maintenant la règle de multiplication des unités imaginaires des quaternions (v. tome I, chap. II, § 3), on obtient immédiatement

$$r' \odot p' = \cos\frac{\sigma}{2}\cos\frac{\theta}{2} + i\cos\frac{\sigma}{2}\sin\frac{\theta}{2} + j\sin\frac{\sigma}{2}\sin\frac{\theta}{2} + k\sin\frac{\sigma}{2}\cos\frac{\theta}{2} \qquad (6.3.20)$$

et

$$r' \odot p' \odot r'' = \cos\frac{\sigma}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\chi}{2} - \sin\frac{\sigma}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\chi}{2} + i\left(\cos\frac{\sigma}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\chi}{2} + \sin\frac{\sigma}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\chi}{2}\right) + j\left(\sin\frac{\sigma}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\chi}{2} - \cos\frac{\sigma}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\chi}{2}\right) + k\left(\sin\frac{\sigma}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\chi}{2} + \cos\frac{\sigma}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\chi}{2}\right). \qquad (6.3.21)$$

Ainsi qu'on l'a dit plus haut, le système d'angles d'Euler permet d'obtenir pour les paramètres de Rodrigues-Hamilton m_0, m_1, m_2, m_3 des formules plus simples que celles auxquelles conduit le système d'angles d'Euler-Krylov utilisé au paragraphe précédent. En effet, en comparant la partie réelle et la partie imaginaire de l'égalité quaternionique (6.3.19) et en tenant compte des formules (6.3.21) et (6.3.16), on obtient, moyennant quelques simplifications évidentes,

$$\begin{aligned} m_0 &= \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\sigma+\chi}{2} = \cos\frac{\theta}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi+\chi}{2}\right),\\ m_1 &= \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\sigma-\chi}{2} = \sin\frac{\theta}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi-\chi}{2}\right),\\ m_2 &= \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\sigma-\chi}{2} = \sin\frac{\theta}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi-\chi}{2}\right),\\ m_3 &= \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\sigma+\chi}{2} = \cos\frac{\theta}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi+\chi}{2}\right). \end{aligned} \qquad (6.3.22)$$

Il suffit maintenant de comparer les formules (6.3.22) et (6.1.7) pour se convaincre que ces dernières sont nettement plus simples.

L'algèbre des quaternions permet d'établir, d'une façon relativement simple, le lien qui existe entre le système de paramètres de Rodrigues-Hamilton m_0, m_1, m_2, m_3 et le système l_0, l_1, l_2, l_3 qui correspondait au § 1 du présent chapitre à la rotation finie à partir de la position $\xi^s\eta^s\zeta^s$ dans la position xyz. Pour mettre en évidence ce lien, effectuons des rotations auxiliaires suivantes. Servons-nous à nouveau du trièdre abc. Tournons-le de la position $\xi^s\eta^s\zeta^s$ de l'angle $-\pi/2$, autour de l'arête a confondue avec l'axe ξ^s, dans la position $\xi_0\eta_0\zeta_0$ (fig. 138). Le quaternion correspondant à cette rotation est

$$p^0 = \cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}. \qquad (6.3.23)$$

Puis, tournons le même trièdre abc autour de l'arête c qui se confond maintenant avec les axes ζ_0 et η_s (fig. 139), également de l'angle $-\pi/2$. Une telle rotation se décrit par le quaternion

$$r^0 = \cos\frac{\pi}{4} - k\sin\frac{\pi}{4}. \qquad (6.3.24)$$

Les nouvelles positions que les arêtes du trièdre abc prennent par suite de deux rotations précédentes coïncident, comme il est aisé de s'en assurer (fig. 139 et 140), avec les directions des axes du système de coordonnées non tournant $\xi_s\eta_s\zeta_s$ utilisé dans le présent paragraphe. Quant à la rotation finie s'effectuant de la position $\xi_s\eta_s\zeta_s$ dans la position xyz, elle se décrit, d'après ce qui précède, par le système de paramètres de Rodrigues-Hamilton m_0, m_1, m_2, m_3 ou, ce qui revient au même, par le quaternion m.

Il n'est pas difficile de voir que les quaternions satisfont aux égalités suivantes:

$$l = l_0 + il_1 + jl_2 + kl_3 = p^0 \odot r^0 \odot m =$$
$$= p^0 \odot r^0 \odot (m_0 + im_1 + jm_2 + km_3). \qquad (6.3.25)$$

En effet, chaque membre de cette suite d'égalités est un quaternion qui décrit une même rotation finie effectuée à partir de la position

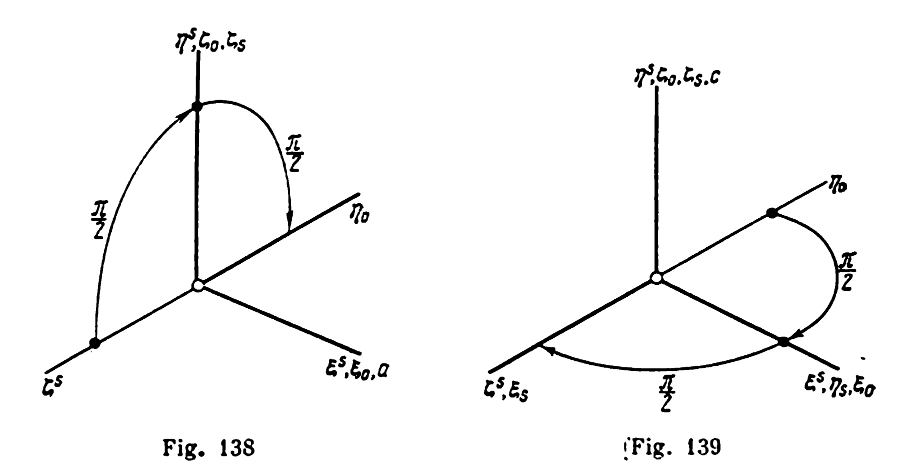


Fig. 138

Fig. 139

$\xi^s\eta^s\zeta^s$ dans la position xyz. Remarquons par ailleurs que, d'après les formules (6.3.23) et (6.3.24), le quaternion

$$q^0 = p^0 \odot r^0 = \frac{1}{2}(1 - i - j - k) \qquad (6.3.26)$$

correspond à la rotation finie à partir de la position $\xi^s\eta^s\zeta^s$ directement dans la position $\xi_s\eta_s\zeta_s$. Le cosinus de la moitié de l'angle de cette rotation est égal à la partie réelle du quaternion q^0, c'est-à-dire au nombre 1/2 (v. tome I, chap. II, § 3). Il s'ensuit que, d'après ce qui a été établi au paragraphe précédent du présent chapitre, l'angle lui-même se détermine dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ de façon univoque et est égal à 120°. La rotation se fait en sens inverse des aiguilles d'une montre autour de l'axe également incliné sur les directions négatives des axes ξ_s, η_s, ζ_s (ainsi que sur les axes ξ^s, η^s, ζ^s, v. fig. 140). En effet, toutes les parties imaginaires du quaternion sont dans ce cas égales à $-1/2$. D'après les formules (2.3.4) établies au chap. II, § 3 du tome I, chacune d'elles est égale au produit du sinus du demi-angle de rotation finie par le cosinus de l'angle inclus entre l'axe de rotation et l'axe de coordonnées correspondant.

Comme sin 60° est positif, les cosinus directeurs de l'axe de rotation finie sont négatifs et les angles qui leur correspondent sont obtus. On peut, certes, considérer que la même rotation se fait dans le sens des aiguilles d'une montre, cette fois autour de l'axe également incliné sur les directions positives des axes de coordonnées ξ_s, η_s, ζ_s. Dans ce cas, l'angle de rotation finie est à déterminer dans l'intervalle $]-2\pi, 0]$, c'est-à-dire à considérer comme négatif. Il s'avère que cet angle mesure $-120°$ et que le sinus de la moitié de cet angle

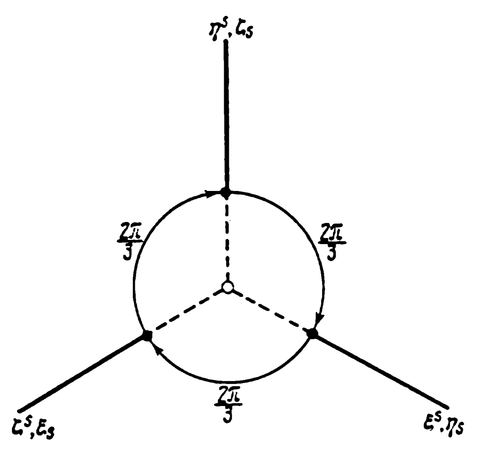


Fig. 140

est négatif. En conséquence, les cosinus directeurs de l'axe de rotation finie deviennent positifs (v. fig. 140).

Compte tenu de l'égalité (6.3.26), calculons le produit des quaternions figurant au dernier membre de la relation (6.3.25). En comparant maintenant les parties réelles et les parties imaginaires correspondantes du deuxième et du dernier membre de (6.3.25), on obtient les formules cherchées

$$\begin{aligned} 2l_0 &= m_0 + m_1 + m_2 + m_3, \\ 2l_1 &= -m_0 + m_1 + m_2 - m_3, \\ 2l_2 &= -m_0 - m_1 + m_2 + m_3, \\ 2l_3 &= -m_0 + m_1 - m_2 + m_3. \end{aligned} \tag{6.3.27}$$

Elles relient le nouveau système de paramètres de Rodrigues-Hamilton m_0, m_1, m_2, m_3 au système l_0, l_1, l_2, l_3 utilisé dans les deux paragraphes précédents. En considérant les formules (6.3.27) comme un système d'équations linéaires par rapport aux paramètres m_0, m_1, m_2, m_3, il n'est pas difficile d'exprimer ces paramètres par l'inter-

médiaire des paramètres l_0, l_1, l_2, l_3:

$$\begin{aligned} 2m_0 &= l_0 - l_1 - l_2 - l_3, \\ 2m_1 &= l_0 + l_1 - l_2 + l_3, \\ 2m_2 &= l_0 + l_1 + l_2 - l_3, \\ 2m_3 &= l_0 - l_1 + l_2 + l_3. \end{aligned} \tag{6.3.28}$$

Les égalités (6.3.27) et (6.3.28) se transforment, bien entendu, en des identités trigonométriques si l'on y remplace les paramètres de Rodrigues-Hamilton l_0, l_1, l_2, l_3 et m_0, m_1, m_2, m_3 par leurs expressions (6.1.7) et (6.3.22) par l'intermédiaire des angles ψ, φ, $\varkappa$, θ, σ et χ et qu'on tient compte des relations (6.3.2), (6.3.3) et (6.3.16).

Au § 1 du présent chapitre, nous avons obtenu les équations différentielles (6.1.31) à (6.1.33) qui contiennent comme quantités inconnues les paramètres de Rodrigues-Hamilton et comme quantités connues les projections ω_x, ω_y, ω_z de la vitesse angulaire de la plate-forme stabilisée, sur les axes du système de coordonnées qui lui est rigidement lié, soit

$$\begin{aligned} 2\frac{dl_0}{dt} &= -(\omega_x l_1 + \omega_y l_2 + \omega_z l_3), \\ 2\frac{dl_1}{dt} &= \omega_x l_0 - \omega_y l_3 + \omega_z l_2, \\ 2\frac{dl_2}{dt} &= \omega_x l_3 + \omega_y l_0 - \omega_z l_1, \\ 2\frac{dl_3}{dt} &= -\omega_x l_2 + \omega_y l_1 + \omega_z l_0. \end{aligned} \tag{6.3.29}$$

L'intégration de ces équations, avec les conditions initiales appropriées, permet de déterminer les paramètres de Rodrigues-Hamilton à tout instant t. Par là même, les relations (6.2.1) et les relations qui en découlent permettent de déterminer la longitude et la latitude du mobile, ainsi que l'orientation de la plate-forme stabilisée par rapport aux points cardinaux. Il en résulte que le cap du mobile, lui aussi, devient connu.

Les formules (6.3.27) et (6.3.28), traduisant le passage d'un système de paramètres de Rodrigues-Hamilton à un autre, permettent d'effectuer facilement dans les équations (6.3.29) le changement des variables cherchées l_0, l_1, l_2, l_3 par m_0, m_1, m_2, m_3. Pour obtenir les équations transformées, le procédé le plus simple consiste à former des combinaisons linéaires des premiers et seconds membres des équations (6.3.29), en utilisant les coefficients des paramètres l_0, l_1, l_2, l_3 figurant aux seconds membres des formules (6.3.28). C'est ainsi qu'en multipliant successivement par les nombres 1/2, —1/2, —1/2, —1/2 les premiers et les seconds membres des équations

(6.3.29) et en les additionnant séparément, on obtient compte tenu de la formule (6.3.28), la première équation, cette fois-ci par rapport aux variables m_0, m_1, m_2, m_3. Puis, en reprenant cette opération, on multiplie les premiers et les seconds membres des équations par les nombres 1/2, 1/2, —1/2, 1/2, et on obtient la deuxième équation par rapport aux mêmes variables. Finalement, on est conduit aux équations différentielles

$$
\begin{aligned}
2\frac{dm_0}{dt} &= -(\omega_x m_1 + \omega_y m_2 + \omega_z m_3),\\
2\frac{dm_1}{dt} &= \omega_x m_0 - \omega_y m_3 + \omega_z m_2,\\
2\frac{dm_2}{dt} &= \omega_x m_3 + \omega_y m_0 - \omega_z m_1,\\
2\frac{dm_3}{dt} &= -\omega_x m_2 + \omega_y m_1 + \omega_z m_0,
\end{aligned}
\tag{6.3.30}
$$

qui sont identiques aux équations (6.3.29) si l'on y remplace dès le début les désignations l_0, l_1, l_2, l_3 respectivement par m_0, m_1, m_2, m_3. On pourrait, bien entendu, prévoir ce résultat. En établissant les équations (6.3.29) au § 1 du présent chapitre, nous n'avons développé que des raisonnements de caractère tout à fait général, basés uniquement sur les propriétés de la table des cosinus des angles que font entre eux les axes du système de coordonnées non tournant $\xi^s\eta^s\zeta^s$ et du système xyz lié à la plate-forme stabilisée, et sur les formules d'Euler établies en cinématique du corps solide. Il est clair que le remplacement des désignations du système de coordonnées non tournant $\xi^s\eta^s\zeta^s$ et des paramètres de Rodrigues-Hamilton l_0, l_1, l_2, l_3 respectivement par $\xi_s\eta_s\zeta_s$ et m_0, m_1, m_2, m_3 n'apporte rien de substantiel.

§ 4. Construction de la solution générale des équations différentielles de la navigation par inertie

Les transformations effectuées à la fin du paragraphe précédent s'avèrent utiles pour la construction de la solution générale du système d'équations différentielles du type (6.3.29) ou (6.3.30), que nous allons exposer au cours du présent paragraphe. Considérons au préalable, de même que nous l'avons fait au chap. V, § 2 du présent tome, deux mouvements de la plate-forme stabilisée, à savoir: les mouvements principal et perturbé.

Supposons que le système de coordonnées xyz rigidement lié à la plate-forme occupe à l'instant initial une position $x_0y_0z_0$ si la plate-forme est animée du mouvement principal et une position $x_0^*y_0^*z_0^*$ si elle est animée du mouvement perturbé. Admettons qu'à

la première position correspondent les valeurs initiales m_{00}, m_{10}, m_{20}, m_{30} des paramètres de Rodrigues-Hamilton et à la deuxième position, les valeurs m_{00}^*, m_{10}^*, m_{20}^*, m_{30}^* des mêmes paramètres. Dans les deux cas, le mouvement est rapporté au système de coordonnées non tournant $\xi_s\eta_s\zeta_s$ introduit au début du paragraphe précédent.

Nous entendrons maintenant par xyz et $x^*y^*z^*$ les positions qui caractérisent respectivement l'orientation de la plate-forme stabilisée, lors de ses mouvements principal ou perturbé, à un même instant t.

Les mouvements principal et perturbé de la plate-forme peuvent se décrire par le même système d'équations différentielles (6.3.30), mais avec des conditions initiales différentes. Les fonctions du temps

$$\omega_x = \omega_x(t), \quad \omega_y = \omega_y(t), \quad \omega_z = \omega_z(t) \tag{6.4.1}$$

figurant dans ces équations sont les mêmes pour les deux mouvements. Elles représentent les projections de la vitesse angulaire de la plate-forme stabilisée, sur les axes du système de coordonnées xyz qui lui est lié.

Les paramètres de Rodrigues-Hamilton qui déterminent la position xyz par rapport au système de coordonnées non tournant $\xi_s\eta_s\zeta_s$ seront désignés comme précédemment par m_0, m_1, m_2, m_3, et ceux qui déterminent la position $x^*y^*z^*$ par rapport au même système, par m_0^*, m_1^*, m_2^*, m_3^*. Il est évident que $m_0 = m_0(t)$, $m_1 = m_1(t)$, $m_2 = m_2(t)$, $m_3 = m_3(t)$ sont les fonctions du temps qui satisfont aux équations différentielles (6.3.30), avec les conditions initiales m_{00}, m_{10}, m_{20}, m_{30}. De même, les fonctions du temps $m_0^* = m_0^*(t)$, $m_1^* = m_1^*(t)$, $m_2^* = m_2^*(t)$, $m_3^* = m_3^*(t)$ satisfont aux mêmes équations (6.3.30), mais avec les conditions initiales m_{00}^*, m_{10}^*, m_{20}^*, m_{30}^*.

Désignons par

$$n(t) = n_0(t) + in_1(t) + jn_2(t) + kn_3(t) \tag{6.4.2}$$

le quaternion qui détermine le passage du système à partir de la position initiale $x_0y_0z_0$ dans la position courante xyz, conformément aux équations du mouvement (6.3.30). En vertu des propriétés des quaternions, on a

$$m(t) = m(t_0)\odot n(t). \tag{6.4.3}$$

Ici,

$$m(t) = m_0(t) + im_1(t) + jm_2(t) + km_3(t) \tag{6.4.4}$$

est, comme précédemment, le quaternion caractérisant la position courante du système de coordonnées xyz par rapport au système non tournant $\xi_s\eta_s\zeta_s$, dans le mouvement non perturbé de la plate-

forme, et

$$m(t_0) = m_{00} + im_{10} + jm_{20} + km_{30} \qquad (6.4.5)$$

sa valeur à l'instant initial $t = t_0$.

D'après les conditions adoptées plus haut, il est évident que le quaternion $n^*(t)$ qui détermine à son tour le passage du système à partir de la position initiale perturbée $x_0^* y_0^* z_0^*$ dans la position courante perturbée $x^* y^* z^*$ ne diffère en rien du quaternion $n(t)$. En effet, le quaternion considéré, qui décrit le passage de la position initiale dans la position courante, dépend uniquement du caractère de variation, dans l'intervalle $[t_0, t]$, des fonctions $\omega_x (t)$, $\omega_y (t)$, $\omega_z (t)$ intervenant dans les équations (6.3.30). Or, ces fonctions ont la même forme tant pour le quaternion $n (t)$ que pour le quaternion $n^* (t)$. Ainsi, on a

$$n^* (t) = n (t) \qquad (6.4.6)$$

et donc

$$m^* (t) = m^* (t_0) \odot n (t), \qquad (6.4.7)$$

où les quaternions $m^* (t)$ et $m^* (t_0)$ ont le même sens que les quaternions $m (t)$ et $m (t_0)$, mais se rapportent au mouvement perturbé.

D'après ce qui a été démontré au § 2 du chapitre précédent, la rotation finie qui permet de passer, à un instant fixé, de la position de la plate-forme animée de mouvement non perturbé dans la position de la même plate-forme lors de son mouvement perturbé est la même pour tout instant. A savoir, l'axe de cette rotation finie occupe à tout instant une direction inchangée par rapport au système de coordonnées non tournant $\xi_s \eta_s \zeta_s$, et l'angle de rotation reste le même. Soit c le quaternion correspondant à une telle rotation. Effectuons la rotation déterminée par le quaternion c, à partir de la position du système de coordonnées non tournant $\xi_s \eta_s \zeta_s$ et désignons par uvw le système de coordonnées qui en résultera. Si l'on effectue maintenant, à partir de la position uvw, une rotation finie correspondant au quaternion $m (t_0)$, on obtiendra la position $x_0^* y_0^* z_0^*$. En effet, d'après ce qui a été établi au § 2 du chapitre précédent, deux rotations dont l'une s'effectue à partir du système $\xi_s \eta_s \zeta_s$ vers le système $x_0 y_0 z_0$, et l'autre, du système $x_0 y_0 z_0$ vers le système $x_0^* y_0^* z_0^*$ autour de l'axe fixé par rapport au système non tournant $\xi_s \eta_s \zeta_s$, sont permutables. Maintenant, de par les propriétés mêmes des quaternions, on a

$$c \odot m (t_0) = m^* (t_0), \qquad (6.4.8)$$

où $m^* (t_0)$ est, comme précédemment, le quaternion qui caractérise la position de la plate-forme stabilisée, par rapport au système non tournant $\xi_s \eta_s \zeta_s$, à l'instant initial $t = t_0$, dans le cas du mouvement perturbé, et $m (t_0)$, dans le cas du mouvement non perturbé.

Effectuons maintenant, à partir de la même position uvw, une rotation finie correspondant au quaternion $m\ (t)$. D'après ce qui a été démontré au § 2 du chapitre précédent, nous obtiendrons la position courante $x^*y^*z^*$ de la plate-forme dans son mouvement perturbé. Par analogie avec l'égalité (6.4.8), on obtient

$$c \odot m\ (t) = m^*\ (t). \tag{6.4.9}$$

Comme il a déjà été indiqué, $m^*\ (t)$ est ici le quaternion qui caractérise la position de la plate-forme stabilisée, par rapport au système non tournant $\xi_s\eta_s\zeta_s$, dans le mouvement perturbé, et $m\ (t)$, dans le mouvement non perturbé.

La validité de l'égalité (6.4.9) peut être démontrée à partir de la seule algèbre des quaternions, sans recourir aux considérations géométriques développées au § 2 du chapitre précédent. A cet effet, multiplions à droite les deux membres de l'égalité (6.4.8) par le quaternion $n\ (t)$. Il vient

$$c \odot m\ (t_0) \odot n\ (t) = m^*\ (t_0) \odot n\ (t). \tag{6.4.10}$$

Si maintenant on tient compte des relations (6.4.3) et (6.4.7), on obtient immédiatement l'égalité (6.4.9).

L'égalité quaternionique (6.4.9) peut se mettre sous la forme

$$(c_0 + ic_1 + jc_2 + kc_3) \odot [m_0\,(t) + im_1\,(t) + jm_2\,(t) + km_3\,(t)] = \\ = m_0^*\,(t) + im_1^*\,(t) + jm_2^*\,(t) + km_3^*\,(t), \tag{6.4.11}$$

où c_0, c_1, c_2, c_3 sont des constantes, parties réelle et imaginaire du quaternion c qui correspond, comme il a été indiqué, à une rotation finie s'effectuant de la position xyz dans la position $x^*y^*z^*$ et, en particulier, de la position $x_0y_0z_0$ dans $x_0^*y_0^*z_0^*$.

En comparant les parties réelles et les parties imaginaires correspondantes du premier et second membre de la dernière égalité, on obtient

$$\begin{aligned} m_0^*\,(t) &= c_0m_0\,(t) - c_1m_1\,(t) - c_2m_2\,(t) - c_3m_3\,(t), \\ m_1^*\,(t) &= c_0m_1\,(t) + c_1m_0\,(t) + c_2m_3\,(t) - c_3m_2\,(t), \\ m_2^*\,(t) &= c_0m_2\,(t) - c_1m_3\,(t) + c_2m_0\,(t) + c_3m_1\,(t), \\ m_3^*\,(t) &= c_0m_3\,(t) + c_1m_2\,(t) - c_2m_1\,(t) + c_3m_0\,(t). \end{aligned} \tag{6.4.12}$$

Supposons que le mouvement principal de la plate-forme stabilisée est donné et que par conséquent, les fonctions du temps $m_0\,(t)$, $m_1\,(t)$, $m_2\,(t)$, $m_3\,(t)$ sont connues. Les fonctions $m_0^*\,(t)$, $m_1^*\,(t)$, $m_2^*\,(t)$, $m_3^*\,(t)$ sont, elles aussi, solution du système d'équations différentielles (6.3.30), satisfaisant à d'autres conditions initiales (dans le cas général, quelconques). En vertu des formules (6.4.12), elles s'expriment par des combinaisons linéaires de fonctions connues,

à quatre coefficients c_0, c_1, c_2, c_3 indépendants du temps. Les équations différentielles (6.3.30) sont linéaires, et le système qu'elles forment est du quatrième ordre. Suivant la théorie générale des équations différentielles linéaires [1], toute solution du système (6.3.30), qui dépend linéairement de quatre constantes quelconques, est la solution générale si les solutions particulières

$$\begin{array}{cccc} [m_0(t), & m_1(t), & m_2(t), & m_3(t)], \\ [-m_1(t), & m_0(t), & -m_3(t), & m_2(t)], \\ [-m_2(t), & m_3(t), & m_0(t), & -m_1(t)], \\ [-m_3(t), & -m_2(t), & m_1(t), & m_0(t)] \end{array} \qquad (6.4.13)$$

correspondant à ces constantes sont linéairement indépendantes. Cette condition est satisfaite parce que le déterminant de Wronski

$$W = \begin{vmatrix} m_0(t) & m_1(t) & m_2(t) & m_3(t) \\ -m_1(t) & m_0(t) & -m_3(t) & m_2(t) \\ -m_2(t) & m_3(t) & m_0(t) & -m_1(t) \\ -m_3(t) & -m_2(t) & m_1(t) & m_0(t) \end{vmatrix} \qquad (6.4.14)$$

est non nul. En effet, élevons ce déterminant au carré. L'égalité obtenue

$$W^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad (6.4.15)$$

signifie, en particulier, que la matrice de ce déterminant est orthogonale. Le résultat serait évidemment le même si l'on calculait directement le déterminant W. On obtient

$$W = (m_0^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2)^2 = 1 \qquad (6.4.16)$$

On peut vérifier directement que chacun des quadruplets de fonctions (6.4.13) est une solution particulière du système d'équations différentielles (6.3.30) si l'un d'eux au moins est une solution particulière de ce système. En effet, soit, par exemple,

$$m_0 = m_0(t), \quad m_1 = m_1(t), \quad m_2 = m_2(t), \; m_3 = m_3(t) \quad (6.4.17)$$

une solution particulière du système (6.3.30). Posons maintenant

$$m_0 = -m_1(t), \quad m_1 = m_0(t), \quad m_2 = -m_3(t), \quad m_3 = m_2(t) \; (6.4.18)$$

[1] Voir, par exemple, *L. Pontriaguine* « Les équations différentielles ordinaires », Moscou, Ed. « Mir », 1969 (traduit du russe).

et introduisons ces fonctions dans les équations (6.3.30). Les égalités ainsi obtenues seront les mêmes que dans le cas où l'on y porte le quadruplet de fonctions (6.4.17), mais elles seront disposées un peu différemment. Suivant l'hypothèse adoptée plus haut, les égalités obtenues par suite de l'introduction du quadruplet de fonctions (6.4.17) dans les équations (6.3.30) doivent être des identités. Il s'ensuit que le quadruplet de fonctions (6.4.18) est, lui aussi, une solution particulière du système d'équations différentielles (6.3.30).

Ainsi, la solution (6.4.12) doit être considérée comme solution générale du système d'équations différentielles (6.3.30). Ceci signifie que lorsqu'on connaît le mouvement principal de la plate-forme stabilisée, on peut tout de suite déterminer la loi qui régit son mouvement perturbé, quelle que soit la variation des conditions initiales.

Dans les problèmes de navigation par inertie, les constantes c_0, c_1, c_2, c_3 sont les paramètres de Rodrigues-Hamilton, donc, elles doivent être limitées par la condition

$$c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2=1. \qquad (6.4.19)$$

A une condition analogue

$$m_0^2+m_1^2+m_2^2+m_3^2=1 \qquad (6.4.20)$$

obéissent également les fonctions $m_0(t)$, $m_1(t)$, $m_2(t)$, $m_3(t)$. Elevons maintenant au carré les premiers et les seconds membres des formules (6.4.12) et additionnons-les séparément. On obtient, après quelques transformations assez simples, l'égalité

$$(m_0^*)^2+(m_1^*)^2+(m_2^*)^2+(m_3^*)^2=1, \qquad (6.4.21)$$

qui est en accord avec ce que les fonctions $m_0^*(t)$, $m_1^*(t)$, $m_2^*(t)$, $m_3^*(t)$ sont les paramètres de Rodrigues-Hamilton et que seulement trois d'entre elles sont indépendantes. Ceci signifie que pour déterminer ces paramètres, il suffit de résoudre un système de trois quelconques équations différentielles (6.3.30) et qu'en vertu de la condition (6.4.19), le nombre de constantes arbitraires que comporte leur solution générale (6.4.12) est, lui aussi, égal à trois.

Soit maintenant à déterminer les paramètres de Rodrigues-Hamilton c_0, c_1, c_2, c_3 à partir des valeurs connues de m_{00}, m_{10}, m_{20}, m_{30} et m_{00}^*, m_{10}^*, m_{20}^*, m_{30}^*, c'est-à-dire d'après les positions initiales données de la plate-forme dans ses mouvements principal et perturbé. A cet effet, multiplions à droite les deux membres de l'égalité (6.4.8) par le quaternion

$$m^{-1}(t_0) = m_{00} - im_{10} - jm_{20} - km_{30}. \qquad (6.4.22)$$

Puisque

$$m(t_0)\odot m^{-1}(t_0) = (m_{00} + im_{10} + jm_{20} + km_{30})\odot$$
$$\odot\,(m_{00} - im_{10} - jm_{20} - km_{30}) = 1, \qquad (6.4.23)$$

cette multiplication donne l'égalité

$$c = m^* (t_0) \odot m^{-1} (t_0) \tag{6.4.24}$$

ou encore

$$c_0 + ic_1 + jc_2 + kc_3 = (m^*_{00} + im^*_{10} + jm^*_{20} + km^*_{30}) \odot$$
$$\odot (m_{00} - im_{10} - jm_{20} - km_{30}). \tag{6.4.25}$$

On en tire immédiatement les quantités cherchées

$$\begin{aligned} c_0 &= m_{00}m^*_{00} + m_{10}m^*_{10} + m_{20}m^*_{20} + m_{30}m^*_{30}, \\ c_1 &= m_{00}m^*_{10} - m_{10}m^*_{00} + m_{20}m^*_{30} - m_{30}m^*_{20}, \\ c_2 &= m_{00}m^*_{20} - m_{10}m^*_{30} - m_{20}m^*_{00} + m_{30}m^*_{10}, \\ c_3 &= m_{00}m^*_{30} + m_{10}m^*_{20} - m_{20}m^*_{10} - m_{30}m^*_{00}. \end{aligned} \tag{6.4.26}$$

Il est utile de faire la remarque suivante. Plus haut, la rotation finie qui faisait passer la plate-forme stabilisée de la position initiale non perturbée $x_0y_0z_0$ dans la position perturbée $x^*_0y^*_0z^*_0$ était identifiée à la rotation finie qu'on devait effectuer pour passer de la position du système de coordonnées non tournant $\xi_s\eta_s\zeta_s$ à celle du système intermédiaire uvw. Cette rotation se caractérisait par le quaternion c. Or, la rotation finie à partir de la position $x_0y_0z_0$ dans la position $x^*_0y^*_0z^*_0$ peut être déterminée par un autre quaternion

$$a = a_0 + ia_1 + ja_2 + ka_3, \tag{6.4.27}$$

si l'on part non pas du système $\xi_s\eta_s\zeta_s$ mais directement du système de coordonnées $x_0y_0z_0$. Il est évident que les parties réelles c_0 et a_0 des quaternions c et a sont égales, vu que, d'après ce qui a été établi au chap. II, § 3 du tome I, chacune d'elles est égale au cosinus de la moitié de l'angle d'une rotation qui fait passer la plate-forme de la position $x_0y_0z_0$ dans la position $x^*_0y^*_0z^*_0$. Quant aux parties imaginaires de ces quaternions, elles sont différentes dans le cas général. En effet, l'axe de rotation mentionnée fait des angles différents avec les axes correspondants des systèmes de coordonnées $x_0y_0z_0$ et $\xi_s\eta_s\zeta_s$.

Ainsi, soient deux rotations successives effectuées à partir de la position initiale qui se confond avec le système de coordonnées non tournant $\xi_s\eta_s\zeta_s$. La première, caractérisée par le quaternion m (t_0), conduit au système $x_0y_0z_0$, la seconde, caractérisée par le quaternion a, se fait de la position $x_0y_0z_0$ dans la position $x^*_0y^*_0z^*_0$. D'après les propriétés des quaternions exposées au chap. II, § 3 du tome I, on a l'égalité

$$m (t_0) \odot a = m^* (t_0), \tag{6.4.28}$$

où m^* (t_0) est le quaternion qui détermine, comme précédemment, la position du système $x^*_0y^*_0z^*_0$ par rapport au système non tournant

$\xi_s\eta_s\zeta_s$. Le rapprochement entre les égalités (6.4.28) et (6.4.8) donne la relation

$$c \odot m\ (t_0) = m\ (t_0) \odot a, \tag{6.4.29}$$

qui permet de trouver le quaternion a lorsqu'on connaît les quaternions c et $m\ (t_0)$. En multipliant à gauche les deux membres de cette relation par le quaternion $m^{-1}\ (t_0)$ défini par la formule (6.4.22) et en comparant les résultats, on obtient, en particulier, compte tenu de l'égalité (6.4.23),

$$a = m^{-1}\ (t_0) \odot c \odot m\ (t_0). \tag{6.4.30}$$

En opérant de façon identique, on peut obtenir la formule

$$c = m\ (t_0) \odot a \odot m^{-1}\ (t_0). \tag{6.4.31}$$

Si l'on multiplie les quaternions se trouvant au second membre de la formule (6.4.31), on obtient, après quelques transformations assez simples,

$$\begin{aligned}
c_0 &= a_0, \\
c_1 &= a_1 - 2a_1 (m_{20}^2 + m_{30}^2) + 2m_{10} (m_{20}a_2 + m_{30}a_3) + \\
&\qquad + 2m_{00} (m_{20}a_3 - m_{30}a_2), \\
c_2 &= a_2 - 2a_2 (m_{30}^2 + m_{10}^2) + 2m_{20} (m_{30}a_3 + m_{10}a_1) + \\
&\qquad + 2m_{00} (m_{30}a_1 - m_{10}a_3), \\
c_3 &= a_3 - 2a_3 (m_{10}^2 + m_{20}^2) + 2m_{30} (m_{10}a_1 + m_{20}a_2) + \\
&\qquad + 2m_{00} (m_{10}a_2 - m_{20}a_1).
\end{aligned} \tag{6.4.32}$$

Comme il a été indiqué précédemment, la première des relations (6.4.32) découle du fait géométrique simple que chacune des quantités c_0 et a_0 est égale au cosinus de la moitié de l'angle d'une rotation finie s'effectuant de la position $x_0y_0z_0$ dans la position $x_0^*y_0^*z_0^*$. Les autres relations sont susceptibles, elles aussi, d'une interprétation géométrique. Il n'est pas difficile de construire également les relations inverses des relations (6.4.32), c'est-à-dire exprimant les paramètres a_0, a_1, a_2, a_3 par l'intermédiaire de c_0, c_1, c_2, c_3.

Par analogie avec ce qui précède, si l'on introduit le quaternion

$$b = b_0 + ib_1 + jb_2 + kb_3 \tag{6.4.33}$$

correspondant au passage d'un trièdre quelconque, à un instant fixé, de la position xyz dans la position $x^*y^*z^*$, on obtient

$$m^*\ (t) = m\ (t) \odot b. \tag{6.4.34}$$

Compte tenu de l'égalité (6.4.9), on a

$$c \odot m\ (t) = m\ (t) \odot b, \tag{6.4.35}$$

d'où

$$b = m^{-1}\ (t) \odot c \odot m\ (t). \tag{6.4.36}$$

Ici, le quaternion $m^{-1}(t)$ est défini par une formule analogue à (6.4.22), soit

$$m^{-1}(t) = m_0(t) - im_1(t) - jm_2(t) - km_3(t). \quad (6.4.37)$$

Dans le cas général, les quaternions b et a ne sont pas égaux l'un à l'autre, mais pour des raisons exposées plus haut, on a toujours $b_0 = a_0$. De plus, il n'est pas difficile d'établir des formules du type (6.4.32) qui lient l'un à l'autre les systèmes de paramètres de Rodrigues-Hamilton b_0, b_1, b_2, b_3 et c_0, c_1, c_2, c_3.

Signalons encore la possibilité de représenter le système d'équations différentielles (6.3.30) sous une forme compacte à l'aide de quaternions. Multiplions les deux membres de la deuxième équation par l'unité imaginaire i, ceux de la troisième par j et ceux de la quatrième par k. En additionnant membre à membre les équations ainsi obtenues, on a, compte tenu de la formule (6.4.4) et des règles de multiplication des unités imaginaires,

$$2\frac{dm}{dt} = \omega_x(im_0 - m_1 - km_2 + jm_3) + \omega_y(jm_0 + km_1 - m_2 - im_3) + \\ + \omega_z(km_0 - jm_1 + im_2 - m_3). \quad (6.4.38)$$

La dernière relation peut encore se représenter sous forme d'une équation différentielle linéaire particulière

$$2\frac{dm}{dt} = m \odot \omega. \quad (6.4.39)$$

Ici, $m = m(t)$ est de nouveau le quaternion cherché qui caractérise la position du système de coordonnées xyz par rapport au système non tournant $\xi_s\eta_s\zeta_s$ et

$$\omega = \omega(t) = i\omega_x + j\omega_y + k\omega_z \quad (6.4.40)$$

est le quaternion, sans partie réelle, qui représente la vitesse angulaire donnée du système de coordonnées xyz lié à la plate-forme stabilisée.

Il semblerait à première vue que par analogie avec les équations différentielles matricielles, l'expression

$$m = m(0) \odot \exp\left[\frac{1}{2}\int_0^t \omega(t)\,dt\right] = \\ = m(0) \odot \exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t [i\omega_x(t) + j\omega_y(t) + k\omega_z(t)]\,dt\right\} \quad (6.4.41)$$

représente la solution générale de l'équation (6.4.39) si l'on entend par $m(0)$ la valeur donnée du quaternion $m = m(t)$ à l'instant initial $t = 0$. Malheureusement, il n'en est pas ainsi. Néanmoins,

la formule (6.4.41) est en tout cas applicable si la vitesse angulaire du solide (le quaternion ω) est constante en grandeur et en direction dans un certain intervalle de temps $[0, t_1]$. Supposons que la vitesse angulaire du solide varie de telle sorte qu'elle reste constante sur les intervalles de temps assez grands, tout et étant différente sur chacun d'eux. Dans ce cas, l'équation (6.4.39) peut être résolue par application répétée de la formule (6.4.41). Ceci étant, la valeur du quaternion m qu'il présente à l'extrémité d'un intervalle précédent doit être prise pour la valeur initiale de l'intervalle suivant, et la série correspondant à l'exponentielle au second membre de l'égalité (6.4.41) doit se terminer par le terme assurant la précision voulue des calculs.

Dans le cas général, en subdivisant l'intervalle de temps en des parties suffisamment petites, on peut considérer de façon approchée que pour chacune de ces parties le quaternion ω est constant. En remplaçant l'équation différentielle (6.4.39) par une équation aux différences, on est conduit par là même à la méthode approchée de résolution du problème qui consiste à déterminer le mouvement d'un corps solide à partir des projections de sa vitesse angulaire, données sous forme de fonctions du temps, sur les axes d'un système de coordonnées lié à ce corps.

Revenons aux équations différentielles (5.1.6) du problème principal de navigation par inertie (v. § 1 du chapitre précédent). D'après ce qui a été établi au cours de ce paragraphe, pour trouver la solution générale de ce système d'équations il suffit de connaître l'une quelconque de ses solutions particulières. A cet effet, il convient d'abord, en utilisant les formules (6.3.22) et en tenant compte des égalités (6.3.2) et (6.3.3), de passer des angles λ, φ et $\varkappa$ aux paramètres de Rodrigues-Hamilton m_0, m_1, m_2, m_3 et ensuite de faire usage de la solution générale (6.4.12). Puis, on peut revenir aux coordonnées géographiques λ et φ de la plate-forme et à son azimut $\varkappa$ en se servant des procédés décrits dans ce paragraphe, des relations (6.3.7), des égalités (6.3.2), (6.3.3) et de leurs corollaires, notamment des formules (6.3.13) et (6.3.14).

Il est naturel de se poser le problème de la recherche de la solution générale du système d'équations (5.1.6) sans passage intermédiaire aux paramètres de Rodrigues-Hamilton. Proposons-nous de donner une résolution géométrique de ce problème, en partant toujours des résultats obtenus au § 1 du présent chapitre. A toute solution du système d'équations différentielles (6.3.30), lequel est, d'après ce qui précède, équivalent au système initial (5.1.6), correspond un triplet de fonctions $\psi(t)$, $\varphi(t)$, $\varkappa(t)$. Utilisons de nouveau la sphère S ayant son centre à l'origine du système de coordonnées non tournant $\xi_s\eta_s\zeta_s$ qui lui est rigidement lié, et le rayon égal à celui de la sphère terrestre (la sphère S est non tournante). Sur cette sphère, les trois fonctions $\psi(t)$, $\varphi(t)$, $\varkappa(t)$ déter-

minent une suite de points Q de coordonnées polaires ψ et φ et des demi-droites q partant de ces points, qui sont tangentes à la sphère S et font l'angle $\varkappa$ avec le méridien du lieu correspondant (fig. 141, l'angle $\varkappa$ n'est pas représenté sur cette figure). Les points Q de la sphère S représentent les positions successives, prises par l'origine du système de coordonnées xyz lié à la plate-forme stabilisée, alors

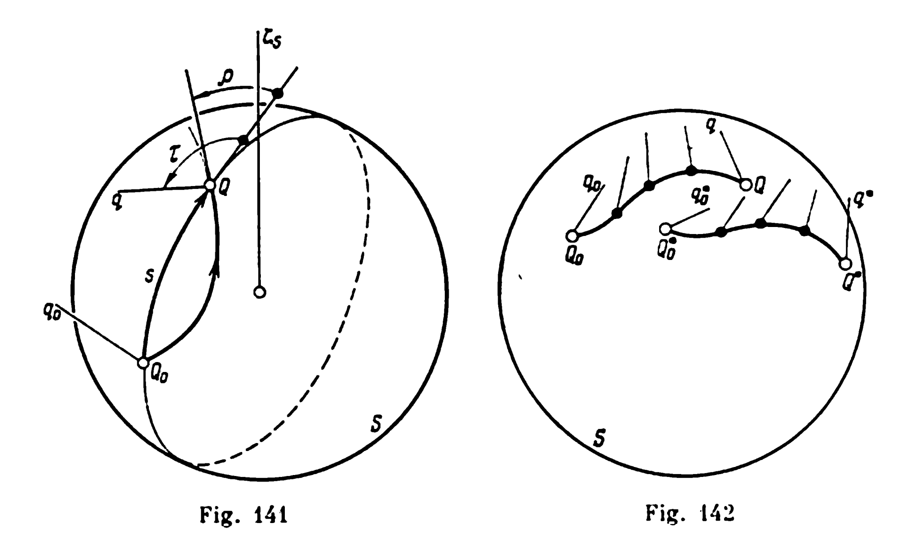


Fig. 141

Fig. 142

que les demi-droites q caractérisent l'orientation de cette plate-forme en azimut. Les demi-droites q peuvent représenter, en particulier, les positions successives de l'axe y ou d'une autre demi-droite quelconque liée à la plate-forme, si cette demi-droite se trouve dans le plan xy, passe par l'origine du système de coordonnées xyz et est donc tangente à la sphère S. La suite de points Q et de directions q mentionnés ci-dessus sera appelée *variété M*. Cette dernière se compose donc d'une courbe sphérique en tout point Q de laquelle est donnée la direction q.

Menons à partir du point initial Q_0 de la courbe sphérique susmentionnée $\psi = \psi(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ (c'est-à-dire à partir du point de coordonnées géographiques $\psi_0 = \psi(t_0)$ et $\varphi_0 = \varphi(t_0)$) un arc s de grand cercle jusqu'à un point courant quelconque Q de cette courbe. Traçons la tangente en Q à l'arc mentionné (fig. 141). L'angle τ inclus entre cette tangente et la direction donnée q peut être considéré comme fonction connue du point Q sur la courbe. Une autre fonction connue du même point Q est l'angle ρ que font entre elles la tangente en ce point à la courbe sphérique et la tangente mentionnée à l'arc s de grand cercle passant par le point Q. Enfin, la longueur de l'arc s doit être considérée, elle aussi, comme fonction connue du point

Q. D'après ce qui a été établi au § 2 du chapitre précédent, la forme de la courbe sphérique et l'orientation des directions q par rapport à cette courbe en tout point Q ne sont déterminées que par la suite des valeurs des fonctions $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$, $\omega_z(t)$ et ne dépendent ni des coordonnées polaires ψ_0 et φ_0 de son point initial, ni de la valeur initiale de l'azimut $\varkappa_0$. Par suite, lorsque les conditions initiales des équations (5.1.6) se modifient, l'ensemble de la courbe sphérique avec les directions données en chacun de ses points, c'est-à-dire la variété M, se déplace, comme un tout rigide, dans une nouvelle position M^* (fig. 142). Ainsi donc, les angles τ et ρ, ainsi que la longueur de l'arc s, considérés plus haut comme fonctions du point Q définies sur la courbe sphérique, resteront les mêmes, alors que les fonctions $\psi = \psi^*(t)$, $\varphi = \varphi^*(t)$ et $\varkappa = \varkappa^*(t)$ seront différentes. Maintenant, en appliquant les méthodes de la trigonométrie sphérique par exemple, on peut déterminer directement les fonctions $\psi^*(t)$, $\varphi^*(t)$, $\varkappa^*(t)$ à partir de leurs valeurs initiales $\psi_0^* = \psi^*(t_0)$, $\varphi_0^* = \varphi^*(t_0)$, $\varkappa_0^* = \varkappa^*(t_0)$ et, bien entendu, de la solution initiale des équations (5.1.6), c'est-à-dire à partir des fonctions $\psi(t)$, $\varphi(t)$ et $\varkappa(t)$.

§ 5. Navigation aux hautes latitudes. Application de la projection stéréographique

Lorsque le mobile passe près d'un pôle de la Terre, l'utilisation, aux besoins de la navigation, des coordonnées géographiques ordinaires et du cap devient difficile et dans certains cas même impossible. Au pôle lui-même, les notions de longitude et de cap perdent leur sens. De même, lorsque le mobile se déplace sur un arc de grand cercle au voisinage immédiat d'un pôle, sa longitude et son cap varient brusquement, de sorte qu'il est difficile de les mesurer avec une précision suffisante pour la pratique.

Divers procédés ont été proposés pour vaincre les difficultés auxquelles se heurte la détermination de la position d'un mobile aux hautes latitudes. Un d'eux consistait, en particulier, à utiliser des coordonnées polaires ayant leur « pôle » sur l'équateur, *coordonnées* dites *quasi géographiques*. Dans ce cas, les pôles réels de la Terre, pôles Nord et Sud, se trouvent situés sur « l'équateur » d'un réseau quasi géographique correspondant, si bien que les difficultés liées à la détermination de la position du mobile et de son cap s'avèrent éliminées (d'autres positions des « pôles » de réseau quasi géographique sont également possibles). Un autre procédé préconisait l'emploi de la projection de la région circumpolaire sur le plan tangent à la sphère terrestre en son pôle et l'introduction dans ce plan des coordonnées rectangulaires ordinaires. Pour des endroits situés au voisinage du pôle lui-même, ces deux procédés sont également commodes.

Les équations différentielles (5.1.3) du problème principal de navigation par inertie, proposées au § 1 du chapitre précédent, présentent une singularité pour $\varphi = \pm\pi/2$, c'est-à-dire précisément aux pôles de la Terre. C'est pourquoi, leur intégration, c'est-à-dire la recherche des variables λ, φ et $\varkappa$ pour un mobile se trouvant dans les régions polaires, cause des difficultés. Or, le passage aux paramètres de Rodrigues-Hamilton fait disparaître les singularités des équations

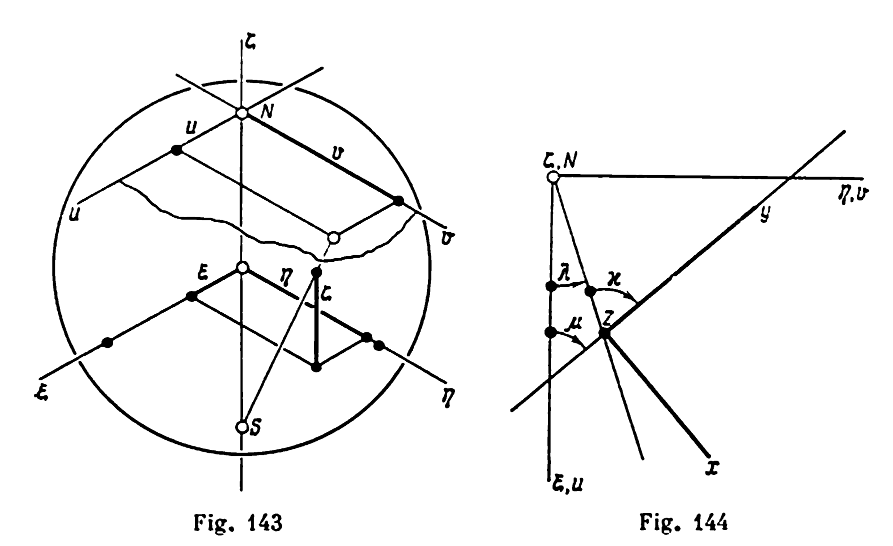


Fig. 143 Fig. 144

différentielles de la navigation par inertie, vu que ces équations deviennent linéaires. Ainsi, au point de vue de l'intégration des équations différentielles de la navigation par inertie exprimées en paramètres de Rodrigues-Hamilton, le mouvement d'un mobile dans les régions polaires n'apporte aucune complication. En même temps, le retour aux coordonnées géographiques comporte inévitablement une perte de précision dans la détermination de la longitude et du cap au voisinage d'un pôle. Ceci ne se produit pas si l'on passe des paramètres de Rodrigues-Hamilton aux coordonnées quasi géographiques. Les formules de passage correspondantes sont faciles à établir à l'aide des méthodes exposées plus haut. Le procédé de navigation lié à la projection de la région polaire sur le plan tangent à la sphère terrestre en son pôle est également commode pour la réalisation de la solution des équations de la navigation par inertie en paramètres de Rodrigues-Hamilton. Dans ce cas, il y a avantage à utiliser non pas la projection orthogonale de la sphère terrestre sur le plan mentionné mais la projection stéréographique que l'on construit de la façon suivante (fig. 143). A partir du pôle Sud (pôle Nord, en cas de la navigation dans l'Antarctide) on mène par un

point correspondant à la position du mobile sur la sphère terrestre, une droite jusqu'à son intersection avec le plan tangent à la sphère au pôle Nord (respectivement, au pôle Sud). Le point d'intersection de cette droite avec le plan est appelé *projection stéréographique* du point de la sphère [1]).

Examinons maintenant la vue d'en haut des méridiens qui convergent vers le pôle (fig. 144). Supposons comme plus haut que le mobile se déplace au voisinage d'un pôle et que le plan xy lié à la plate-forme stabilisée qu'il porte est constamment horizontal. L'angle $\varkappa$ formé par l'axe y avec le méridien du lieu où se trouve le mobile sera appelé, comme précédemment, l'azimut de la plate-forme. Projetons l'axe y sur le plan tangent à la sphère terrestre en son pôle. En vertu du théorème sur l'angle extérieur d'un triangle (v. fig. 144), on a l'égalité approchée suivante:

$$\varkappa - \lambda = \mu. \tag{6.5.1}$$

Ici, λ est l'angle inclus entre le méridien du mobile et le méridien de Greenwich, c'est-à-dire la longitude, et μ l'angle formé par la projection de l'axe y avec la projection du méridien de Greenwich sur le plan tangent à la sphère terrestre en son pôle. On dira que l'angle μ est l'*azimut de Greenwich* de la plate-forme.

A la différence de l'azimut vrai $\varkappa$, l'azimut de Greenwich μ se détermine au pôle de façon univoque. Signalons à ce propos la circonstance suivante. Fixons un instant quelconque. Dans ce cas, en vertu des formules (6.3.1) et (6.3.2), à chaque couple de valeurs des angles ψ et θ correspond un endroit concret sur la sphère terrestre, caractérisé par les coordonnées géographiques λ et φ. Ceci étant, les paramètres de Rodrigues-Hamilton ne sont pas, certes, déterminés de façon univoque. En effet, suivant les formules (6.3.22) et (6.3.3), ils dépendent encore de la valeur de l'azimut $\varkappa$ (c'est-à-dire de l'orientation, par rapport aux points cardinaux, de la plate-forme stabilisée et du système de coordonnées xyz qui lui est lié). Introduisons maintenant dans les formules (6.3.22) la valeur $\theta = 0$ correspondant à la position du mobile au pôle Nord même ($\varphi = \pi/2$). Compte tenu des relations (6.3.1) et (6.3.3), on obtient dans ce cas pour les paramètres m_0, m_1, m_2, m_3 les égalités suivantes:

$$\begin{aligned} m_0 &= \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi+\chi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{Ut}{2} - \frac{\varkappa-\lambda}{2}\right), \\ m_1 &= 0, \\ m_2 &= 0, \\ m_3 &= \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi+\chi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{Ut}{2} - \frac{\varkappa-\lambda}{2}\right). \end{aligned} \tag{6.5.2}$$

[1]) Dans le cas où les dimensions linéaires de la région de la sphère au voisinage du pôle sont petites devant le rayon de la Terre, la projection orthogonale coïncide pratiquement avec la projection stéréographique.

Il en résulte de façon formelle qu'au pôle même, les valeurs des paramètres de Rodrigues-Hamilton dépendent de la différence des angles $\varkappa$ et λ dont chacun, pris isolément, n'a au pôle aucun sens. Pourtant, d'après la formule (6.5.1), leur différence représente partout, au voisinage du pôle, l'azimut de Greenwich de la plate-forme. Ce dernier a un sens au pôle même, parce qu'il est un angle formé entre les projections du méridien de Greenwich et de l'axe y (lié à la plate-forme) sur le plan tangent à la sphère terrestre en son pôle. Les égalités (6.5.2) peuvent donc être considérées comme égalités limites pour un mobile qui s'approche infiniment du pôle, et peuvent donc se présenter sous la forme

$$\begin{aligned} m_0 &= \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{Ut}{2}-\frac{\mu}{2}\right),\\ m_1 &= 0,\\ m_2 &= 0,\\ m_3 &= \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{Ut}{2}-\frac{\mu}{2}\right). \end{aligned} \qquad (6.5.3)$$

Ainsi, l'introduction de l'azimut de Greenwich μ permet de déterminer les valeurs des paramètres de Rodrigues-Hamilton au pôle même. On peut donc justifier leur variation continue tant au cours du mouvement du mobile dans la région polaire, au voisinage du pôle, que lors du passage au-dessus de celui-ci.

On voit bien que l'angle $\varkappa$ qui subit de brusques changements, lorsque la plate-forme se déplace près des pôles, n'est pas commode pour caractériser l'orientation de la plate-forme stabilisée par rapport aux repères terrestres. Il y a donc intérêt à le remplacer par l'angle μ, c'est-à-dire par l'azimut de Greenwich de la plate-forme. Pour la même raison, l'angle λ, c'est-à-dire la longitude du mobile, est, lui aussi, incommode pour caractériser la position du mobile dans la région polaire.

Du fait de ce qui précède, déterminons la position du mobile par deux coordonnées cartésiennes u et v de la projection stéréographique du centre de la plate-forme stabilisée (c'est-à-dire de l'origine du système de coordonnées xyz qui lui est lié) sur le plan tangent à la sphère terrestre en son pôle. Pour système de coordonnées uv choisissons (fig. 143 et 145) le système ayant son origine au pôle Nord (ou Sud), son axe u dirigé suivant la tangente au méridien de Greenwich et son axe v, suivant la tangente au méridien de longitude $\lambda = 90°$. Il est évident que les axes u et v sont respectivement parallèles aux axes ξ et η du système de coordonnées $\xi\eta\zeta$ tournant avec la Terre, que nous avons examiné au § 3 du présent chapitre. La latitude φ du mobile (fig. 145 et 146) est reliée à ces coordonnées par une relation approchée qui découle des égalités

$$|u+iv| = \sqrt{u^2+v^2} = r = 2R\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} \simeq R\theta = R\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) \qquad (6.5.4)$$

dans lesquelles R est le rayon de la Terre et r le module de la quantité complexe $u+iv$, c'est-à-dire le rayon vecteur de la projection stéréographique de l'origine du système de coordonnées xyz sur le plan complexe uv.

Le produit

$$R\theta \simeq r, \tag{6.5.5}$$

dans lequel θ est l'angle défini par l'égalité (6.3.2), représente la distance, suivant l'arc de grand cercle, entre le mobile et le pôle (v. fig. 146).

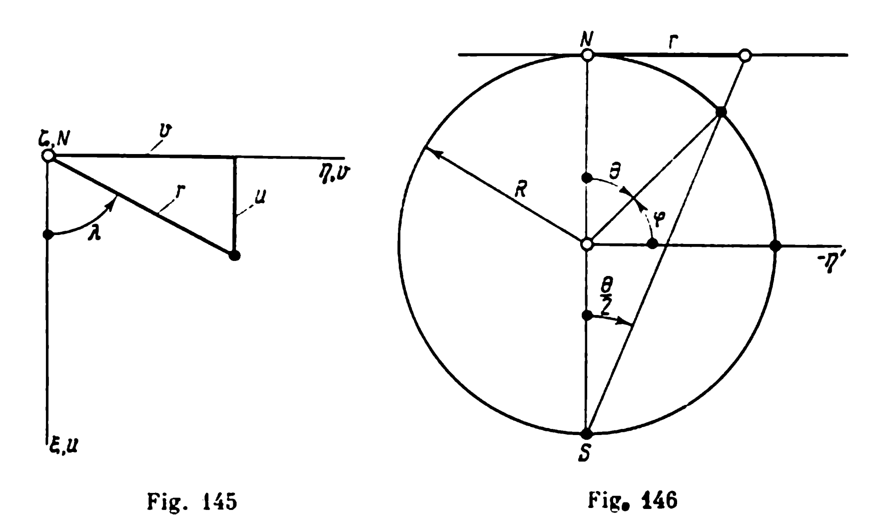


Fig. 145

Fig. 146

La longitude λ du lieu se détermine à son tour (v. fig. 145) par résolution des équations trigonométriques

$$r\cos\lambda = u, \quad r\sin\lambda = v, \tag{6.5.6}$$

comme il a été montré, par exemple, au § 2 du présent chapitre. Pour rechercher l'angle λ, on peut, en particulier, utiliser l'équation

$$\operatorname{cotg}\frac{\lambda}{2}=\frac{r+u}{v}. \tag{6.5.7}$$

Il est évident aussi que

$$\lambda = \operatorname{Arg}(u+iv). \tag{6.5.8}$$

Passons maintenant à la détermination des coordonnées u et v de la projection stéréographique de l'origine du système de coordonnées xyz sur le plan uv, en considérant que les coordonnées ξ, η, ζ de la position du mobile sur la sphère terrestre sont données. A cet effet, il suffit de mettre à profit les considérations de la géométrie

élémentaire. La similitude de deux paires de triangles rectangles (l'une d'elles est représentée à la fig. 147, v. aussi fig. 143) donne

$$\frac{\xi}{R+\zeta}=\frac{u}{2R}, \quad \frac{\eta}{R+\zeta}=\frac{v}{2R}. \tag{6.5.9}$$

D'où

$$u+iv=2R\frac{\xi+i\eta}{R+\zeta}. \tag{6.5.10}$$

La projection stéréographique d'une sphère sur un plan jouit de la propriété de conformité qui est la suivante [1]). Deux courbes

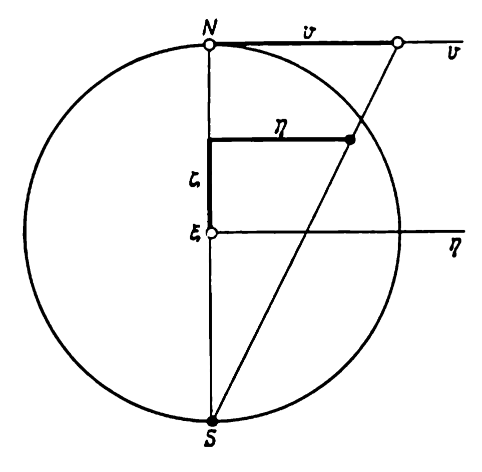


Fig. 147

qui se coupent sur la sphère sous un angle quelconque, se projettent sur le plan sous forme de deux courbes qui se coupent sous le même angle; des arcs de grand cercle infiniment petits, de même longueur, partant d'un point commun sur la sphère se projettent, dans le cas général, avec changement (augmentation) de leur longueur en arcs infiniment petits égaux sur le plan de projection stéréographique. Les petits arcs situés au voisinage d'un pôle se projettent sur le plan pratiquement sans modification.

Indiquons encore une particularité de la projection stéréographique de la sphère sur le plan. Une circonférence quelconque (de diamètre fini) située sur la sphère se projette sur le plan en une circonférence (dans un cas particulier, en une droite) ayant un autre diamètre (plus grand). Le centre d'une circonférence sur la sphère ne se pro-

[1]) Voir, par exemple, *M. Lavrentiev*, *B. Chabat* « Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe ». Moscou, Ed. « Mir », 1972 (traduit du russe).

jette pas, dans le cas général, en le centre de la circonférence sur le plan. Notons que la projection stéréographique est étroitement liée aux fonctions homographiques d'une variable complexe $u + iv$ et aux rotations finies du corps solide [1]).

Envisageons une position quelconque du mobile sur la sphère terrestre. Traçons par le centre de sa plate-forme stabilisée deux arcs: un arc de méridien local et un arc de grand cercle dont le

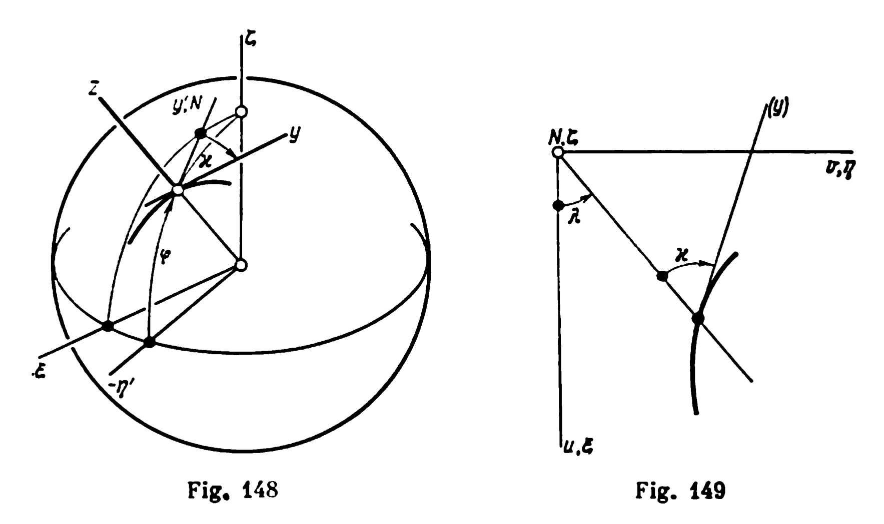


Fig. 148 Fig. 149

plan se confond avec le plan yz du système de coordonnées xyz lié à la plate-forme (fig. 148). L'angle $\varkappa$ de ces deux arcs est l'azimut de la plate-forme.

La projection stéréographique considérée transforme le méridien du lieu en une droite passant par l'origine du système de coordonnées uv (fig. 149). A son tour, le petit arc de grand cercle situé dans le plan yz et adjacent au centre de la plate-forme, se transforme en un petit arc de circonférence. Ce dernier passe par la projection du centre de la plate-forme sur le plan uv et, en vertu de la conformité, l'angle qu'il fait avec l'image du méridien est encore égal à l'azimut $\varkappa$, c'est-à-dire à l'angle formé entre le plan du méridien et le plan de coordonnées yz.

En résolvant le système d'équations différentielles (6.3.30), on peut déterminer les valeurs courantes des paramètres de Rodrigues-Hamilton m_0, m_1, m_2, m_3 qui caractérisent la position du mobile (plus exactement, la position de l'origine du système de coordonnées xyz lié à sa plate-forme stabilisée) par rapport au système non tournant $\xi_s\eta_s\zeta_s$. Les paramètres m_0, m_1, m_2, m_3 étant connus, la

[1]) Voir l'annexe, p. 373.

résolution des équations trigonométriques (6.3.7) permet de calculer la latitude φ, l'angle ψ et l'azimut $\varkappa$ de la plate-forme ; ce dernier permet de déterminer le cap du navire. Les formules (6.3.10) et (6.3.12) à (6.3.14) servent, elles aussi, à ce but.

Montrons maintenant comment, à partir des paramètres de Rodrigues-Hamilton, on peut trouver les coordonnées u et v du point qui représente le mobile dans le plan uv. Remarquons tout d'abord que les coordonnées ξ_s, η_s, ζ_s du mobile dans le système de coordonnées non tournant $\xi_s\eta_s\zeta_s$ s'expriment par les formules

$$\begin{aligned} \xi_s &= R\cos(\widehat{z,\ \xi_s}),\\ \eta_s &= R\cos(\widehat{z,\ \eta_s}),\\ \zeta_s &= R\cos(\widehat{z,\ \zeta_s}),\end{aligned} \qquad (6.5.11)$$

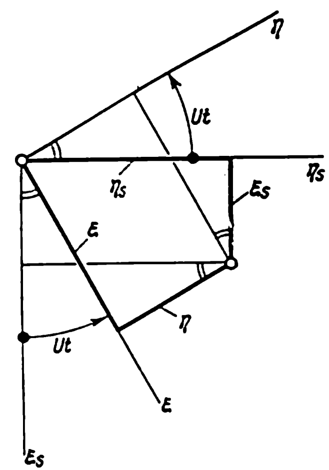


Fig. 150

car c'est l'axe z, lié à la plate-forme stabilisée, qui est dirigé suivant le rayon de la Terre mené vers l'origine du système de coordonnées xyz. En faisant usage de la table (6.3.6), on obtient

$$\begin{aligned} \xi_s &= 2R\,(m_1m_3 + m_0m_2),\\ \eta_s &= 2R\,(m_2m_3 - m_0m_1),\\ \zeta_s &= R\,(2m_0^2 + 2m_3^2 - 1).\end{aligned} \qquad (6.5.12)$$

Par ailleurs, puisque (v. fig. 133 et 150)

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_s\cos Ut + \eta_s\sin Ut,\\ \eta &= -\xi_s\sin Ut + \eta_s\cos Ut,\end{aligned} \qquad (6.5.13)$$

on a

$$\xi + i\eta = (\xi_s + i\eta_s)\exp(-iUt). \qquad (6.5.14)$$

Suivant les deux premières formules (6.5.12),

$$\begin{aligned} \xi_s + i\eta_s &= 2R\,(m_1m_3 + m_0m_2 + im_2m_3 - im_0m_1) =\\ &= -2Ri\,(m_1 + im_2)(m_0 + im_3). \end{aligned} \qquad (6.5.15)$$

Ainsi, compte tenu de la relation (6.5.14), on a

$$\xi + i\eta = -2Ri\,(m_1 + im_2)(m_0 + im_3)\exp(-iUt). \qquad (6.5.16)$$

Etant donné que d'après la troisième formule (6.5.12),

$$R + \zeta_s = R + \zeta = 2R\,(m_0^2 + m_3^2), \qquad (6.5.17)$$

on obtient, d'après l'égalité (6.5.10), pour la quantité complexe $u + iv$ l'expression suivante:

$$u + iv = \frac{-2Ri\,(m_1 + im_2)\,(m_0 + im_3)}{m_0^2 + m_3^2} \exp(-iUt). \qquad (6.5.18)$$

En comparant dans la formule (6.5.18) séparément les parties réelles et les parties imaginaires des deux membres, on obtient

$$\left.\begin{aligned} u &= 2R\,\frac{(m_1m_3 + m_0m_2)\cos Ut + (m_2m_3 - m_0m_1)\sin Ut}{m_0^2 + m_3^2}, \\ v &= 2R\,\frac{-(m_1m_3 + m_0m_2)\sin Ut + (m_2m_3 - m_0m_1)\cos Ut}{m_0^2 + m_3^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (6.5.19)$$

Utilisons maintenant dans l'expression (6.5.18) les formules (6.3.9) pour les paramètres de Cayley-Klein h_1 et h_2. Il vient

$$u + iv = -2Ri\,\frac{h_1h_2}{|h_2|^2} \exp(-iUt) = 2R\,\frac{h_1}{h_2} \exp\left[-i\left(Ut + \frac{\pi}{2}\right)\right]. \qquad (6.5.20)$$

Pour déterminer la longitude λ par l'intermédiaire des paramètres de Cayley-Klein h_1 et h_2, reportons-nous aux formules (6.5.8) et (6.5.20). On obtient

$$\lambda = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{Arg} h_1 + \operatorname{Arg} h_2 - Ut. \qquad (6.5.21)$$

La même formule peut se déduire, bien entendu, directement de la relation (6.3.10) et de l'égalité initiale (6.3.1) qui lie entre eux les angles ψ et λ.

Proposons-nous maintenant d'établir l'expression pour μ, c'est-à-dire pour l'azimut de Greenwich de la plate-forme. En portant dans le premier membre de l'égalité (6.5.1) les expressions de λ et $\varkappa$ conformément aux formules (6.5.21), (6.3.12) et (6.3.3), on obtient

$$\mu = \frac{\pi}{2} - 2\operatorname{Arg} h_2 + Ut \qquad (6.5.22)$$

Les remarques faites sur les formules (6.3.10) et (6.3.12) sont également valables pour les formules (6.5.21) et (6.5.22) si ces dernières conduisent à des valeurs de λ et μ situées en dehors de l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Proposons-nous maintenant d'obtenir la formule pour la détermination du rayon vecteur r de la projection stéréographique de l'origine du système de coordonnées xyz sur le plan uv. Suivant

les formules (6.5.4), (6.5.20) et (6.3.9), on a

$$r = |u + iv| = 2R\left|\frac{h_1}{h_2}\right| = 2R\sqrt{\frac{m_1^2+m_2^2}{m_0^2+m_3^2}}. \qquad (6.5.23)$$

D'après la troisième équation trigonométrique (6.3.7),

$$m_0^2 + m_3^2 = \frac{1+\cos\theta}{2} = \cos^2\frac{\theta}{2}. \qquad (6.5.24)$$

Par ailleurs, en vertu de l'égalité (6.4.20),

$$m_1^2 + m_2^2 = 1 - (m_0^2 + m_3^2) = \sin^2\frac{\theta}{2}. \qquad (6.5.25)$$

La formule (6.5.23) prend donc la forme suivante:

$$r = 2R\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}. \qquad (6.5.26)$$

Cette dernière relation découle directement de la définition géométrique de la projection stéréographique (v. fig. 146) et peut donc être utilisée pour vérifier quelques calculs faits au cours du présent paragraphe. Dans le cas où les valeurs de l'angle θ sont petites, les formules (6.5.26) et (6.5.5) sont pratiquement équivalentes.

Les formules obtenues dans le paragraphe actuel sont d'une application universelle parce qu'elles sont valables pour toute la sphère terrestre, tant aux latitudes moyennes qu'au voisinage du pôle Nord [1]). C'est là un avantage indéniable que présente l'utilisation des paramètres de Rodrigues-Hamilton dans la navigation par inertie.

BIBLIOGRAPHIE

Андреев В. Д. Теория инерциальной навигации (*V. Andréev.* Théorie de la navigation par inertie). M., « Наука », 1966 (en russe).

Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела (*V. Branets, I. Shmyglevski.* Application des quaternions aux problèmes d'orientation d'un corps solide). M., « Наука », 1973 (en russe).

Кошляков В. Н. Об уравнениях местоположения движущегося объекта (*V. Kochliakov.* Sur les équations de la position d'un mobile). — ПММ, 1964, т. 28, вып. 6 (en russe).

Лурье А. И. О теории конечных поворотов твердого тела (*A. Lourier.* Sur la théorie des rotations finies d'un corps solide). — ПММ, 1957, т. 21, вып. 4 (en russe).

Темченко М. Е. К задаче автономного определения координат местоположения объекта посредством использования плоской декартовой системы координат, стереографически отображенной на сферу, при учете несферичности Земли (*M. Temtchenko.* Sur le problème de la détermination autonome

[1]) Pour la navigation dans l'Antarctide, il convient d'utiliser, comme cela a été dit plus haut, une autre projection stéréographique de la sphère terrestre: à partir du pôle Nord sur le plan tangent à la Terre en son pôle Sud.

des coordonnées d'un mobile à l'aide d'un système cartésien plan, projeté par une transformation stéréographique sur une sphère, compte tenu de la non-sphéricité de la Terre). — Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 3 (en russe).
Hamilton W.R. Lectures on quaternions. Dublin, Hodges and Smith, 1853.
Hamilton W.R. Elements of quaternions. Vol. 1-2. N. Y., Chelsea, 1969.
Ishlinsky A.Yu., Klimov D.M. Some aspects of the solution of the main problem of inertial navigation. — J. Inst. Navig., 1970, vol. 23, No. 4.
Klein F., Sommerfeld A. Über die Theorie des Kreisels. H. 1-4, Leipzig-Berlin, Teubner, 1897/1898-1903/1910.
Korn G., Korn T. Mathematical handbook for scientists and engineers. N. Y., e. a. McGraw-Hill, 1968.
Lavrentiev M., Chabat B. Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe. Moscou, Ed. « Mir », 1972 (traduit du russe).
Pontriaguine L. Les équations différentielles ordinaires. Moscou, Ed. « Mir », 1969 (traduit du russe).
Roberson R.E. Kinematical equations for bodies whose rotation is described by the Euler-Rodrigues parameter. — AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 5.
Whittaker E.T. A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies. 3rd ed. Cambridge, Univ. Press, 1927.

ANNEXE

ROTATION FINIE D'UN CORPS SOLIDE ET FONCTION HOMOGRAPHIQUE D'UNE VARIABLE COMPLEXE

Dans cette annexe, les rotations finies du corps solide autour d'un point fixe sont étudiées du point de vue de la théorie des fonctions d'une variable complexe. On démontre le théorème [1]) d'après lequel à toute rotation finie d'un corps solide on peut faire correspondre une transformation homographique bien déterminée

$$w' = \frac{aw+b}{cw+d}. \tag{1}$$

Les paramètres a, b, c, d de cette transformation sont définis, à un facteur commun près, par la donnée de la rotation finie. A son tour, une rotation finie du solide est entièrement caractérisée par la donnée des paramètres a, b, c et d correspodants. Enfin, les nombres complexes w et w' déterminent, au moyen de la projection stéréographique, les positions respectives d'un point donné du corps solide avant et après la rotation.

On trouve la démonstration de l'assertion énoncée ci-dessus, dans les manuels de mécanique analytique. Elle a un caractère un peu indirect et repose sur les propriétés géométriques de la transformation (1). Dans ce qui suit, cette assertion sera démontrée par des calculs directs. Incidemment, au cours de cette démonstration, nous établirons les relations qui existent entre les paramètres a, b, c et d et les paramètres de Cayley-Klein (donc, les paramètres de Rodrigues-Hamilton) qui ont été utilisés plus haut (v. chap. VI, § 1 du présent livre).

Une rotation finie d'un corps solide peut être donnée par divers procédés et, en particulier, par trois angles d'Euler ψ, θ, φ ou par trois angles d'Euler-Krylov α, β, γ (v. tome I, chap. III, §§ 5 et 6 respectivement). Il est évident qu'elle se caractérise entièrement par les cosinus directeurs l, m, n de son axe dans un système de coordonnées fixe quelconque $\xi\eta\zeta$ et par l'angle φ de rotation du

---

[1]) Voir, par exemple, *M. Lavrentiev, B. Chabat* « Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe ». Moscou, Ed. « Mir », 1972 (traduit du russe).

corps, autour de cet axe, à partir de la position initiale dans la position finale. Remarquons que les paramètres de Rodrigues-Hamilton (v. tome I, chap. II, § 3)

$$p_0 = \cos\frac{\varphi}{2}, \qquad p_1 = l\sin\frac{\varphi}{2},$$
$$p_2 = m\sin\frac{\varphi}{2}, \qquad p_3 = n\sin\frac{\varphi}{2}, \tag{2}$$

qui vérifient l'identité évidente

$$p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1, \tag{3}$$

déterminent univoquement l'angle φ dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ et les cosinus directeurs l, m, n. Cela signifie que les paramètres de Rodrigues-Hamilton caractérisent entièrement, eux aussi, une rotation finie du solide. A cette même fin, peuvent encore servir les paramètres de Cayley-Klein [1]) (v. plus haut chap. VI, § 1), c'est-à-dire les nombres complexes de la forme

$$f_1 = p_1 + ip_2, \quad f_2 = p_0 + ip_3, \tag{4}$$

qui vérifient, bien entendu, la relation

$$f_1\bar{f}_1 + f_2\bar{f}_2 = 1. \tag{5}$$

Dans ce qui suit, il sera pourtant plus commode de définir une rotation finie par la table

$$\begin{array}{cccc} & \xi & \eta & \zeta \\ x & k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ y & k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ z & k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{array} \tag{6}$$

des cosinus des angles inclus entre les axes d'un système de coordonnées xyz lié au corps solide et les axes du système fixe $\xi\eta\zeta$ avec lequel le système xyz se confond dans la position initiale du corps. Les neuf éléments de la table (6) ne peuvent pas tous être donnés de façon absolument arbitraire. Ils doivent être des nombres réels, de module non supérieur, dans le cas général, à l'unité, et satisfaire à six relations, indépendantes l'une de l'autre, connues en géométrie analytique de l'espace. Pour ces relations, on peut prendre, en particulier, les relations suivantes:

$$\begin{aligned} k_{11}^2 + k_{12}^2 + k_{13}^2 &= 1, \\ k_{21}^2 + k_{22}^2 + k_{23}^2 &= 1, \\ k_{31}^2 + k_{32}^2 + k_{33}^2 &= 1 \end{aligned} \tag{7}$$

[1]) Remarquons que par paramètres de Cayley-Klein on entend parfois des quantités complexes liées d'une façon différente aux paramètres de Rodrigues-Hamilton. Mais cette différence n'est pas essentielle.

et

$$\begin{aligned} k_{21}k_{31} + k_{22}k_{32} + k_{23}k_{33} &= 0, \\ k_{31}k_{11} + k_{32}k_{12} + k_{33}k_{13} &= 0, \\ k_{11}k_{21} + k_{12}k_{22} + k_{13}k_{23} &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

De plus, le déterminant

$$K = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{vmatrix} \tag{9}$$

doit être strictement positif [1]). Il n'est pas difficile de montrer que le module du déterminant (9) est égal à l'unité. A cet effet, il suffit de l'élever au carré et de tenir compte des relations (7) et (8).

A partir des relations (7) et (8), on peut déduire des relations analogues, par exemple

$$\begin{aligned} k_{13}^2 + k_{23}^2 + k_{33}^2 &= 1, \\ k_{11}k_{12} + k_{21}k_{22} + k_{31}k_{32} &= 0, \end{aligned} \tag{10}$$

ainsi que de nouvelles relations qui seront données un peu plus loin.

Les éléments k_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ de la table (6) sont faciles à exprimer par les angles d'Euler ψ, θ, φ ou par les angles d'Euler-Krylov α, β, γ. A cet effet, il convient d'utiliser les tables (4.4.20) et (4.4.21) données au chap. IV, § 4 du tome I. De même, en faisant usage de la table (2.1.24) établie au chap. II, § 1 du tome I, on peut représenter les éléments k_{ij} par les fonctions des cosinus directeurs l, m, n de l'axe de rotation finie et de son angle φ. Enfin, le rapprochement entre la table (6) de la présente Annexe et la table (2.3.3) du tome I, chap. II, § 3 permet d'établir la relation entre les éléments k_{ij} et les paramètres de Rodrigues-Hamilton p_0, p_1, p_2, p_3. Les problèmes réciproques correspondants, c'est-à-dire la détermination des angles d'Euler ψ, θ, φ (ou des angles d'Euler-Krylov α, β, γ), des cosinus directeurs l, m, n et de l'angle φ ou des paramètres de Rodrigues-Hamilton p_0, p_1, p_2, p_3 d'après les éléments k_{ij} donnés de la table (6), sont beaucoup plus difficiles à résoudre. Pour la résolution de tels problèmes, on peut appliquer les méthodes indiquées pour des cas analogues à la fin du § 2, chap. VI du présent tome.

Proposons-nous maintenant d'expliquer le sens des quantités complexes w et w' qui figurent dans la formule de la transformation

---

[1]) Dans le cas contraire, le système de coordonnées xyz construit d'après la table (6) serait associé à un repère rétrograde si le système $\xi\eta\zeta$ l'était à un repère direct. Or, dans l'espace à trois dimensions, un tel déplacement angulaire d'un solide parfait est impossible.

homographique (1). Envisageons un ensemble des points du corps solide situés sur une même demi-droite rigidement liée au corps et issue de son point fixe, c'est-à-dire de l'origine du système de coordonnées $\xi\eta\zeta$. Il est évident que la position de ces points par rapport au système $\xi\eta\zeta$ est entièrement déterminée si l'on connaît la position de l'un d'eux par rapport au même système. Par conséquent, on peut juger du déplacement de tous les points du corps solide lors de sa rotation finie, d'après le changement de position de ceux d'entre eux qui se trouvent, par exemple, à une distance unité de l'origine du système de coordonnées $\xi\eta\zeta$. Considérons un quelconque de ces points. Désignons par M sa position avant la rotation du corps et par M' sa position après la rotation du corps. Désignons par ξ, η et ζ les coordonnées du point M dans le système de coordonnées $\xi\eta\zeta$ que nous supposerons fixe. De même, désignons par x, y, z les coordonnées du point M' dans le système de coordonnées xyz rigidement lié au corps. Dans la position de départ du corps, les axes des systèmes de coordonnées xyz et $\xi\eta\zeta$ se confondent et le point M' occupe la position du point M. Par suite, quelle que soit la position ultérieure du corps, on a toujours les égalités

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta. \tag{11}$$

Désignons par ξ', η', ζ' les coordonnées du point M' dans le système de coordonnées fixe, après la réalisation de la rotation finie caractérisée par la table des cosinus (6). Les coordonnées ξ', η', ζ' diffèrent évidemment dans le cas général des valeurs initiales ξ, η, ζ et, comme il est facile de voir, s'expriment par les formules du type

$$\xi' = x\cos(\widehat{x, \xi}) + y\cos(\widehat{y, \xi}) + z\cos(\widehat{z, \xi}). \tag{12}$$

En tenant compte des égalités (11), ainsi que des désignations des cosinus des angles inclus entre les axes des systèmes de coordonnées xyz et $\xi\eta\zeta$, utilisées dans la table (6), on obtient

$$\begin{aligned} \xi' &= k_{11}\xi + k_{21}\eta + k_{31}\zeta, \\ \eta' &= k_{12}\xi + k_{23}\eta + k_{32}\zeta, \\ \zeta' &= k_{13}\xi + k_{23}\eta + k_{33}\zeta. \end{aligned} \tag{13}$$

Les formules (13) relient les coordonnées initiales et finales d'un même point du corps solide qui effectue une rotation finie donnée par la table (6).

Faisons correspondre maintenant à la position initiale du point choisi M du corps solide un point W situé dans le plan $\xi\eta$, en utilisant à cet effet la construction géométrique suivante (fig. 151). Soit une droite qui passe par le point M et par le point S situé sur la partie négative de l'axe ζ à la distance unité de l'origine des coordonnées. Cette droite coupe le plan de coordonnées $\xi\eta$ en un

point que nous désignerons par W. Il est évident que le point W est la projection stéréographique [1]), à partir du pôle S, du point M de la sphère de rayon unité

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 \tag{14}$$

sur le plan

$$\zeta = 0. \tag{15}$$

En effectuant des constructions géométriques simples (fig. 152) et en utilisant les théorèmes de similitude des triangles, il n'est pas difficile d'obtenir les formules suivantes

$$u = \frac{\xi}{1+\zeta}, \quad v = \frac{\eta}{1+\zeta} \tag{16}$$

pour les coordonnées u et v du point W dans le système de coordonnées plan $\xi\eta$. Il est évident que la quantité complexe

$$w = u + iv \tag{17}$$

détermine entièrement les coordonnées du point M sur la sphère. En effet, jointes à la relation (14), les formules (16) constituent un système de trois équations à trois inconnues ξ, η et ζ, d'où l'on tire les égalités

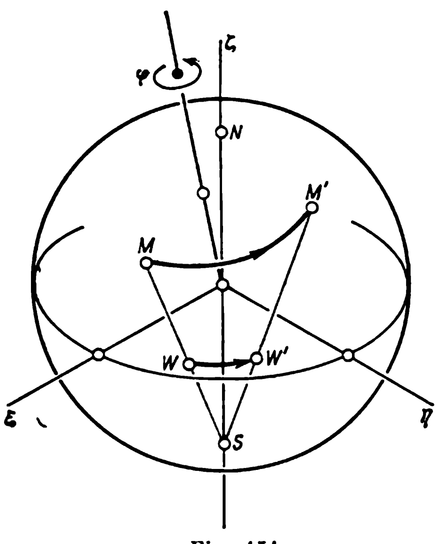


Fig. 151

$$\xi = u\,(1 + \zeta), \quad \eta = v\,(1 + \zeta) \tag{18}$$

et l'équation du second degré

$$(u^2 + v^2)\,(1 + \zeta)^2 + \zeta^2 = 1. \tag{19}$$

Cette dernière possède toujours une racine $\zeta = -1$. Mais cette racine est à rejeter. En effet, lorsque $\zeta = -1$, les variables ξ et η, sont, en vertu des égalités (18), nulles, quelles que soient les valeurs finies données de u et v, ce qui n'est pas vrai dans le cas général.

[1]) La projection stéréographique décrite ci-dessus ne diffère que d'une façon non essentielle de la projection que nous venons d'indiquer au chap. VI, § 5. Cette dernière est la projection stéréographique de la sphère terrestre depuis le pôle Sud sur le plan tangent à la sphère terrestre en son pôle Nord.

Une autre racine de l'équation (19) est de la forme

$$\zeta=\frac{1-u^2-v^2}{1+u^2+v^2}. \tag{20}$$

En portant cette valeur de ζ dans les égalités (18), on obtient

$$\xi=\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \quad \eta=\frac{2v}{1+u^2+v^2}. \tag{21}$$

Les formules (20) et (21) déterminent univoquement les coordonnées ξ, η, ζ du point M par l'intermédiaire des coordonnées u et v du point W. Il est naturel qu'au point de vue géométrique, la correspondance biunivoque entre les points M et W est parfaitement claire (v. fig. 151). Dans ces conditions, si le point M situé sur la sphère s'approche indéfiniment du pôle P, c'est-à-dire du point de coordonnées $\xi=\eta=0$, $\zeta=-1$, le point W s'éloigne à l'infini tout en restant dans le plan de coordonnées $\xi\eta$. Il est donc naturel d'admettre que la projection stéréographique du pôle P est un point à l'infini, situé dans le plan complexe ($w=u+iv=\infty$).

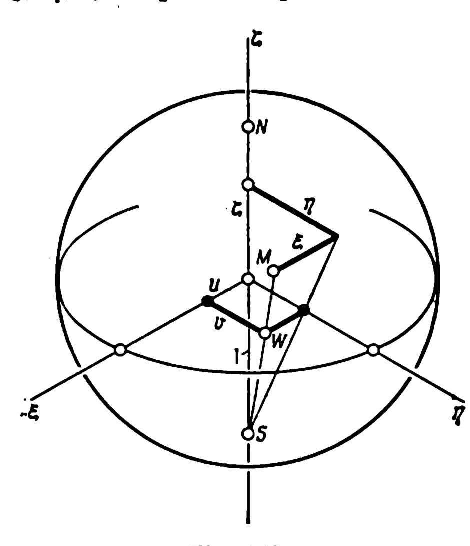


Fig. 152

Construisons maintenant la projection stéréographique du point M' sur le même plan (15) et désignons-la par W'. Par analogie avec les formules (16), on a pour les coordonnées u' et v' du point W' dans le plan $\xi\eta$, les expressions suivantes:

$$u'=\frac{\xi'}{1+\zeta'}, \quad v'=\frac{\eta'}{1+\zeta'}, \tag{22}$$

où ξ', η', ζ' sont, comme précédemment, les coordonnées du point M' dans le système de coordonnées fixe $\xi\eta\zeta$, et par analogie avec la relation (14) on a

$$\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2=1. \tag{23}$$

Formons une quantité complexe

$$w'=u'+iv', \tag{24}$$

qui détermine, elle, de façon univoque, les coordonnées ξ', η', ζ' du point M' à l'aide des formules du type (20) et (21).

A chacun des nombres complexes w on peut faire correspondre un nombre complexe w', de même qu'à chaque ensemble des coordonnées ξ, η, ζ du point M correspond, suivant les formules (13), un ensemble déterminé des coordonnées ξ', η', ζ' du point M'. Le théorème indiqué au début de la présente Annexe contient l'assertion suivant laquelle la correspondance mentionnée entre w et w' est une fonction analytique de l'argument w, de la forme (1), c'est-à-dire une fonction homographique. Dans ce cas, les paramètres a, b, c et d ne dépendent pas des coordonnées ξ, η, ζ de la position initiale du point choisi M du solide, mais sont entièrement déterminés par les quantités qui caractérisent la rotation finie donnée, par exemple par les éléments k_{ij} de la table (6), par les paramètres de Rodrigues-Hamilton p_0, p_1, p_2, p_3, par les angles d'Euler ψ, θ, φ ou par d'autres quantités quelconques.

Ce théorème sera démontré si l'égalité (1) se transforme en identité, lorsque sont réalisées les opérations suivantes. Les nombres w et w' intervenant dans cette égalité sont remplacés par les expressions

$$w = \frac{\xi + i\eta}{1+\zeta}, \qquad w' = \frac{\xi' + i\eta'}{1+\zeta'}. \tag{25}$$

qui découlent des formules (17) et (16), (24) et (22). Puis, les coordonnées ξ', η', ζ' sont remplacées par les seconds membres des formules (13). Ensuite, les paramètres a, b, c et d sont choisis de telle sorte que l'égalité (1) ainsi modifiée se transforme en identité, quelles que soient les valeurs des coordonnées ξ, η, ζ satisfaisant à la condition (14). Il est évident que dans ce cas l'égalité initiale (1) sera valable pour tout couple de quantités w et w' se rapportant à la rotation finie donnée. Elle se trouve ainsi équivalente aux formules (13) qui permettent de déterminer, à partir des coordonnées initiales données ξ, η, ζ d'un point quelconque du corps solide, les coordonnées ξ', η', ζ' de sa position finale après la rotation finie donnée.

Passons maintenant à la démonstration du théorème. Remarquons tout d'abord que pour $c = 0$ la relation (1) entre w' et w se réduit à une relation linéaire simple

$$w' = \frac{a}{d} w + \frac{b}{d}. \tag{26}$$

En laissant, pour l'instant, de côté ce cas particulier [1]), supposons que le paramètre c est différent de zéro. Alors on peut, sans restreindre

[1]) La démonstration du théorème pour le cas de $c=0$ est donnée à la fin de la présente Annexe. Ce cas correspond à la rotation finie du corps solide autour de l'axe ζ perpendiculaire au plan de la projection stéréographique. Pour cette rotation, le paramètre b se trouve nul.

la généralité, poser dans les calculs qui suivent,

$$c = 1. \qquad (27)$$

Maintenant, en tenant compte de l'égalité (27), mettons l'égalité (1) supposée vraie sous la forme suivante:

$$ww' + dw' - aw - b = 0. \qquad (28)$$

En y introduisant les expressions (25) pour w et w', on obtient

$$(\xi' + i\eta')(\xi + i\eta) + d(\xi' + i\eta')(1 + \zeta) -$$
$$-a(1 + \zeta')(\xi + i\eta) - b(1 + \zeta')(1 + \zeta) = 0. \qquad (29)$$

Remplaçons les coordonnées ξ', η', ζ' par les seconds membres des formules (13), il vient

$$[k_{11}\xi + k_{21}\eta + k_{31}\zeta + i(k_{12}\xi + k_{22}\eta + k_{32}\zeta)](\xi + i\eta + d + d\zeta) -$$
$$-(1 + k_{13}\xi + k_{23}\eta + k_{33}\zeta)[a(\xi + i\eta) + b(1 + \zeta)] = 0, \qquad (30)$$

ce qui peut se mettre sous la forme

$$A\xi^2 + B\xi\eta + C\eta^2 + D\zeta^2 + P\xi\zeta + Q\eta\zeta + L\xi + M\eta +$$
$$+ N\zeta - b = 0. \qquad (31)$$

Ici,

$$\begin{aligned}
A &= k_{11} + ik_{12} - k_{13}a,\\
B &= i(k_{11} + ik_{12}) + k_{21} + ik_{22} - i(k_{13} - ik_{23})a,\\
C &= i(k_{21} + ik_{22}) - ik_{23}a,\\
D &= (k_{31} + ik_{32})d - k_{33}b,\\
P &= (k_{11} + ik_{12})d + k_{31} + ik_{32} - k_{33}a - k_{13}b, \qquad (32)\\
Q &= (k_{21} + ik_{22})d + i(k_{31} + ik_{32}) - ik_{33}a - k_{23}b,\\
L &= (k_{11} + ik_{12})d - a - k_{13}b,\\
M &= (k_{21} + ik_{22})d - ia - k_{23}b,\\
N &= (k_{31} + ik_{32})d - (k_{33} + 1)b.
\end{aligned}$$

La relation (31) contient neuf quantités: A, B, C, D, P, Q, L, M, N qui dépendent des paramètres a, b, c, d et de neuf éléments k_{ij} (i, j = 1, 2, 3) de la table (6). D'après ce qui précède, la démonstration du théorème se ramène à celle de l'assertion suivante. Etant donné les éléments de la table (6), les paramètres a, b et d peuvent être choisis de telle sorte que la relation (31) soit vérifiée, quelles que soient les valeurs des coordonnées ξ, η, ζ soumises à la condition (14). Montrons qu'un tel choix est possible.

Commençons par établir les valeurs que doivent avoir les quantités A, B, C, D, P, Q, L, M, N pour que la relation (31) soit vérifiée pour certaines valeurs particulières des coordonnées ξ, η, ζ

satisfaisant à la condition (14). C'est ainsi qu'en posant successivement $\eta = \zeta = 0$, $\xi = \pm 1$ et $\zeta = \xi = 0$, $\eta = \pm 1$, nous voyons que les quantités A, L, C et M doivent satisfaire aux quatre équations

$$A \pm L - b = 0, \quad C \pm M - b = 0. \tag{33}$$

Des équations (33) il résulte immédiatement que

$$A = C = b, \quad L = M = 0, \tag{34}$$

si bien que la relation (31) devient

$$B\xi\eta + D\zeta^2 + P\xi\zeta + Q\eta\zeta + N\zeta - b\,(1 - \xi^2 - \eta^2) = 0. \tag{35}$$

En y posant $\xi = \eta = 1/\sqrt{2}$, $\zeta = 0$, on obtient

$$B = 0. \tag{36}$$

Ce qui ressort d'ailleurs de la première suite d'égalités (34), puisque d'après les expressions (32) on a

$$B = i\,(A - C). \tag{37}$$

Si, compte tenu de l'égalité (36), on pose dans la relation (35) $\eta = 0$ $\zeta = 1/\sqrt{2}$, $\xi = \pm 1/\sqrt{2}$, on obtient encore deux équations

$$D \pm P + N\sqrt{2} - b = 0, \tag{38}$$

d'où

$$P = 0 \tag{39}$$

et

$$D = b - N\sqrt{2}. \tag{40}$$

De même, en posant dans la même relation (35) $\xi = 0$, $\zeta = -1/\sqrt{2}$, $\eta = \pm 1/\sqrt{2}$, on obtient

$$D \pm Q - N\sqrt{2} - b = 0, \tag{41}$$

d'où il résulte que

$$Q = 0 \tag{42}$$

et

$$D = b + N\sqrt{2}. \tag{43}$$

Le rapprochement entre les égalités (40) et (43) donne

$$N = 0 \tag{44}$$

et en outre

$$D = b. \tag{45}$$

En tenant compte des formules (34), (36), (39), (42), (44) et (45), on peut mettre la relation (35) et donc la relation initiale (31) sous

la forme suivante:

$$b(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 1) = 0. \tag{46}$$

Or, la dernière égalité est vérifiée identiquement pour toutes les valeurs de ξ, η, ζ satisfaisant à la condition (14).

Ainsi, la relation (31) sa transforme en identité si les paramètres a, b et d sont choisis de manière qu'ils satisfont à la fois aux équations

$$\begin{gathered} A = C = D = b, \\ B = P = Q = L = M = N = 0, \end{gathered} \tag{47}$$

où A, B, C, D, P, Q, L, M, N sont définies par les expressions (32).

On peut indiquer également une autre voie permettant d'obtenir les équations (47). Compte tenu de la condition (14), la relation (31) peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} (A - D)\,\xi^2 + B\xi\eta + (C - D)\,\eta^2 + L\xi + M\eta + D - b = \\ = -(P\xi + Q\eta + N)\,\zeta. \end{aligned} \tag{48}$$

Elevons au carré les deux membres de la dernière égalité et utilisons de nouveau la condition (14). Il vient

$$\begin{aligned} [(A - D)\,\xi^2 + B\xi\eta + (C - D)\,\eta^2 + L\xi + M\eta + D - b]^2 = \\ = (P\xi + Q\eta + N)^2\,(1 - \xi^2 - \eta^2). \end{aligned} \tag{49}$$

La relation (49) ne contient pas la coordonnée ζ. Elle se transforme en identité si les coefficients des monômes identiques dans ses deux membres sont égaux. En égalant ces coefficients, il n'est pas difficile de former quinze équations dont neuf seulement sont indépendantes. En résolvant ces dernières par rapport aux neuf inconnues A, B, C, D, P, Q, L, M et N, on obtient de nouveau les égalités (47) qui sont, à leur tour, les équations permettant de déterminer les paramètres a, b et d de la transformation homographique.

Le nombre d'équations (47) est le triple de celui de variables cherchées a, b et d. Néanmoins, la problème de la détermination des paramètres a, b et d admet une solution et une seule. Comme il a déjà été montré plus haut, l'équation $B = 0$ est, en vertu de l'égalité (37), une conséquence des équations $A = b$ et $C = b$. On peut donc la faire disparaître dans le système (47). Puis, on peut également éliminer l'équation $N = 0$, car, en vertu de la quatrième et de la neuvième des égalités (32), on a

$$N = D - b, \tag{50}$$

et d'après les équations (47), $D = b$. Enfin, des mêmes égalités (32) on tire

$$P - L = k_{31} + ik_{32} - (k_{33} - 1)\,a \tag{51}$$

et de plus

$$Q - M = i\,(k_{31} + ik_{32}) - i\,(k_{33} - 1)\,a. \tag{52}$$

Par conséquent,

$$Q - M = i\,(P - L), \tag{53}$$

et l'une des équations (47) : $P = 0$, $Q = 0$, $L = 0$ ou $M = 0$ est superflue. On peut également procéder de la façon suivante : rejeter à la fois deux équations $P = 0$ et $Q = 0$ mais introduire une nouvelle équation

$$k_{31} + ik_{32} - (k_{33} - 1)\,a = 0. \tag{54}$$

En effet, supposons qu'en plus des égalités (34) qui donnent $L = M = 0$, est également valable la relation (54). Alors, en vertu des égalités (51) et (52), s'annulent les expressions de P et de Q, c'est-à-dire sont satisfaites les équations (39) et (42).

Ainsi, neuf équations (47) pour trois inconnues a, b et d se réduisent pour l'instant, à six : l'équation (54) et les équations

$$A = b, \quad C = b, \quad D = b, \quad L = 0, \quad M = 0. \tag{55}$$

Introduisons dans les équations (55) les expressions (32) pour A, C, D, L et M. On obtient les mêmes six équations sous la forme développée suivante :

$$\begin{aligned} k_{11} + ik_{12} - k_{13}a - b &= 0,\\ i\,(k_{21} + ik_{22}) - ik_{23}a - b &= 0,\\ (k_{31} + ik_{32})\,d - (k_{33} + 1)\,b &= 0,\\ (k_{11} + ik_{12})\,d - a - k_{13}b &= 0,\\ (k_{21} + ik_{22})\,d - ia - k_{23}b &= 0,\\ k_{31} + ik_{32} - (k_{33} - 1)\,a &= 0. \end{aligned} \tag{56}$$

Comme il a été indiqué précédemment, les neuf éléments k_{ij} de la table (6) qui interviennent dans ces équations sont liés entre eux par six relations (7) et (8) ou par d'autres relations analogues. Pour le reste, ils peuvent être quelconques, excepté l'élément k_{33}. Dans les équations (56), l'élément k_{33} ne doit pas être posé égal à l'unité. En effet, si l'élément k_{33} est égal à l'unité, les éléments k_{13}, k_{23}, k_{31} et k_{32} s'annulent en vertu des relations (7) et (10), et le système d'équations (56) devient incompatible (le paramètre b doit avoir trois valeurs différentes à la fois). Remarquons que pour $k_{33} = -1$,

le même système est compatible. La raison pour laquelle il est impossible de poser $k_{33}=1$ dans le système d'équations (56) est la suivante. L'égalité $k_{33} = 1$ n'a lieu que dans le cas d'une rotation finie du corps solide autour de l'axe z qui lui est rigidement lié et qui se confond avec l'axe ζ du système de coordonnées fixe $\xi\eta\zeta$. Ainsi qu'on l'a dit plus haut, à cette rotation on ne peut pas faire correspondre la transformation homographique (1) de paramètre c non nul et on doit dans ce cas recourir à la forme particulière (26) de cette transformation (v. la fin de la présente Annexe).

D'après leur structure, les équations (56) se séparent en deux groupes qui peuvent être représentés de la façon suivante:

$$\begin{aligned} k_{13}a + b &= k_{11} + ik_{12}, \\ k_{23}a - ib &= k_{21} + ik_{22}, \\ (k_{33} - 1)\, a &= k_{31} + ik_{32} \end{aligned} \tag{57}$$

et

$$\begin{aligned} a + k_{13}b - (k_{11} + ik_{12})\, d &= 0, \\ ia + k_{23}b - (k_{21} + ik_{22})\, d &= 0, \\ (k_{33} + 1)\, b - (k_{31} + ik_{32})\, d &= 0. \end{aligned} \tag{58}$$

Le premier groupe est formé de trois équations linéaires non homogènes à deux inconnues a et b. Comme il sera montré un peu plus loin, le déterminant constitué par les coefficients des inconnues et par les seconds membres des équations de ce système, soit

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} k_{13} & 1 & k_{11} + ik_{12} \\ k_{23} & -i & k_{21} + ik_{22} \\ k_{33} - 1 & 0 & k_{31} + ik_{32} \end{vmatrix}, \tag{59}$$

est nul. En même temps, il est facile de voir que tous les mineurs du second ordre dans les deux premières colonnes de ce déterminant sont non nuls. En effet, l'élément k_{33} intervenant dans les équations (57) et (58) est différent de l'unité. Examinons séparément de ce qui est exposé ci-dessous le cas de $k_{33} = -1$. Alors il découle des relations (7) que pour $k_{33} \neq \pm 1$, l'un au moins des éléments k_{13} ou k_{23} est différent de zéro. C'est pourquoi les trois équations (57) sont compatibles et chacune d'elles est une conséquence de deux autres. La dernière des équations (57) permet de déterminer immédiatement le paramètre a. On a donc

$$a = \frac{k_{31} + ik_{32}}{k_{33} - 1}. \tag{60}$$

A présent, le paramètre b peut se déterminer à partir de la première ou de la deuxième des équations (57). Les calculs ultérieurs se simplifient considérablement si l'on applique le procédé suivant.

Multiplions les premiers et les seconds membres des équations (57) successivement par k_{13}, k_{23}, k_{33} et additionnons membre à membre les équations ainsi obtenues. Compte tenu des relations du type (10) entre les éléments k_{ij} de la table (6), on obtient

$$(1 - k_{33})\, a + (k_{13} - ik_{23})\, b = 0, \tag{61}$$

d'où, en tenant compte de la formule (60), on tire

$$b = \frac{k_{31} + ik_{32}}{k_{13} - ik_{23}}. \tag{62}$$

Le second groupe d'égalités (58) contient trois équations linéaires homogènes par rapport à trois inconnues a, b et d. Le déterminant de ce système d'équations

$$\Delta_2 = (-1) \begin{vmatrix} 1 & k_{13} & k_{11} + ik_{12} \\ i & k_{23} & k_{21} + ik_{22} \\ 0 & k_{33} + 1 & k_{31} + ik_{32} \end{vmatrix} \tag{63}$$

est proche, d'après sa structure, du déterminant Δ_1 et est, lui aussi (comme il sera démontré plus loin), nul. Pour une raison analogue, les mineurs du second ordre, constitués par les éléments de la première et de la deuxième colonne du déterminant (63), sont non nuls. Le système d'équations (58) admet donc des solutions autres que la solution triviale ($a = b = d = 0$), et chacune des équations (58) est une conséquence de deux autres. Compte tenu de la formule (62), la troisième des équations (58) permet d'obtenir pour le paramètre d l'expression suivante:

$$d = \frac{k_{33} + 1}{k_{13} - ik_{23}} \tag{64}$$

Le fait que les déterminants Δ_1 et Δ_2 sont nuls et que certains de leurs mineurs diffèrent de zéro permet de réduire de six à quatre le nombre d'équations pour les inconnues a, b et d. En réalité, comme il fallait s'y attendre, les équations indépendantes dans le système (56) ne sont qu'au nombre de trois. Pour le démontrer, formons une nouvelle équation qui est, d'une part, une conséquence de trois équations (58) et, d'autre part, coïncide avec l'équation (61). Quant à cette dernière, elle résulte des équations (57). Par là même, encore l'une des équations, soit du groupe (57), soit du groupe (58), se trouve superflue et la supposition faite se justifie. Pour démontrer cette assertion, procédons de la façon suivante. Multiplions les premiers membres des équations (58) successivement par k_{13}, k_{23}, k_{33} et additionnons les résultats obtenus. Compte tenu des relations du type (10), on obtient l'équation

$$(k_{13} + ik_{23})\, a + (1 + k_{33})\, b = 0. \tag{65}$$

Les équations (61) et (65) sont identiques parce qu'on a la proportion

$$\frac{1-k_{33}}{k_{13}+ik_{23}}=\frac{k_{13}-ik_{23}}{1+k_{33}} \qquad (66)$$

qui est équivalente à l'égalité évidente du type (10)

$$k_{13}^2+k_{23}^2+k_{33}^2=1. \qquad (67)$$

Démontrons maintenant que les déterminants (59) et (63) sont nuls. On a

$$\Delta_1 = -i\,(k_{11} - k_{22}k_{33} + k_{23}k_{32}) - i\,(k_{22} - k_{11}k_{33} + k_{13}k_{31}) + \\ + (k_{12} + k_{21}k_{33} - k_{23}k_{31}) - (k_{21} + k_{12}k_{33} - k_{13}k_{32}). \qquad (68)$$

D'une manière analogue, on peut obtenir l'égalité suivante:

$$\Delta_2 = -i\,(k_{11} - k_{22}k_{33} + k_{23}k_{32}) + i\,(k_{22} - k_{11}k_{33} + k_{13}k_{31}) + \\ + (k_{12} + k_{21}k_{33} - k_{23}k_{31}) + (k_{21} + k_{12}k_{33} - k_{13}k_{32}). \qquad (69)$$

Mais chacune des expressions figurant entre parenthèses aux seconds membres des égalités (68) et (69) est nulle. Il est aisé de s'en assurer sur l'exemple de la première et de la troisième parenthèse au second membre de l'égalité (68) ou, ce qui revient au même, de l'égalité (69). A cet effet, écrivons trois relations évidentes du type (7) et (8)

$$\begin{aligned} k_{11}k_{11} + k_{12}k_{12} + k_{13}k_{13} &= 1, \\ k_{21}k_{11} + k_{22}k_{12} + k_{23}k_{13} &= 0, \\ k_{31}k_{11} + k_{32}k_{12} + k_{33}k_{13} &= 0. \end{aligned} \qquad (70)$$

Ces relations peuvent être considérées comme un système de trois équations algébriques linéaires à trois inconnues k_{11}, k_{12} et k_{13}, dont le déterminant Δ est de la forme (9) et, comme il est indiqué plus haut, égal à l'unité. On a donc, en particulier,

$$\begin{aligned} k_{11} &= \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & k_{12} & k_{13} \\ 0 & k_{22} & k_{23} \\ 0 & k_{32} & k_{33} \end{vmatrix} = k_{22}k_{33}-k_{23}k_{32}, \\ k_{12} &= \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} k_{11} & 1 & k_{13} \\ k_{21} & 0 & k_{23} \\ k_{31} & 0 & k_{33} \end{vmatrix} = -(k_{21}k_{33}-k_{23}k_{31}), \end{aligned} \qquad (71)$$

d'où il résulte que les expressions sus-mentionnées se trouvant entre parenthèses dans les égalités (68) et (69) sont nulles. En opérant de façon identique, on peut se convaincre qu'il en est de même des autres expressions analogues. Par là même, il est démontré que les déterminants Δ_1 et Δ_2 sont, eux aussi, nuls. Par voie de consé-

quence, on peut considérer que le théorème énoncé au début de la présente Annexe est démontré pour le cas où le paramètre c figurant dans la formule (1) est différent de zéro. On peut également vérifier que pour $k_{33} \neq \pm 1$ les valeurs de a, b et d données respectivement par les expressions (60), (62) et (64) satisfont à toutes les équations (56).

Le cas où l'élément k_{33} de la table (6) est égal à -1 est un peu particulier. Dans ce cas, les éléments k_{13}, k_{23}, k_{31} et k_{32} s'annulent pour les mêmes raisons que pour $k_{33} = 1$. Ce cas peut se présenter, par exemple, lors de la rotation du corps solide de l'angle π autour de l'axe x confondu avec l'axe fixe ξ.

Les formules que nous venons d'obtenir pour les paramètres a, b et d cessent maintenant d'être valables, de sorte que dans le cas examiné il convient d'avoir recours directement aux équations (57) et (58). Il n'est pas difficile de vérifier qu'à la différence du cas de $k_{33} = 1$, ces équations sont compatibles. Les valeurs obtenues pour a et d sont nulles, alors que le paramètre b est égal à la quantité complexe $k_{11} + ik_{12}$ qui est, dans le cas de $k_{33} = -1$, aussi la quantité $-k_{22} + ik_{21}$.

Passons maintenant à la représentation de a, b, d par l'intermédiaire des paramètres de Rodrigues-Hamilton (2) et ensuite par les paramètres de Cayley-Klein (4). On sait que les cosinus des angles formés entre les axes de deux systèmes de coordonnées peuvent s'exprimer par les paramètres de Rodrigues Hamilton qui caractérisent la rotation finie d'un système dans l'autre. Utilisons la table (2.3.3) indiquée au chap. II, § 3 du tome I (en remplaçant les désignations x_*, y_*, z_* par ξ, η, ζ). On a

	ξ	η	ζ	
x	$2p_1^2+2p_0^2-1$	$2p_1p_2+2p_0p_3$	$2p_1p_3-2p_0p_2$	(72)
y	$2p_1p_2-2p_0p_3$	$2p_2^2+2p_0^2-1$	$2p_2p_3+2p_0p_1$	
z	$2p_1p_3+2p_0p_2$	$2p_2p_3-2p_0p_1$	$2p_3^2+2p_0^2-1.$	

En comparant les tables (6) et (72), remplaçons maintenant les éléments k_{31}, k_{32}, k_{33} qui figurent dans la formule (60) de a, par leurs représentations par l'intermédiaire des paramètres de Rodrigues-Hamilton. Il vient

$$a = \frac{p_1p_3+p_0p_2+i\,(p_2p_3-p_0p_1)}{p_3^2+p_0^2-1} = i\,\frac{p_0+ip_3}{p_1-ip_2}. \tag{73}$$

Effectuons la même opération sur le second membre de la formule (62). On obtient

$$b = \frac{p_1p_3+p_0p_2+i\,(p_2p_3-p_0p_1)}{p_1p_3-p_0p_2-i\,(p_2p_3+p_0p_1)} = \frac{p_1+ip_2}{p_1-ip_2}. \tag{74}$$

Et, enfin, en faisant usage de la formule (64), on obtient pour la valeur de d l'expression suivante :

$$d = \frac{p_3^2 + p_0^2}{p_1 p_3 - p_0 p_2 - i(p_2 p_3 + p_0 p_1)} = i\,\frac{p_0 - ip_3}{p_1 - ip_2}. \tag{75}$$

En introduisant les expressions ainsi obtenues pour les paramètres a, b et d dans la formule initiale (1) de la transformation homographique, en y posant comme précédemment $c = 1$, on obtient, toutes réductions effectuées,

$$w' = \frac{(p_0 + ip_3)\,w - i(p_1 + ip_2)}{-i(p_1 - ip_2)\,w + p_0 - ip_3}. \tag{76}$$

Introduisons maintenant, de même que nous l'avons fait plus haut au chap. VI, § 1, les paramètres de Cayley-Klein

$$f_1 = p_1 + ip_2, \quad f_2 = p_0 + ip_3. \tag{77}$$

La formule de la transformation homographique correspondant à une rotation finie du corps solide, exprimée par les paramètres de Cayley-Klein, prend maintenant la forme suivante :

$$w' = \frac{f_2 w - if_1}{-i\bar{f}_1 w + \bar{f}_2}. \tag{78}$$

Ainsi, en faisant disparaître, dans le cas général, la condition inessentielle (27), on peut poser dans la formule (1), à un facteur constant non nul près, que

$$a = f_2, \quad b = -if_1, \quad c = -i\bar{f}_1, \quad d = \bar{f}_2. \tag{79}$$

Il est facile de vérifier, compte tenu des formules (77) et de l'identité (3) pour les paramètres de Rodrigues-Hamilton, que

$$ad - bc = f_1\bar{f}_1 + f_2\bar{f}_2 = p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1. \tag{80}$$

C'est précisément de cette façon que sont généralement normés les coefficients de la transformation homographique.

Jusqu'ici nous n'avons pas considéré le cas où le coefficient c est nul. On peut pourtant le prendre en considération en posant dans les formules (79)

$$c = -i\bar{f}_1 = 0. \tag{81}$$

Alors, la formule (78) devient

$$w' = \frac{f_2}{\bar{f}_2}\,w. \tag{82}$$

De l'égalité (81) et de la deuxième formule (77) il résulte que

$$p_1 = p_2 = 0. \tag{83}$$

Par suite, en tenant compte de l'expression (2) pour les paramètres de Rodrigues-Hamilton, on obtient

$$l = m = 0, \quad n = 1, \tag{84}$$

c'est-à-dire que

$$p_0 = \cos\frac{\varphi}{2}, \quad p_3 = \sin\frac{\varphi}{2} \tag{85}$$

et donc

$$f_2 = \cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}. \tag{86}$$

Après les remarques faites, la formule (82) peut être mise sous la forme

$$w' = w\exp(i\varphi), \tag{87}$$

qui est susceptible d'une interprétation géométrique simple. Elle correspond à la rotation du corps solide autour de l'axe ζ (v. plus loin).

La formule (87) peut s'obtenir également par une autre voie, en partant directement de la relation linéaire (26). A cet effet, il convient de développer des raisonnements analogues à ceux exposés plus haut pour le cas général. C'est ainsi qu'en remplaçant dans la relation (26) les variables complexes w et w' par leurs expressions (25) et en posant pour la commodité $d = 1$, on obtient

$$(\xi' + i\eta')(1 + \zeta) = a(\xi + i\eta)(1 + \zeta') + b(1 + \zeta)(1 + \zeta'). \tag{88}$$

Puis, en y introduisant au lieu de ξ', η' et ζ' leurs représentations par l'intermédiaire de ξ, η et ζ conformément aux formules (13), on peut mettre la relation (88) sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}[(k_{11} + ik_{12})\,\xi + (k_{21} + ik_{22})\,\eta + (k_{31} + ik_{32})\,\zeta]\,(1 + \zeta) - \\ - (a\xi + ia\eta + b + b\zeta)(1 + k_{13}\xi + k_{23}\eta + k_{33}\zeta).\end{aligned} \tag{89}$$

Pour les variables ξ, η et ζ satisfaisant à la condition (14), cette relation doit se transformer en identité. La structure de la relation (89) est la même que celle de la relation (31). Mais, à la différence des formules (32), on doit maintenant poser

$$\begin{aligned}
A &= -k_{13}a,\\
B &= -ik_{13}a - k_{23}a,\\
C &= -ik_{23}a,\\
D &= k_{31} + ik_{32} - k_{33}b,\\
P &= k_{11} + ik_{12} - k_{33}a - k_{13}b,\\
Q &= k_{21} + ik_{22} - ik_{33}a - k_{23}b,
\end{aligned} \tag{90}$$

$$L = k_{11} + ik_{12} - a - k_{13}b,$$
$$M = k_{21} + ik_{22} - ia - k_{23}b,$$
$$N = k_{31} + ik_{32} - k_{33}b - b.$$

Les conditions de transformation en identité du premier membre de la relation (31) sont évidemment valables pour la relation (89). A savoir, cette dernière se transforme en identité si sont vérifiées toutes les neuf équations (47) dans lesquelles les valeurs de A, B, C, D, P, Q, L, M et N sont déterminées par les expressions (90).

Pourtant, à la différence de ce qui précède, ceci est impossible à réaliser pour des valeurs quelconques des éléments k_{ij} de la table (6) et le paramètre b non nul. En effet, en vertu de la cinquième et de la septième équation (47), on a, compte tenu des désignations (90),

$$P - L = (1 - k_{33})\, a = 0. \tag{91}$$

Le paramètre a figurant au second membre de la relation linéaire (26) est le coefficient de la variable complexe w et ne peut pas évidemment être nul. Aussi, l'équation (91) permet-elle de conclure que

$$k_{33} = 1. \tag{92}$$

En vertu des relations du type (7) et (8) auxquelles satisfont les éléments k_{ij} de la table (6), il en résulte immédiatement les égalités

$$k_{13} = k_{23} = k_{31} = k_{32} = 0. \tag{93}$$

De par là même, la table (6) des cosinus des angles que font entre eux les axes des systèmes de coordonnées xyz et $\xi\eta\zeta$ prend la forme suivante:

$$\begin{array}{cccc} & \xi & \eta & \zeta \\ x & k_{11} & k_{12} & 0 \\ y & k_{21} & k_{22} & 0 \\ z & 0 & 0 & 1. \end{array} \tag{94}$$

En partant des mêmes relations du type (7) et (8), ainsi que du fait que le déterminant (9) est égal à l'unité, on peut tirer les relations

$$k_{11} = k_{22}, \quad k_{21} = -k_{21}, \tag{95}$$

qui peuvent se déduire d'ailleurs d'autres considérations. En effet, la table (94) correspond à la rotation du corps solide autour de l'axe ζ qui se confond avec l'axe z du système de coordonnées xyz lié au corps. Or, la table des cosinus des angles inclus entre les axes du système de coordonnées mobile xyz et du système fixe $\xi\eta\zeta$ présente, dans

ce cas, la forme suivante:

$$\begin{array}{cccc} & \xi & \eta & \zeta \\ x & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ y & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ z & 0 & 0 & 1. \end{array} \qquad (96)$$

Ici, φ est l'angle de rotation du système de coordonnées xyz à partir de la position $\xi\eta\zeta$, en sens inverse des aiguilles d'une montre, si la rotation est observée du côté de la direction positive de l'axe ζ ou, ce qui revient au même, de l'axe z. Le rapprochement entre les tables (94) et (96) donne les mêmes relations (95) qui deviennent maintenant

$$k_{11} = k_{22} = \cos\varphi, \quad k_{12} = -k_{21} = \sin\varphi. \qquad (97)$$

Revenons aux équations (47) dans lesquelles les quantités A, B, C, D, P, Q, L, M et N sont maintenant déterminées par les formules (90). Compte tenu des égalités (92) et (93), les quatre premières et la dernière des équations (47) se réduisent à l'égalité

$$b = 0. \qquad (98)$$

Par conséquent, les autres équations deviennent confondues avec les deux suivantes:

$$k_{11} + ik_{12} - a = 0, \quad k_{21} + ik_{22} - ia = 0. \qquad (99)$$

En vertu des relations (97), les dernières équations s'avèrent équivalentes à une seule:

$$a = \cos\varphi + i\sin\varphi = \exp(i\varphi). \qquad (100)$$

Si on porte des paramètres a et b, trouvés suivant les égalités (98) et (100), dans la formule (26) et qu'on y pose $d = 1$, on est conduit de nouveau à la transformation linéaire la plus simple (87). Le module de la quantité complexe a étant égal à l'unité, la transformation linéaire (87) correspond à la rotation, dans le plan $\xi\eta$, du rayon vecteur de la quantité complexe w en sens inverse des aiguilles d'une montre, de l'angle φ, sans modification de son module. Le point W appartenant au plan $\zeta = 0$ et le point M du corps solide, appartenant à la sphère unité $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ sont situés sur une même droite qui doit passer par le point S (0, 0, —1) (v. fig. 151). Il en résulte aussi que la fonction d'une variable complexe (87) correspond à la rotation du corps solide autour de l'axe ζ, de l'angle φ.

En conclusion, signalons la circonstance suivante. Supposons qu'une rotation du corps solide définie par la transformation homographique (1) est suivie d'une autre rotation donnée par la trans-

formation

$$w'' = \frac{a'w' + b'}{c'w' + d'}. \tag{101}$$

En y portant au lieu de w' son expression (1) par w, on obtient, toutes réductions effectuées, une nouvelle transformation homographique

$$w'' = \frac{a''w + b''}{c''w + d''}. \tag{102}$$

Elle correspond à la rotation du corps à partir de la position initiale directement dans la position finale qu'il prend par suite de deux rotations successives (1) et (101).

Les paramètres a'', b'', c'', d'' intervenant dans la relation (102) s'expriment par les paramètres a, b, c, d et a', b', c', d' comme il suit

$$\begin{aligned} a'' &= a'a + b'c, \\ b'' &= a'b + b'd, \\ c'' &= c'a + d'c, \\ d'' &= c'b + d'd. \end{aligned} \tag{103}$$

Ils sont normés d'après la condition (80) s'il en est de même pour les paramètres a, b, c, d et a', b', c', d'. Un changement de l'ordre dans lequel sont effectuées les rotations conduit dans le cas général, comme il fallait s'y attendre, à d'autres valeurs pour les coefficients a'', b'', c'', d''. En effet, la position prise par le corps, par suite de deux rotations successives dont les axes ne coïncident pas, dépend de l'ordre dans lequel ces rotations sont effectuées.

On peut s'attendre à un développement ultérieur de l'application de la transformation homographique à la théorie du mouvement du corps solide autour d'un point fixe, et notamment à l'étude des problèmes géométriques concrets de stabilisation et des systèmes de navigation par inertie.

INDEX ALPHABÉTIQUE DES MATIÈRES

INDEX ALPHABÉTIQUE DES AUTEURS CITÉS

TABLE DES MATIÈRES

À NOS LECTEURS

Les Editions Mir vous seraient très reconnaissantes de bien vouloir leur communiquer votre opinion sur le contenu de ce livre, sa traduction et sa présentation, ainsi que toute autre suggestion.

Notre adresse: Editions Mir, 2, Pervi Rijski péréoulok, Moscou, I-110, GSP, U.R.S.S.

Imprimé en Union Soviétique